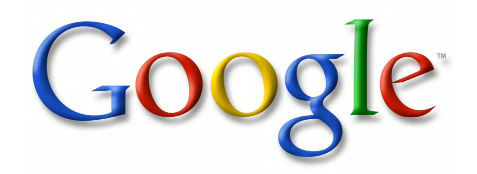




Stanford University Libraries
3 6105 000 993 704

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Als Fortsetzung des von

A. L. Crelle

gegründeten Journals

herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Schellbach, Kummer, Kronecker, Weierstrass

von

C. W. Borchardt.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preussischer Behörden.

Dreiundsiebzigster Band.

In vier Heften.

Berlin, 1871.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

Inhaltsverzeichniss des dreiundsiebzigsten Bandes.

Ueber die Entwicklung analytischer Functionen in Reihen, die nach gegebenen Functionen fortschreiten.

(Von Herrn *G. Frobenius.*)

Von den unendlichen Reihen, deren allgemeines Glied das Product einer beliebigen Constante c_n und einer bestimmten Function einer complexen Variabeln $F_n x$ ist, sind, so viel ich weiss, ausser den Potenzreihen nur die, welche nach Kreisfunctionen, Kugelfunctionen oder Cylinderfunctionen fortschreiten, bisher ausführlich behandelt worden*). Zwei andere Systeme von Functionen, welche etwas allgemeiner und reicher an Eigenthümlichkeiten sind als die eben erwähnten, will ich im folgenden untersuchen. Im ersten Beispiele werde ich für $F_n x$ das Product der ersten n Factoren eines unendlichen Productes, im zweiten den n^{ten} Näherungszähler oder den n^{ten} Näherungsnenner eines unendlichen Kettenbruchs wählen.

§. 1.

Sind $a_0, a_1, \ldots$ constante Grössen, die für endliche Werthe des Index ebenfalls endlich sind, und ist

$$P_0 x = 1, \quad P_n x = (x-a_0)(x-a_1)\ldots(x-a_{n-1}),$$

so gelten die Recursionsformeln:

$$P_{n+1}x + a_n P_n x = x P_n x, \quad \frac{1}{P_n x} + \frac{a_n}{P_{n+1} x} = \frac{x}{P_{n+1} x} (n = 0, 1, \ldots).$$

Werden vom Gebiete der Variabeln y die Punkte $0, a_0, a_1, \ldots$ ausgeschlossen, und wird gesetzt

$$S = \Sigma_0^{n-1} \frac{P_\nu x}{P_{\nu+1} y},$$

---

*) In der Theorie der Facultätenreihen ist es noch immer nicht gelungen, die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Entwickelbarkeit einer Function zu finden.

so ergiebt sich aus diesen Formeln:

$$xS = \Sigma_0^{n-1} \frac{xP_\nu x}{P_{\nu+1}y} = \Sigma_0^{n-1} \frac{P_{\nu+1}x}{P_{\nu+1}y} + \Sigma_0^{n-1} \frac{a_\nu P_\nu x}{P_{\nu+1}y},$$

$$yS = \Sigma_0^{n-1} \frac{yP_\nu x}{P_{\nu+1}y} = \Sigma_0^{n-1} \frac{P_\nu x}{P_\nu y} + \Sigma_0^{n-1} \frac{a_\nu P_\nu x}{P_{\nu+1}y},$$

$$(y-x)S = 1 - \frac{P_n x}{P_n y},$$

woraus folgt:

$$\Sigma_0^{n-1} \frac{P_\nu x}{P_{\nu+1}y} = \frac{1}{y-x}\left(1 - \frac{P_n x}{P_n y}\right).$$

Weiter lässt sich die Untersuchung nicht führen, ohne dass über die Grössen $a_0, a_1, \ldots$ noch weitere beschränkende Annahmen gemacht werden. Ich werde daher zunächst voraussetzen, dass die Reihe Σa_ν unbedingt convergent ist.

Fällt x mit keinem der Werthe $0, a_0, a_1, \ldots$ zusammen, und werden die absoluten Beträge von $x, a_0, a_1, \ldots$ mit $\xi, \alpha_0, \alpha_1, \ldots$ bezeichnet, so ist, weil der absolute Betrag einer Summe nicht grösser ist als die Summe der absoluten Beträge,*)

$$P_n x = x^n\left(1 - \frac{a_0}{x}\right) \cdots \left(1 - \frac{a_{n-1}}{x}\right) < x^n\left(1 + \frac{\alpha_0}{\xi}\right) \cdots \left(1 + \frac{\alpha_{n-1}}{\xi}\right) < x^n \Pi_0^\infty\left(1 + \frac{\alpha_\nu}{\xi}\right).$$

Weil aber die Summe $\Sigma\alpha_\nu$ convergent ist, so convergirt auch das Product

$$\Pi\left(1 + \frac{\alpha_\nu}{\xi}\right)$$

gegen einen endlichen von Null verschiedenen Werth g, und mithin ist für alle Werthe von n

$$(1.) \qquad P_n x < g x^n.$$

In dieser Ungleichheit hat g für alle Punkte x eines um den Nullpunkt beschriebenen Kreises denselben Werth.

Unter den Grössen $a_0, a_1, \ldots$ kann es, weil ihre Summe convergent ist, nur eine endliche Anzahl geben, deren absolute Beträge gleich ξ sind, falls es überhaupt solche giebt. Sei a_λ eine beliebige, deren absoluter Werth gleich ξ, a_μ irgend eine, deren absoluter Werth von ξ verschieden ist. Dann wird auf demselben Wege wie eben nachgewiesen, dass, wenn der von Null verschiedene endliche absolute Betrag des Ausdrucks

$$\Pi\left(1 - \frac{a_\lambda}{x}\right)\Pi\left(1 - \frac{\alpha_\mu}{\xi}\right)$$

---

*) Von zwei complexen Grössen nenne ich diejenige die grössere, welche den grösseren absoluten Werth hat.

mit h bezeichnet wird, für alle Werthe von n

$$(2.)\qquad P_n x > h x^n$$

ist. Falls ξ von $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ verschieden, ist h in dieser Ungleichheit für alle dem absoluten Betrage nach gleichen Werthe von x dieselbe Grösse.

In einem von $0, a_0, a_1, \ldots$ verschiedenen Punkte x liegt also für jeden Werth von n der Quotient $\frac{P_n x}{x^n}$ zwischen zwei bestimmten Grenzen, deren untere nicht Null, und deren obere nicht unendlich ist. Daher nenne ich die beiden Functionensysteme

$$P_0 x,\quad P_1 x, \ldots \quad \text{und} \quad x^0,\quad x^1, \ldots$$

für diesen Werth von x *äquivalent* und drücke ihre *Aequivalenz* aus durch die Formel

$$(3.)\qquad P_n x \sim x^n,$$

welche gültig ist, so lange $P_n x$ und x^n von Null verschieden sind. Die Aequivalenz (3.) ersetzt die beiden Ungleichheiten (1.) und (2.).

Die Anzahl derjenigen unter den Grössen $a_0, a_1, \ldots$, welche nicht kleiner sind, als eine beliebig angenommene Grösse ϱ, ist endlich, etwa gleich m. Hat das Product dieser m Grössen den Werth p, so ist für $n > m$ $P_n 0 < \frac{p}{\sigma^m}\sigma^n$. Wenn die Reihe $\Sigma c_\nu x^\nu$ nicht absolut divergent ist, so sei σ grösser als Null und kleiner als der Radius ihres Convergenzkreises. Da dann alle Glieder der convergenten Reihe $\Sigma c_\nu \sigma^\nu$ kleiner sein müssen als eine gewisse Grösse q, so ist $c_n < \frac{q}{\sigma^n}$. Wählt man also $\varrho < \sigma$, so ist die Reihe $\Sigma_m^\infty c_\nu P_\nu 0 < \frac{pq}{\sigma^m}\Sigma_m^\infty \frac{\varrho^\nu}{\sigma^\nu}$ und mithin convergent. Hieraus und aus der Aequivalenz (3.) folgt aber, dass für jeden von $a_0, a_1, \ldots$ verschiedenen Werth von x die beiden Reihen

$$\Sigma c_\nu P_\nu x \quad \text{und} \quad \Sigma c_\nu x^\nu$$

zugleich convergiren und divergiren.

Sei a_m die letzte der Grössen $a_0, a_1, \ldots$, welche einen bestimmten Werth a hat. Dann ist

$$\Sigma_0^\infty c_\nu P_\nu x = \Sigma_0^m c_\nu P_\nu x + P_{m+1} x\, \Sigma_{m+1}^\infty c_\nu \frac{P_\nu x}{P_{m+1} x}.$$

Aus dem eben bewiesenen folgt, dass die Reihe $\Sigma_{m+1}^\infty c_\nu \frac{P_\nu x}{P_{m+1} x}$ für jeden von $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots$ verschiedenen Werth von x zugleich mit $\Sigma c_\nu x^\nu$ convergent und divergent ist. Liegt also a innerhalb des Convergenzkreises der Reihe

$\Sigma c_\nu x^\nu$, so convergirt $\Sigma_{m+1}^{\infty} c_\nu \frac{P_\nu x}{P_{m+1} x}$ für $x = a_m$ gegen einen endlichen Werth, und das Product von $P_{m+1} x$ in diese Reihe ist gleich Null. Daher bricht $\Sigma c_\nu P_\nu x$ für $x = a$ ab und ist mithin convergent. Wenn aber a ausserhalb des Convergenzkreises der Reihe $\Sigma c_\nu x^\nu$ liegt, so lässt sich über das Verhalten von $\Sigma c_\nu P_\nu x$ im Punkte a nichts allgemeines angeben *). Aus allen diesen Erörterungen ergiebt sich der Satz: *Der Convergenzbereich der Reihe $\Sigma c_\nu P_\nu x$ ist, wenn Σa_ν convergent ist, ein Kreis um den Nullpunkt, dessen Radius dem des Convergenzkreises der Reihe $\Sigma c_\nu x^\nu$ gleich ist.*

§. 2.

Seien ξ, α_0, α_1, ..., γ_0, γ_1, ... die absoluten Beträge von x, a_0, a_1, ..., c_0, c_1, ..., und sei

$$Q_n \xi = (\xi + \alpha_0)(\xi + \alpha_1) \ldots (\xi + \alpha_{n-1}).$$

Wenn für einen bestimmten Werth a von x, dessen absoluter Werth α ist, die Reihe $\Sigma c_\nu P_\nu x$ convergirt, so gilt dasselbe von $\Sigma c_\nu x^\nu$ und $\Sigma \gamma_\nu \xi^\nu$, also auch von $\Sigma \gamma_\nu Q_\nu \xi$. Daher liegen alle Glieder der Reihe $\Sigma \gamma_\nu Q_\nu \alpha$ unterhalb einer bestimmten Grenze g, oder es ist

$$\gamma_\nu < \frac{g}{Q_\nu \alpha}.$$

Mithin ist

$$\Sigma_n^\infty c_\nu P_\nu x < \Sigma_n^\infty \gamma_\nu Q_\nu \xi < g \Sigma_n^\infty \frac{Q_\nu \xi}{Q_\nu \alpha}.$$

Sind p, q, r drei positive Grössen und ist $p > q$, so ist auch

$$\frac{p}{q} > \frac{p+r}{q+r}.$$

Wenn also $\xi < \alpha$ ist, so ist

$$\frac{Q_\nu \xi}{Q_\nu \alpha} < \left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^\nu,$$

und daher

$$\Sigma_n^\infty c_\nu P_\nu x < g \Sigma_n^\infty \left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^\nu = \frac{g\alpha}{\alpha - \xi}\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^n.$$

Ist nun $\alpha' < \alpha$, so lässt sich eine bestimmte Zahl n von der Beschaffenheit angeben, dass dieser Ausdruck für *alle* Werthe von ξ, welche nicht grösser als α' sind, kleiner ist als eine beliebig angenommene Grösse ε. Daraus fliesst der Satz: *Innerhalb eines um den Nullpunkt beschriebenen Kreises, dessen Radius*

---

*) Vergl. *Gauss* Werke, Band III, pag. 143.

kleiner ist als der Convergenzradius der Reihe $\Sigma c_\nu P_\nu x$ ist dieselbe in gleichem Grade convergent. Nach bekannten Sätzen der Functionentheorie ergeben sich hieraus die wichtigen Folgerungen: 1) Die Reihe $\Sigma c_\nu P_\nu x$ stellt innerhalb ihres Convergenzbezirkes eine stetige Function dar, welche sich, wenn a ein bestimmter Punkt im Innern dieses Bereiches ist, in eine nach ganzen positiven Potenzen von $x-a$ fortschreitende convergente Reihe entwickeln lässt, also den Charakter einer ganzen Function hat. 2) Die Reihe kann differentiirt und integrirt werden, und zwar dadurch, dass die betreffenden Operationen an den einzelnen Gliedern ausgeführt werden.

Wenn y einen von 0, a_0, a_1, ... verschiedenen Werth hat, so folgt aus der Aequivalenz (3.) in §. 1, dass die beiden Reihen

$$\Sigma \frac{c_\nu}{y^{\nu+1}} \quad \text{und} \quad \Sigma \frac{c_\nu}{P_{\nu+1} y}$$

zugleich convergiren und divergiren. Haben aber k von den Grössen $a_0, a_1, \ldots$ den Werth a, der im Convergenzbereiche der Reihe $\Sigma \frac{c_\nu}{y^{\nu+1}}$ liegt, so ergiebt sich, wie eben, dass $\Sigma \frac{c_\nu (y-a)^k}{P_{\nu+1} y}$ in der Umgebung von a endlich und stetig ist. Daher kann die Reihe in denjenigen unter den Punkten a_0, a_1, ..., welche innerhalb ihres Convergenzbereiches liegen, falls sie nicht endlich bleibt, nur so unendlich werden, wie eine rationale Function, und muss, weil die durch sie dargestellte Function eine analytische ist, die keine hebbaren Unstetigkeiten bietet, gegen den wahren Werth dieser Function convergiren.

§. 3.

Ich nehme an, dass die Function fy ausserhalb des mit dem Radius ϱ um den Nullpunkt beschriebenen Kreises, den ich mit $C\varrho$ bezeichnen will, den Charakter einer rationalen Function habe, beständig endlich sei und im unendlichen verschwinde. Wenn dann y ausserhalb $C\varrho$ liegt und von a_0, $a_1, \ldots$ verschieden ist, x den sich im positiven Sinne um den Nullpunkt windenden Kreis $C\varrho'$ $(\varrho < \varrho' < y)$ durchläuft, so gilt die *Cauchy*sche Gleichung

$$fy = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{fx\,dx}{y-x}.$$

Daher folgt aus der in §. 1 entwickelten Identität

$$(1.) \qquad \frac{1}{y-x} = \Sigma_0^{n-1} \frac{P_\nu x}{P_{\nu+1} y} + \frac{1}{y-x}\frac{P_n x}{P_n y}$$

die Gleichung

$$fy = \Sigma_0^{n-1} \frac{c_\nu}{P_{\nu+1}y} + \frac{1}{2\pi i}\int \frac{fx\,dx}{y-x}\frac{P_n x}{P_n y},$$

wenn gesetzt wird

$$c_\nu = \frac{1}{2\pi i}\int fx P_\nu x\,dx.$$

Sind ξ, η, α_0, α_1, ... die absoluten Beträge von x, y, a_0, a_1, ..., und ist $0 < \varepsilon < \frac{\eta-\xi}{2}$, so müssen von einem bestimmten Index m an die Grössen α_m, α_{m+1}, ... alle kleiner sein als ε. Daher ist für $n > m$

$$\frac{(x-a_m)(x-a_{m+1})\dots(x-a_n)}{(y-a_m)(y-a_{m+1})\dots(y-a_n)} < \frac{(\xi+\alpha_m)(\xi+\alpha_{m+1})\dots(\xi+\alpha_n)}{(\eta-\alpha_m)(\eta-\alpha_{m+1})\dots(\eta-\alpha_n)} < \left(\frac{\xi+\varepsilon}{\eta-\varepsilon}\right)^{n-m},$$

welcher Ausdruck, weil $\xi+\varepsilon < \eta-\varepsilon$ ist, bei wachsendem n unendlich klein wird. Daher nähert sich der Quotient $\frac{P_n x}{P_n y}$, wie auch aus den Betrachtungen des §. 1 folgt, der Grenze Null, und zwar für alle Punkte x des Kreises $C\varrho'$ in gleichem Maasse. Mithin sinkt auch der Rest

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{fx\,dx}{y-x}\frac{P_n x}{P_n y}$$

bei wachsendem n unter jeden angebbaren Werth herab, und es ist

$$fy = \Sigma_0^\infty \frac{c_\nu}{P_{\nu+1}y}.$$

Wenn sich eine Function auf zwei verschiedene Weisen durch eine derartige Reihe darstellen liesse, so würde sich durch Subtraction der beiden Darstellungen eine Entwicklung der Null ergeben, $\Sigma \frac{c_\nu}{P_{\nu+1}y} = 0$, welche ausserhalb des grösseren der Convergenzkreise der beiden gleichwerthigen Reihen convergirte. Multiplicirt man mit y (oder $y-a_0$), und lässt man, was die Convergenz der Reihe erlaubt, y über alle Grenzen wachsen, so sieht man, dass c_0 kleiner als jede beliebige Grösse, also gleich Null ist. Ebenso zeigt man, dass c_1, c_2, ... sämmtlich verschwinden. Daher lässt sich fy nur auf eine einzige Weise nach diesen Functionen entwickeln.

Wenn ferner die Reihe $\Sigma \frac{c_\nu}{P_{\nu+1}y}$ ausserhalb der Curve $C\varrho$ convergirt, ausserhalb deren von den Punkten a_0, a_1, ... gelegen sind a_α, a_β, ..., so stellt sie eine Function dar, die den Charakter einer rationalen hat und ausserhalb $C\varrho$ nur in den Punkten a_α, a_β, ... von einer gewissen Ordnung unendlich gross werden kann. Verliert also fy auf der Curve $C\varrho$ den Charakter

einer rationalen Function, oder wird es in einem Punkte a, der unter a_α, a_β, ... weniger als $k$mal vorkommt, von der k^{ten} Ordnung unendlich, so kann die Convergenz der Reihe $\Sigma \frac{c_\nu}{P_{\nu+1}y}$ nicht über $C\varrho$ hinausreichen. Denn sonst würde die analytische Function $\Sigma \frac{c_\nu}{P_{\nu+1}y}$ nicht innerhalb des ganzen Convergenzbereiches dieser Reihe, sondern nur ausserhalb $C\varrho$ mit der analytischen Function fy übereinstimmen, während doch eine in einem Theile der Ebene analytisch definirte Function darüber hinaus nur auf eine einzige Weise stetig und eindeutig fortgesetzt werden kann. Findet sich aber a unter a_0, a_1, ... nicht weniger als $k$mal, so muss die Reihe auch wirklich über $C\varrho$ hinaus convergiren, vorausgesetzt, dass auf dieser Curve keine andern Punkte liegen, die eine weitere Convergenz verhindern. Denn es lässt sich alsdann fy auf die Form bringen

$$fy = \frac{g_0}{(y-a)^k} + \frac{g_1}{(y-a)^{k-1}} + \cdots + \frac{g_{k-1}}{y-a} + gy.$$

Da gy für $y = a$ nicht mehr unendlich wird, so convergirt die Reihe für gy über $C\varrho$ hinaus. Die Reihe aber, in welche sich $\frac{1}{(y-a)^\varkappa}$ $(\varkappa = 1, 2, \dots k)$ entwickeln lässt, besteht nur aus einer endlichen Gliederzahl. Denn ist a_{n-1} die $\varkappa^{\text{te}}$ der Grössen a_0, a_1, ..., welche gleich a ist, so erhält man, indem man die Gleichung (1.) $\varkappa-1$ mal nach x differentiirt und dann $x = a$ setzt,

$$(2.) \qquad \frac{1}{(y-a)^\varkappa} = \frac{1}{1.2\dots\varkappa-1} \Sigma_{\varkappa-1}^{n-1} \frac{P_\nu^{(\varkappa-1)}a}{P_{\nu+1}y}.$$

Nach diesen Erörterungen lässt sich, wenn fy hinreichend bekannt ist, der wahre Convergenzbezirk der Reihe $\Sigma \frac{c_\nu}{P_{\nu+1}y}$ leicht vor der Ausführung der Entwicklung angeben.

§. 4.

Wenn die Function fx innerhalb des Kreises $C\varrho$ und nicht darüber hinaus den Charakter einer ganzen Function hat, x in diesem Bereiche liegt, y die sich im positiven Sinne um den Nullpunkt windende Linie $C\varrho'$ $(\varrho > \varrho' > x)$ durchläuft, und keiner der Punkte a_0, a_1, ... auf $C\varrho'$ oder zwischen $C\varrho$ und $C\varrho'$ liegt, so folgt aus dem *Cauchy*schen Satze

$$fx = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{fy\,dy}{y-x}$$

und aus der Formel (1.) in §. 3 die Gleichung

$$fx = \Sigma_0^{n-1} c_\nu P_\nu x + \frac{1}{2\pi i}\int \frac{fy\,dy}{y-x}\frac{P_n x}{P_n y},$$

wenn

$$c_\nu = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{fy\,dy}{P_{\nu+1} y}$$

gesetzt wird, und daraus wie in §. 3

$$fx = \Sigma_0^\infty c_\nu P_\nu x.$$

Diese Reihe convergirt innerhalb der Curve $C\varrho$ und divergirt, was durch eine ähnliche Betrachtung wie in §. 3 gezeigt wird, ausserhalb derselben.

Sei nicht nur $\varrho > \varrho' > x$, sondern auch $\varrho > \varrho'' > x$, und seien, was bei hinreichend kleinen Werthen von x stets möglich ist, ϱ' und ϱ'' so gewählt, dass in dem ringförmigen, von den Kreisen $C\varrho'$ und $C\varrho''$ eingeschlossenen Theile der Ebene einige der Punkte a_0, a_1, ... liegen. Endlich habe das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{fy\,dy}{P_{\nu+1} y}$$

über $C\varrho'$ ausgedehnt den Werth c'_ν, über $C\varrho''$ genommen den Werth c''_ν. Dann sind c'_ν und c''_ν im allgemeinen von einander verschieden, und es ergiebt sich aus den beiden Gleichungen

$$fx = \Sigma c'_\nu P_\nu x \quad \text{und} \quad fx = \Sigma c''_\nu P_\nu x,$$

wenn $c'_\nu - c''_\nu = c_\nu$ gesetzt wird,

$$\Sigma c_\nu P_\nu x = 0.$$

Da aus dieser Formel ersichtlich ist, dass sich jede Function auf mehrere verschiedene Weisen entwickeln lässt, so entsteht die Aufgabe, die *sämmtlichen* Darstellungen einer und derselben Function zu finden, welche offenbar gelöst ist, wenn alle Entwicklungen der Null angegeben sind. Wenn mehrere *Nullentwicklungen* gefunden sind, so ergiebt sich eine neue dadurch, dass jene mit willkürlichen Constanten multiplicirt und zu einander addirt werden. Die so erhaltene heisst *abhängig* von denen, aus welchen sie auf die angegebene Weise zusammengesetzt ist. Von einander *unabhängig* heissen dagegen die Nullentwicklungen $S, S', \ldots$, wenn die Constanten $h, h', \ldots$ nicht so bestimmt werden können, dass in der Reihe $hS+h'S'+\ldots$ alle Coefficienten verschwinden. Durch diese Bemerkung wird die vorgelegte Aufgabe in das elegantere Problem transformirt, *ein vollständiges System von einander unabhängiger Nullentwicklungen aufzustellen.*

Ich werde zeigen, dass die Anzahl der von einander unabhängigen Nullentwicklungen, auf welche sich die sämmtlichen innerhalb eines bestimmten endlichen Kreises und darüber hinaus convergirenden zurückführen lassen, eine endliche ist. Unter dieser Voraussetzung lässt sich dass eben genannte Problem noch genauer fassen. Sind überhaupt $S_1, S_2, \dots S_n$ mehrere innerhalb der Bereiche $C_1, C_2, \dots C_n$ unbedingt convergirende Reihen, sind keine zwei dieser Bezirke einander gleich, und sind sie so beschaffen, dass jeder vorhergehende den folgenden vollständig einschliesst, so convergirt die Reihe $S = h_1 S_1 + h_2 S_2 + \cdots + h_n S_n$, falls h_n von Null verschieden ist, innerhalb C_n und nicht weiter, weil sonst auch $S - h_1 S_1 - \cdots - h_{n-1} S_{n-1} = h_n S_n$ über C_n hinaus convergiren würde. Decken sich aber die Convergenzbezirke der Reihen S_1 und S_2, so kann der Convergenzbereich von $h_1 S_1 + h_2 S_2$ weiter sein. — Betrachtet man also die sämmtlichen Kreise $C\varrho$, welche als Convergenzgrenzen von Nullentwicklungen erscheinen, und ordnet man jedem dieser Kreise eine der Nullentwicklungen zu, welche bis zu ihm und nicht über ihn hinaus convergiren, so sind diese sämmtlich von einander unabhängig. Daher ist die Anzahl der Convergenzgrenzen aller Nullentwicklungen, welche innerhalb eines bestimmten Bereiches $C\varrho$ und darüber hinaus convergiren, nicht grösser, als die Anzahl der von einander unabhängigen Nullentwicklungen, durch welche sich jene sämmtlich linear ausdrücken lassen; mithin ist die Anzahl der Convergenzkreise von Nullentwicklungen, welche grösser sind als ein bestimmter Kreis $C\varrho$, ebenfalls eine endliche. Seien $C_1, C_2, \dots$ die Kreise, welche überhaupt als Convergenzgrenzen von Nullentwicklungen auftreten, und sei $C_1 > C_2 > \dots$. Betrachtet man zuerst nur die Nullentwicklungen, die innerhalb C_1 convergiren, so lassen sie sich auf eine endliche Anzahl von einander unabhängiger $S_1, S_1', \dots$ zurückführen. Fasst man dann alle Nullentwicklungen in's Auge, welche innerhalb C_2 oder weiter convergiren, so lassen sie sich linear ausdrücken durch $S_1, S_1', \dots$ und einige neue $S_2, S_2', \dots$, von denen keine von den übrigen und $S_1, S_1', \dots$ abhängt. Fährt man so fort, so erhält man ein vollständiges System von einander unabhängiger Nullentwicklungen, das ich ein *Fundamentalsystem* nennen will, und das sich durch folgende charakteristische Eigenschaften auszeichnet:

1. Jede aus den Reihen eines Fundamentalsystems zusammengesetzte Nullentwicklung convergirt innerhalb des Bereiches, innerhalb dessen die zu ihrer Darstellung gebrauchten Reihen des Fundamentalsystems sämmtlich convergiren *und nicht weiter*.

2. Zur Darstellung einer gegebenen Nullentwicklung kommen nur die Reihen eines Fundamentalsystems zur Verwendung, welche innerhalb desselben Bereiches wie die gegebene oder weiter convergiren.

3. Die Anzahl der willkürlichen Constanten, welche eine innerhalb eines gegebenen Bereiches convergirende Nullentwicklung enthalten kann, ist gleich der Anzahl der Reihen eines Fundamentalsystems, welche innerhalb dieses Bereiches oder darüber hinaus convergiren.

Wenn umgekehrt ein System von einander unabhängiger Nullentwicklungen die in einem dieser drei Sätze ausgesprochene Eigenschaft besitzt, so ist es ein Fundamentalsystem.

Nach diesen Erörterungen kehre ich noch einmal zum ursprünglichen Problem zurück, die sämmtlichen Entwicklungen einer gegebenen Function fx zu finden, die den im Anfang dieses §. angegebenen Bedingungen genügt. Keine dieser unendlich vielen Darstellungen kann über $C\varrho$ hinaus convergiren, weil sonst fx auch auf der Linie $C\varrho$ stets den Charakter einer ganzen Function haben müsste. Ist S die ganz bestimmte oben angegebene Reihe für fx, und sind S_1, S'_1, ..., S_2, S'_2, ..., ... die innerhalb C_1, C_2, ... convergirenden Nullentwicklungen eines Fundamentalsystems, so ist jede andere Darstellung der Function von der Form $S+h_1S_1+h'_1S'_1+\cdots+h_nS_n+h'_nS'_n+\cdots=S'$. Wenn die Constanten h, h', ..., deren Index gleich n ist, nicht alle gleich Null sind, die aber, deren Index grösser als n ist, sämmtlich verschwinden, so convergirt diese Reihe, falls $C_n \geqq C\varrho$ ist, innerhalb $C\varrho$ und nicht weiter; ist aber $C_n < C\varrho$, so convergirt sie nur innerhalb C_n. Denn wäre S' weiter convergent, so wäre es auch $S'-h_1S_1-h'_1S'_1-\cdots-h_{n-1}S_{n-1}-h'_{n-1}S'_{n-1}-\cdots=h_nS_n+h'_nS'_n+\cdots$, was zwar bei einem beliebigen System von einander unabhängiger Nullentwicklungen möglich ist, nicht aber bei einem Fundamentalsystem. Daraus ergiebt sich der Satz: *Die sämmtlichen Darstellungen einer gegebenen Function convergiren entweder innerhalb des Kreises, über den hinaus sie nicht mehr überall den Charakter einer ganzen Function hat oder innerhalb eines Convergenzbereiches einer Reihe eines Fundamentalsystems von einander unabhängiger Nullentwicklungen, der kleiner ist als jener Kreis.*

Ich gehe jetzt an die Lösung des entwickelten Problems.

§. 5.

Wenn die Nullentwicklung $\Sigma c_\nu P_\nu x$ zur Grenze ihres Convergenzbereiches den Kreis $C\varrho$ hat, so können die Punkte a_0, a_1, ... nicht sämmtlich

innerhalb dieser Curve liegen; denn sonst fände man, indem man nach einander $x=a_0, a_1, \dots$ setzte, $c_0=0, c_1=0, \dots$. Es kann auch nur eine endliche Anzahl derselben nicht innerhalb jener Linie liegen; denn sonst wäre die Reihe Σa_ν nicht convergent. Sei also a_n unter den nicht im Innern liegenden der, dessen Index am grössten ist. Setzt man

$$Rx = -\Sigma_0^n c_\nu \frac{P_\nu x}{P_{n+1}x}, \quad Q_\nu x = \frac{P_{n+\nu}x}{P_{n+1}x},$$

so gelten von dem Systeme der Functionen $Q_1 x, Q_2 x, \dots$ dieselben Sätze, wie von dem der Functionen $P_0 x, P_1 x, \dots$, und es ist

$$Rx = \Sigma_1^\infty c_{n+\nu} Q_\nu x,$$

welche Reihe nur convergirt, so lange sich x innerhalb $C\varrho$ bewegt. In denen der Punkte $a_0, a_1, \dots a_n$, welche etwa im Innern von $C\varrho$ liegen, hat Rx einen endlichen Werth, weil sonst der Convergenzbereich der Reihe $\Sigma_1^\infty c_{n+\nu} Q_\nu x$ enger sein müsste. Wenn nun keiner der Punkte $a_0, a_1, \dots a_n$ auf der Linie $C\varrho$ läge, und wenn dann a_α einer der ausserhalb befindlichen wäre, dessen absoluter Betrag ϱ' ein Minimum, so liesse sich eine Darstellung $Rx = \Sigma_1^\infty c'_{n+\nu} Q_\nu x$ finden, die innerhalb $C\varrho'$ convergirte, und weil $\varrho' > \varrho$ wäre, würden die Differenzen $c_{n+\nu} - c'_{n+\nu}$ nicht sämmtlich verschwinden. Mithin würde die Nullentwicklung $\Sigma_1^\infty (c_{n+\nu} - c'_{n+\nu}) Q_\nu x$ zur Grenze ihres Convergenzbereiches die Curve $C\varrho$ haben, innerhalb deren $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$ sämmtlich liegen; was aus dem oben angeführten Grunde unmöglich ist. Daraus folgt: *Nur solche Kreise können Convergenzbereiche von Nullentwicklungen begrenzen, welche durch einen der Punkte* $a_0, a_1, \dots$ *hindurchgehen.*

Nach §. 4 kann $\frac{1}{a_n - x}$ in eine Reihe von der Form $\Sigma_1^\infty c_{n\, n+\nu} Q_\nu x$ entwickelt werden, welche im Innern des durch den Punkt a_n gehenden Kreises convergirt. Daraus ergiebt sich durch Multiplication mit $P_{n+1}x$ die in demselben Bereiche convergirende Nullentwicklung

$$S_n \equiv \Sigma_n^\infty c_{n\,\nu} P_\nu x,$$

in der $c_{n\,n} = 1$ ist, und die ich *zu* a_n *gehörig* nennen will. Verschwinden alle Coefficienten der Reihe $h_0 S_0 + h_1 S_1 + \cdots$, so ist h_0 als der von $P_0 x$ gleich 0, h_1 in Folge dessen als der von $P_1 x$ gleich 0 u. s. w., und daher sind die Nullentwicklungen $S_0, S_1, \dots$ von einander unabhängig.

Sei ferner $Sx \equiv \Sigma c_\nu P_\nu x$ irgend eine Nullentwicklung, welche innerhalb eines gewissen Kreises $C\varrho$ convergirt, seien $a_\alpha, a_\beta, \dots$ die nicht im Innern dieser Curve gelegenen unter den Punkten $a_0, a_1, \dots$, deren Anzahl eine

endliche ist, und $a_\lambda, a_\mu, \dots$ $(\lambda < \mu < \dots)$ die übrigen im Innern von $C\varrho$ liegenden. Es müssen dann die Gleichungen bestehen $Sa_\lambda = 0$, aus der sich ein ganz bestimmter Ausdruck für c_λ durch $a_\alpha, a_\beta, \dots$ ergiebt, sodann, wenn a_μ von a_λ verschieden, $Sa_\mu = 0$, wenn aber $a_\mu = a_\lambda$, $S'a_\mu = 0$, aus der c_μ durch dieselben Grössen ausgedrückt gefunden wird u. s. w. Daher müssen in zwei innerhalb $C\varrho$ convergirenden Nullentwicklungen, in welchen die Coefficienten von $P_\alpha x, P_\beta x, \dots$ einander gleich sind, auch alle übrigen gleichstelligen Coefficienten übereinstimmen. Nun können aber durch lineare Gleichungen, die eine successive Auflösung gestatten (und deren Determinante gleich 1 ist) die Constanten $h_\alpha, h_\beta, \dots$ so bestimmt werden, dass in der innerhalb $C\varrho$ convergirenden Reihe $h_\alpha S_\alpha + h_\beta S_\beta + \cdots$ die Coefficienten von $P_\alpha x$, $P_\beta x, \dots$ beliebig gegebene Werthe $c_\alpha, c_\beta, \dots$ annehmen. Dann stimmen aber alle gleichnamigen Coefficienten der Reihen S und $h_\alpha S_\alpha + h_\beta S_\beta + \cdots$ überein. Daher ist das System der von einander unabhängigen Nullentwicklungen $S_0, S_1, \dots$ vollständig, und weil zum Ausdruck von S nur diejenigen unter den Reihen $S_0, S_1, \dots$ gebraucht werden, welche innerhalb $C\varrho$ oder darüber hinaus convergiren, ein Fundamentalsystem.

Auf die Behandlung der Reihen von der Form

$$\Sigma_0^\infty c_\nu P_\nu x + \frac{c'_\nu}{P_{\nu+1} x}$$

gehe ich hier nicht ein. Die in ihrer Theorie anzuwendenden Methoden werde ich später (§. 10 und 11) erörtern.

§. 6.

Den Fall, in welchem die Summe der Grössen $a_0, a_1, \dots$ convergirt, habe ich jetzt vollständig durchgeführt. Zwei andere Fälle will ich noch kurz berühren, wenngleich es mir nicht gelungen ist, sie eben so erschöpfend zu behandeln.

Wenn die Reihe $\Sigma \frac{1}{a_\nu}$ unbedingt convergent ist, so werde ich der Bequemlichkeit wegen setzen

$$P_n x = \left(1 - \frac{x}{a_0}\right)\left(1 - \frac{x}{a_1}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{a_{n-1}}\right).$$

Weil unter der gemachten Annahme das Product

$$Px = \Pi_0^\infty\left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right)$$

für endliche Werthe von x convergirt, so folgt aus der Formel

$$\frac{1}{x-y}\left(1-\frac{P_n x}{P_n y}\right) = \Sigma_0^{n-1}\frac{P_\nu x}{a_\nu P_{\nu+1} y}$$

die Gleichung

$$\frac{1}{x-y}\left(1-\frac{Px}{Py}\right) = \Sigma_0^{\infty}\frac{P_\nu x}{a_\nu P_{\nu+1} x}.$$

Es ist nicht ein Mangel dieser Methode, dass man nicht zu einer Entwicklung von $\frac{1}{y-x}$ gelangt: dieser Ausdruck lässt sich gar nicht in eine nach solchen Functionen fortschreitende Reihe entwickeln. Denn falls x mit keinem der Punkte $a_0, a_1, \dots$ zusammenfällt, so ist bei Anwendung der Bezeichnungen des §. 1 für alle Werthe von n

$$P_n x < \Pi_0^{\infty}\left(1+\frac{\xi}{\alpha_\nu}\right) \quad \text{und} \quad > \Pi\left(1-\frac{x}{a_\lambda}\right)\left(1-\frac{\xi}{\alpha_\mu}\right),$$

und mithin sind die beiden Reihen

$$\Sigma c_\nu P_\nu x \quad \text{und} \quad \Sigma c_\nu$$

zugleich convergent und divergent. Daher convergirt die Reihe $\Sigma c_\nu P_\nu x$ entweder gar nicht oder überall im Endlichen. Da ferner in allen Punkten x innerhalb eines mit dem Radius ϱ um den Nullpunkt beschriebenen Kreises für alle Werthe von n

$$P_n x < \Pi_0^{\infty}\left(1+\frac{\varrho}{\alpha_\nu}\right)$$

ist, so überzeugt man sich leicht, dass, wenn Σc_ν convergirt, die Reihe $\Sigma c_\nu P_\nu x$ innerhalb jedes endlichen Bereiches gleichmässig convergirt. Daher muss die durch sie dargestellte Function im Endlichen überall den Charakter einer ganzen Function haben, und mithin kann $\frac{1}{y-x}$ nicht in eine derartige Reihe entwickelt werden. Wenn x eine die Punkte $a_0, a_1, \dots a_n$ im positiven Sinne einfach umwindende geschlossene Curve durchläuft, so ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{P_n x\,dx}{a_n P_{n+1} x} = -1, \quad \frac{1}{2\pi i}\int\frac{P_\nu x\,dx}{P_{n+1} x} = 0\ (\nu \gtrless n).$$

Ist also

$$fx = \Sigma_0^{\infty} c_\nu P_\nu x$$

so muss, weil diese Reihe dadurch integrirt werden kann, dass die Integration an ihren einzelnen Gliedern ausgeführt wird, die Gleichung bestehen

$$c_\nu = -\frac{1}{2\pi i}\int\frac{fy\,dy}{a_\nu P_{\nu+1} y}$$

und

$$\Sigma_0^{n-1} c_\nu P_\nu x = \frac{1}{2\pi i}\int fy\,dy\left(\frac{1}{y-x} - \frac{1}{y-x}\frac{P_n x}{P_n y}\right)$$

und mithin

$$\Sigma_n^{\infty} c_\nu P_\nu x = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{fy\,dy}{y-x}\frac{P_n x}{P_n y}.$$

Die Function fx, die im Endlichen überall den Charakter einer ganzen Function hat, kann also in eine Reihe von der Form $\Sigma c_\nu P_\nu x$ entwickelt werden oder nicht, je nachdem das Integral

$$\int \frac{fy\,dy}{(y-x)P_n y},$$

in dem der Weg von y die Punkte $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}$ einschliesst, bei wachsendem n gegen Null convergirt oder nicht.

§. 7.

In dem Falle, in welchem $a_0, a_1, \ldots$ über alle Grenzen hinaus wachsen, ohne dass $\Sigma\frac{1}{a_\nu}$ convergirt, lässt sich oft folgendes Theorem mit Vortheil anwenden, dass ich einer Vorlesung des Herrn *Weierstrass* über elliptische Functionen entnehme:

„*Wenn positive Zahlen m existiren, für welche* $\Sigma\frac{1}{a_\nu^m}$ *convergirt, und unter ihnen n die kleinste ist, und wenn*

$$g(x,a) = \frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)a^{n-1}}$$

gesetzt wird, so convergirt das Product

$$\Pi\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)e^{g(x,a_\nu)}$$

für alle endlichen Werthe von x."

Um dies zu beweisen, muss man zeigen, dass, wenn

$$1-\varphi_\nu x = \left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)e^{g(x,a_\nu)}$$

ist, die Reihe $\Sigma\varphi_\nu x$ convergirt. Da

$$\varphi'_\nu x = \frac{x^{n-1}}{a_\nu^n}e^{g(x,a_\nu)} \quad \text{und} \quad \varphi_\nu 0 = 0$$

ist, so ist

$$\varphi_\nu x = \frac{1}{a_\nu^n}\int_0^x x^{n-1}e^{g(x,a_\nu)}\,dx$$

und mithin

$$\varphi_\nu x \sim \frac{1}{a_\nu^\varkappa}.$$

Wenn also $\Sigma \frac{1}{a_\nu^\varkappa}$ convergirt, so ist auch $\Sigma \varphi_\nu x$ convergent.

Wird z. B.

$$P_n x = \left(1-\frac{x}{1}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{n}\right)$$

gesetzt, so ist

$$P_n x = \left[\left(1-\frac{x}{1}\right)e^{\frac{x}{1}}\left(1-\frac{x}{2}\right)e^{\frac{x}{2}}\ldots\left(1-\frac{x}{n}\right)e^{\frac{x}{n}}\right]e^{-x\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}$$

oder

$$P_n x \sim e^{-x\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)},$$

und weil

$$1+\tfrac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\lg n$$

für alle Werthe von n zwischen 1 und $\frac{1}{2}$ liegt

$$P_n x \sim \frac{1}{n^x}.$$

Wenn daher x zur rechten von y liegt, d. h., wenn der reelle Theil von $x-y$ positiv ist, so ist

$$\frac{1}{x-y} = \Sigma_0^\infty \frac{P_\nu x}{(\nu+1)P_{\nu+1}y}.$$

Es ist klar, dass jede ganze Function n^{ten} Grades gx in eine Reihe von der Form $\Sigma_0^n c_\nu P_\nu x$ entwickelt werden kann. Wenn ferner hx in der Umgebung des Unendlichkeitspunktes den Charakter einer rationalen Function hat, so lässt es sich zerlegen in eine ganze Function gx und eine Function fx, die für $x=\infty$ verschwindet. Es liege x zur rechten aller singulären Punkte von fx, von denen es durch die der Ordinatenaxe parallele Gerade C getrennt werde, und es durchlaufe y eine zur linken von C liegende geschlossene Curve, die alle singulären Punkte von fx im positiven Sinne umwinde. Dann ist

$$fx = \Sigma_0^{n-1} c_\nu P_\nu x + \frac{1}{2\pi i}\int \frac{fy\,dy}{x-y}\,\frac{P_n x}{P_n y}.$$

$$c_\nu = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{fy\,dy}{(\nu+1)P_{\nu+1}y}$$

und

$$fx = \Sigma_0^\infty c_\nu P_\nu x.$$

Mithin kann jede Function, die in der Umgebung des unendlich fernen Punktes den Charakter einer rationalen hat, in eine nach den ganzen Functionen $P_n x$ fortschreitende und zur rechten aller singulären Punkte convergirende Reihe entwickelt werden.

Zur Ermittlung der Nullentwicklungen $\Sigma c_\nu P_\nu x$ genügen die im §. 5 gegebenen Erörterungen.

---

§. 8.

Ich gehe jetzt zu einer andern Klasse von Functionensystemen über, welche bei der Kettenbruchentwicklung gegebener Functionen auftreten. Unter der Annahme, dass keine der Grössen $a_0, a_1, \ldots$ verschwindet oder für endliche Werthe des Index unendlich gross wird, und dass der Kettenbruch

$$R_0 x = \cfrac{1}{a_0 x - \cfrac{1}{a_1 x - \cfrac{1}{a_2 x - \ldots}}}$$

in einem gewissen Theile der Ebene convergent ist, bezeichne ich den n^{ten} Näherungswerth mit $\frac{P_n x}{Q_n x}$ und den Rest $\frac{R_n x}{Q_n x}$, so dass die Gleichungen bestehen:

$$R_0 x = \frac{P_n x}{Q_n x} + \frac{R_n x}{Q_n x}$$

$$P_{n+1} x + P_{n-1} x = a_n x P_n x \, (n = 1, 2, \ldots) \qquad P_0 = 0, \; P_1 = 1, \; \ldots$$

$$Q_{n+1} x + Q_{n-1} x = a_n x Q_n x \, (n = 0, 1, \ldots) \quad Q_{-1} = 0, \; Q_0 = 1, \; \ldots$$

$$R_{n+1} x + R_{n-1} x = a_n x R_n x \, (n = 0, 1, \ldots) \quad R_{-1} = 0, \; \ldots$$

Wenn daher gesetzt wird

$$S = \Sigma_0^n a_\nu Q_\nu x R_\nu y,$$

so ist

$$xS = \Sigma_0^n (a_\nu x Q_\nu x) R_\nu y = \Sigma_0^n (Q_{\nu+1} x + Q_{\nu-1} x) R_\nu y,$$

$$yS = \Sigma_0^n Q_\nu x (a_\nu y R_\nu y) = \Sigma_0^n Q_\nu x (R_{\nu+1} y + R_{\nu-1} y),$$

$$(y-x) S = 1 + Q_n x R_{n+1} y - Q_{n+1} x R_n y.$$

Auf diesem höchst einfachen Wege ergiebt sich folgendes System von Formeln:

$$\begin{aligned}
\Sigma a_\nu P_\nu x P_\nu y &= \frac{P_n x P_{n+1} y - P_{n+1} x P_n y}{y-x} \\
\Sigma a_\nu P_\nu x Q_\nu y &= \frac{1}{y-x} + \frac{P_n x Q_{n+1} y - P_{n+1} x Q_n y}{y-x} \\
\Sigma a_\nu P_\nu x R_\nu y &= \frac{R_0 y}{y-x} + \frac{P_n x R_{n+1} y - P_{n+1} x R_n y}{y-x} \\
\Sigma a_\nu Q_\nu x Q_\nu y &= \frac{Q_n x Q_{n+1} y - Q_{n+1} x Q_n y}{y-x} \\
\Sigma a_\nu Q_\nu x R_\nu y &= \frac{1}{y-x} + \frac{Q_n x R_{n+1} y - Q_{n+1} x R_n y}{y-x} \\
\Sigma a_\nu R_\nu x R_\nu y &= \frac{R_0 x - R_0 y}{y-x} + \frac{R_n x R_{n+1} y - R_{n+1} x R_n y}{y-x} \\
\Sigma a_\nu (P_\nu x)^2 &= P_n x P'_{n+1} x - P_{n+1} x P'_n x \\
\Sigma a_\nu P_\nu x Q_\nu x &= P_n x Q'_{n+1} x - P_{n+1} x Q'_n x \\
\Sigma a_\nu P_\nu x R_\nu x &= R'_0 x + P_n x R'_{n+1} x - P_{n+1} x R'_n x \\
\Sigma a_\nu (Q_\nu x)^2 &= Q_n x Q'_{n+1} x - Q_{n+1} x Q'_n x \\
\Sigma a_\nu Q_\nu x R_\nu x &= Q_n x R'_{n+1} x - Q_{n+1} x R'_n x \\
\Sigma a_\nu (R_\nu x)^2 &= -R'_0 x + R_n x R'_{n+1} x - R_{n+1} x R'_n x.
\end{aligned}$$

Dieselben Formeln gelten, wenn $P_n x$, $Q_n x$ und $R_n x$ sich auf den allgemeineren Kettenbruch

$$\cfrac{1}{a_0 x + b_0 - \cfrac{1}{a_1 x + b_1 - \cfrac{1}{a_2 x + b_2 - \cdots}}}$$

beziehen.

$P_n x$ und $Q_n x$ sind ganze Functionen $(n-1)^{\text{ten}}$ und n^{ten} Grades. Unter der Voraussetzung, dass sich $R_0 x$ in eine nach absteigenden Potenzen von x fortschreitende, in der Umgebung des Punktes $x = \infty$ convergente Reihe entwickeln lässt, deren Anfangsglied dann $\frac{1}{a_0 x}$ ist, kann $R_n x$ vermöge der Gleichung

$$R_n x = R_0 x Q_n x - P_n x$$

ebenfalls nach absteigenden Potenzen von x in eine Reihe entwickelt werden, welche mit der $-(n+1)^{\text{ten}}$ Potenz anfängt und für endliche Werthe des Index wenigstens denselben Convergenzbereich hat wie die Reihe für $R_0 x$.

§. 9.

Ich will nun untersuchen, welche Schlüsse sich aus den gefundenen Formeln ziehen lassen, wenn

$$R_0 x = \frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x^{-2})}{xF(\alpha, \beta, \gamma, x^{-2})}$$

gesetzt wird. In dieser Gleichung bezeichnet $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ wie gewöhnlich die hypergeometrische Function, welche innerhalb des mit dem Radius 1 um den Nullpunkt beschriebenen Kreises durch die Potenzreihe

$$1+\frac{\alpha\beta}{\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{x^2}{1.2}+\cdots$$

definirt ist. $R_0 x$ aber bedeutet hier und im Folgenden nur den Zweig der Function $\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x^{-2})}{xF(\alpha, \beta, \gamma, x^{-2})}$, welcher durch den Kettenbruch dargestellt wird, also in der ganzen Ebene mit Ausnahme der die Punkte $+1$ und -1 verbindenden Geraden, die ich die Strecke $C1$ nennen will, den Charakter einer rationalen Function hat und im Unendlichen verschwindet. Dagegen ist festzuhalten, dass auf der Linie $C1$ sowohl $R_0 x$ als auch $R_1 x$, $R_2 x$, ... überhaupt nicht definirt sind.

In diesem Beispiele ist $a_0 = 1$ und

$$a_{2n-1} = \frac{(\beta+1)\dots(\beta+n-1)(\gamma-\alpha+1)\dots(\gamma-\alpha+n-1)}{\alpha\dots(\alpha+n-1)(\gamma-\beta)\dots(\gamma-\beta+n-1)}\gamma(\gamma+2n-1),$$

$$a_{2n} = \frac{\alpha\dots(\alpha+n-1)(\gamma-\beta)\dots(\gamma-\beta+n-1)}{(\beta+1)\dots(\beta+n)(\gamma-\alpha+1)\dots(\gamma-\alpha+n)}\,\frac{\gamma+2n}{\gamma}.$$

Ich nehme an, dass α, γ, $\gamma-\beta$ nicht verschwinden, und dass α, β, γ, $\gamma-\alpha$, $\gamma-\beta$ keine negative ganze Zahlen sind. Nach §. 7 ist

$$(x+1)(x+2)\dots(x+n) \sim 1.2\dots n.n^x$$

und daher, weil $(n-1)^x \sim n^x$ ist,

$$a_{2n-1} \sim \frac{1.2\dots n-1.n^\beta.1.2\dots n-1.n^{\gamma-\alpha}}{1.2\dots n-1.n^\alpha.1.2\dots n-1.n^{\gamma-\beta}}\cdot n = n^{-2\alpha+2\beta+1}.$$

Auf diesem Wege ergiebt sich, wenn

$$N = n^{\alpha-\beta-\frac{1}{2}} \quad \text{oder} \quad = n^{-\alpha+\beta+\frac{1}{2}}$$

gesetzt wird, je nachdem n ungerade oder gerade ist, die Aequivalenz

$$a_n \sim N^{-2}.$$

Von den Wurzeln der Gleichung $1-2xz+z^2=0$, deren Product gleich 1 ist, werde die, welche >1 ist, mit $x+\sqrt{x^2-1} = \varphi x$ und die, welche <1 ist, mit $x-\sqrt{x^2-1} = (\varphi x)^{-1}$ bezeichnet. Aus den Untersuchungen des Herrn *Thomé* über die Convergenz des Kettenbruchs $R_0 x$ *) lässt sich, wenn noch

$$S_n x = \frac{R_n x}{R_0 x}$$

*) Dieses Journal, Band 66 pag. 322 und Band 67 pag. 299.

gesetzt wird, nachstehende Folgerung ziehen: Die Reihen

$$\begin{array}{llll} (1.) & \Sigma c_\nu P_\nu x & \text{und} & \Sigma c_\nu N(\varphi x)^\nu, \\ (2.) & \Sigma c_\nu Q_\nu x & \text{und} & \Sigma c_\nu N(\varphi x)^\nu, \\ (3.) & \Sigma c_\nu R_\nu x & \text{und} & \Sigma c_\nu N(\varphi x)^{-\nu}, \\ (4.) & \Sigma c_\nu S_\nu x & \text{und} & \Sigma c_\nu N(\varphi x)^{-\nu} \end{array}$$

haben, falls der Radius des Convergenzkreises der Reihe $\Sigma c_\nu x^\nu$ von 1 verschieden ist, dieselben Convergenzbereiche. Doch sind vom Gebiete der Grösse x in (3.) und (4.) die Strecke $C1$, auf der $R_n x$ unn $S_n x$ keine Bedeutung haben, und ausserdem in (1.) und (4.) die Punkte u, in denen $R_0 x$ ausserhalb $C1$ verschwindet, und in (2.) und (3.) die Punkte v, in denen es ausserhalb $C1$ unendlich wird, auszuschliessen.

Aus der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, der die hypergeometrische Function genügt, lässt sich schliessen, dass die Gleichung $F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 0$ keine mehrfachen Wurzeln hat. Daraus und aus der Formel

$$\beta\gamma F(\alpha, \beta, \gamma, x) - \beta(\gamma-\alpha) F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x) = \gamma(1-x)\frac{dF(\alpha, \beta, \gamma, x)}{dx}$$

folgt, dass die beiden Gleichungen

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 0 \quad \text{und} \quad F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x) = 0$$

keine Wurzel gemeinsam haben.

Ist u eine ausserhalb $C1$ gelegene Wurzel der Gleichung

$$F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x^{-2}) = 0$$

und v eine derselben Bedingung genügende Wurzel der Gleichung

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x^{-2}) = 0 \; ^{*)},$$

so folgt aus den Formeln

$$P_n x + R_n x = R_0 x Q_n x \quad \text{und} \quad \frac{P_n x}{R_0 x} + S_n x = Q_n x,$$

dass

$$P_n u = -R_n u \quad \text{und} \quad Q_n v = S_n v$$

ist. Daher sind die Reihen

$$\begin{array}{lll} \Sigma c_\nu P_\nu u & \text{und} & \Sigma c_\nu N(\varphi u)^{-\nu}, \\ \Sigma c_\nu Q_\nu v & \text{und} & \Sigma c_\nu N(\varphi v)^{-\nu} \end{array}$$

zugleich convergent und divergent.

Auf demselben Wege wie in §. 2 lässt sich zeigen, dass die Reihen

---

*) Herr *Thomé* hat (dieses Journal, Band 67, pag. 309) gezeigt, dass wenigstens für gewisse Werthe der Elemente α, β, γ solche Wurzeln existiren.

(1.) (2.) (3.) und (4.) für alle Punkte eines ganz innerhalb ihres Convergenzgebietes liegenden Bereichs denselben Grad der Convergenz haben, und daraus lassen sich dann dieselben Folgerungen ziehen wie in dem genannten §.

Wenn einer der Punkte v innerhalb des Convergenzbezirks der Reihe $\Sigma c_\nu R_\nu x$ liegt, so bleibt die Reihe $\Sigma c_\nu S_\nu x = \Sigma c_\nu \frac{R_\nu x}{R_0 x}$ in der Umgebung von v endlich und stetig, und daher kann im Punkte v die erstere Reihe, wenn sie nicht endlich bleibt, nur von der ersten Ordnung unendlich werden und convergirt auch für $x = v$ gegen den wahren Werth der durch sie dargestellten analytischen Function.

Die Ellipse mit den Brennpunkten $+1$ und -1 und den Halbaxen $\frac{1}{2}(\varrho+\varrho^{-1})$ und $\frac{1}{2}(\varrho-\varrho^{-1})$, auf welcher der absolute Betrag von φx den constanten Werth ϱ hat, werde mit $C\varrho$ bezeichnet. Ist dann ϱ der Radius des Convergenzkreises der Reihe $\Sigma c_\nu x^\nu$, so convergiren die Reihen (1.) und (2.), wenn $\varrho > 1$, innerhalb der Ellipse $C\varrho$, und die Reihen (3.) und (4.) wenn $\varrho < 1$, ausserhalb der Ellipse $C\varrho^{-1}$ und nicht weiter.

Aus den in §. 8 gefundenen Formeln ergeben sich nun die folgenden Gleichungen:

$$\Sigma a_\nu P_\nu x R_\nu y = \frac{R_0 y}{y-x} \qquad \varphi x < \varphi y$$

$$\Sigma a_\nu Q_\nu x R_\nu y = \frac{1}{y-x} \qquad \varphi x < \varphi y$$

$$\Sigma a_\nu R_\nu x R_\nu y = \frac{R_0 x - R_0 y}{y-x} \qquad \varphi x > 1,\ \varphi y > 1$$

$$\Sigma a_\nu \int_x^\infty (R_\nu x)^2\, dx = R_0 x \qquad \varphi x > 1$$

$$\Sigma a_\nu P_\nu u P_\nu x = 0 \qquad \varphi x < \varphi u \text{ und } x = u'$$

$$\Sigma a_\nu P_\nu u Q_\nu x = \frac{1}{x-u} \qquad \varphi x < \varphi u \text{ und } x = v$$

$$\Sigma a_\nu P_\nu u R_\nu x = \frac{R_0 x}{x-u} \qquad \varphi x > 1.$$

$$\Sigma a_\nu Q_\nu v P_\nu x = \frac{1}{v-x} \qquad \varphi x < \varphi v \text{ und } x = u$$

$$\Sigma a_\nu Q_\nu v Q_\nu x = 0 \qquad \varphi x < \varphi v \text{ und } x = v'$$

$$\Sigma a_\nu Q_\nu v R_\nu x = \frac{1}{x-v} \qquad \varphi x > 1$$

$$\Sigma a_\nu (P_\nu u)^2 = -R_0' u \qquad \Sigma a_\nu P_\nu u P_\nu u' = 0$$

$$\Sigma a_\nu (Q_\nu v)^2 = \left(\frac{1}{R_0 x (x-v)}\right)_{x=v} \qquad \Sigma a_\nu Q_\nu v Q_\nu v' = 0.$$

In diesen Formeln ist u' ein von u verschiedener Werth, für welchen $R_0 x$ verschwindet, und v' ein von v verschiedener, für welchen es unendlich wird.

In eine Reihe von der Form $\Sigma c_\nu R_\nu y$ kann eine Function nur auf eine einzige Weise entwickelt werden, wie sich aus Betrachtungen, die der Methode der unbestimmten Coefficienten zu Grunde liegen, leicht ergiebt. (Vergl. §. 3.) Wenn fy ausserhalb der Ellipse $C\varrho$ den Charakter einer rationalen Function hat, beständig endlich ist und im unendlichen verschwindet, und wenn y ausserhalb $C\varrho$ liegt, und x die Linie $C\varrho'$ $(\varrho < \varrho' < \varphi y)$ im positiven Sinne durchläuft, so ist

$$fy = \Sigma_0^n c_\nu R_\nu y + \frac{1}{2\pi i}\int \frac{Q_n x R_{n+1} y - Q_{n+1} x R_n y}{y-x} fx\, dx,$$

$$c_\nu = \frac{a_\nu}{2\pi i}\int Q_\nu x\, fx\, dx$$

und

$$fy = \Sigma_0^\infty c_\nu R_\nu y,$$

und diese Reihe convergirt sicher ausserhalb $C\varrho$ und auch nicht weiter, es sei denn, dass fy über $C\varrho$ hinaus den Charakter einer rationalen Function hat und auf dieser Linie nur in einem Punkte v unendlich von der ersten Ordnung wird. In diesem Falle kann der Convergenzbereich der die Function darstellenden Reihe nicht durch die Curve $C\varrho$ begrenzt sein, weil die Reihe

$$\frac{1}{y-v} = \Sigma a_\nu Q_\nu v R_\nu y$$

in der ganzen Ebene mit Ausnahme der Strecke $C1$ convergirt. (Vergl. §. 3.)

Werden über fx, x und y ähnliche Annahmen gemacht, wie im Anfange des §. 4, so ist

$$fx = \Sigma_0^n c_\nu Q_\nu x + \frac{1}{2\pi i}\int \frac{Q_n x R_{n+1} y - Q_{n+1} x R_n y}{y-x} fy\, dy,$$

$$c_\nu = \frac{a_\nu}{2\pi i}\int fy\, R_\nu y\, dy$$

und

$$fx = \Sigma_0^\infty c_\nu Q_\nu x,$$

und diese Reihe convergirt innerhalb $C\varrho$ und nicht weiter.

Wenn endlich fx in dem von den Ellipsen $C\varrho$ und $C\varrho_0$ $(\varrho > \varrho_0)$ begrenzten ringförmigen Stücke der Ebene den Charakter einer ganzen Function hat, und x in diesem Gebiete liegt, so bestimme man zwei Grössen ϱ' und

ϱ_0' so, dass

$$\varrho > \varrho' > \varphi x > \varrho_0' > \varrho_0$$

ist, und zwischen $C\varrho$ und $C\varrho'$ keiner der Punkte v liegt. Durchlaufen dann y und y_0 die Curven $C\varrho'$ und $C\varrho_0'$ im positiven Sinne, so ist

$$fx = \frac{1}{2\pi i}\int\frac{fy\,dy}{y-x} + \frac{1}{2\pi i}\int\frac{fy_0\,dy_0}{x-y_0},$$

mithin

$$fx = \Sigma_0^\infty c_\nu Q_\nu x + c_\nu' R_\nu x,$$

wenn gesetzt wird

$$c_\nu = \frac{a_\nu}{2\pi i}\int fy\,R_\nu y\,dy \quad \text{und} \quad c_\nu' = \frac{a_\nu}{2\pi i}\int fy_0 Q_\nu y_0\,dy_0.$$

Diese Reihe divergirt ausserhalb $C\varrho$ und convergirt nicht innerhalb $C\varrho_0$ ausser in dem oben erwähnten Falle.

§. 10.

Zu jeder ausserhalb der Strecke $C1$ liegenden Wurzel v der Gleichung $R_0 x = \infty$ *gehört* eine Nullentwicklung

$$\Sigma a_\nu Q_\nu v\, Q_\nu x = 0,$$

welche innerhalb der Ellipse, auf welcher v liegt, convergirt und nicht weiter. Die Anzahl der Punkte v, die ausserhalb einer bestimmten Ellipse $C\varrho$ $(\varrho > 1)$ liegen, ist eine endliche. Denn weil $R_0 x$ in der Umgebung des Unendlichkeitspunktes in eine nach absteigenden Potenzen von x fortschreitende convergente Reihe entwickelt werden kann, so liegen alle Wurzeln der Gleichung $R_0 x = \infty$, die der obigen Bedingung genügen, in einem endlichen Theile der Ebene, nämlich innerhalb des Convergenzkreises jener Reihe und ausserhalb $C\varrho$. Eine Function kann aber, wie Herr *Weierstrass* gezeigt hat *), in einem endlichen Bereiche, in dessen Innern *und an dessen Grenze* sie überall den Charakter einer rationalen hat, nur an einer endlichen Anzahl von Stellen unendlich werden. Sei nun

$$S \equiv \Sigma c_\nu Q_\nu x$$

irgend eine Nullentwicklung, die innerhalb der Ellipse $C\varrho$ convergirt, seien $v_1, v_2, \ldots v_n$ die nicht innerhalb $C\varrho$ liegenden Wurzeln der Gleichung $R_0 x = \infty$, $S_1, S_2, \ldots S_n$ die zu ihnen gehörigen Nullentwicklungen, $v_{n+1}, v_{n+2}, \ldots$

*) Dieses Journal Band 52, pag. 334.

die übrigen Wurzeln, die im Innern von $C\varrho$ liegen. Durch die Reihe $\Sigma c_\nu R_\nu x$, welche in der ganzen Ebene mit Aussnahme der Strecke $C1$ convergirt, wird eine Function Rx definirt, die ausserhalb $C1$ überall den Charakter einer rationalen hat und nur für die Werthe $x = v_1, v_2, \dots v_n$ und $v_{n+1}, v_{n+2}, \dots$ von der ersten Ordnung unendlich werden kann. Die Reihe $\Sigma c_\nu P_\nu x$ convergirt innerhalb der Ellipse $C\varrho$, und wenn x auf einen ausserhalb $C1$ und innerhalb $C\varrho$ gelegenen Theil der Ebene, in dem keiner der Punkte $v_{n+1}, v_{n+2}, \dots$ liegt, beschränkt wird, so folgt aus den Gleichungen

$$P_n x + R_n x = R_0 x Q_n x \quad \text{und} \quad \Sigma c_\nu Q_\nu x = 0,$$

dass nicht nur

$$(1.) \quad Rx = \Sigma c_\nu R_\nu x,$$

sondern auch

$$(2.) \quad Rx = -\Sigma c_\nu P_\nu x$$

ist. Weil aber $\Sigma c_\nu P_\nu x$ innerhalb $C\varrho$ eine analytische Function darstellt, und Rx als eine analytische Function definirt ist, so muss die Gleichung (2.), die in einem Theile des Innern von $C\varrho$ gültig ist, für alle Punkte dieses Bereiches bestehen. Daher muss die Function Rx erstens für $x = v_{n+1}, v_{n+2}, \dots$ endlich sein und zweitens überall innerhalb $C\varrho$ den Charakter einer rationalen haben. Sie hat also in der ganzen unendlichen Ebene den Charakter einer rationalen Function und muss mithin nach einem bekannten Satze der Functionentheorie eine rationale Function sein, die, weil sie nur in den Punkten $v_1, v_2, \dots v_n$ von der ersten Ordnung unendlich werden kann und im unendlichen verschwindet, nothwendig die Form hat

$$Rx = \frac{h_1}{x-v_1} + \frac{h_2}{x-v_2} + \cdots + \frac{h_n}{x-v_n}.$$

Da aber

$$\frac{1}{x-v} = \Sigma a_\nu Q_\nu v R_\nu x$$

ist, so ergiebt sich

$$Rx = \Sigma c_\nu R_\nu x = \Sigma a_\nu (h_1 Q_\nu v_1 + \cdots + h_n Q_\nu v_n) R_\nu x.$$

Daher muss

$$c_\nu = a_\nu (h_1 Q_\nu v_1 + \cdots + h_n Q_\nu v_n)$$

sein, und mithin stimmen die beiden Reihen

$$S \quad \text{und} \quad h_1 S_1 + \cdots + h_n S_n$$

in ihren Coefficienten überein. Es ist also bewiesen, dass das System $S_1, S_2 \dots$ vollständig ist.

Wären nun diese Nullentwicklungen nicht von einander unabhängig,

könnten also die Constanten $h_1, h_2, \dots$ so bestimmt werden, dass alle Coefficienten des Ausdrucks $h_1 S_1 + \dots + h_n S_n$ verschwänden, oder dass für alle Werthe von ν

$$h_1 Q_\nu v_1 + \dots + h_n Q_\nu v_n = 0$$

wäre, so müsste auch

$$\Sigma a_\nu (h_1 Q_\nu v_1 + \dots + h_n Q_\nu v_n) R_\nu x = \frac{h_1}{x - v_1} + \dots + \frac{h_n}{x - v_n}$$

identisch verschwinden, was, wenn nicht $h_1, h_2, \dots h_n$ sämmtlich Null sind, unmöglich ist. Dass $S_1, S_2, \dots S_n$ von einander unabhängig sind, folgt auch daraus, dass die Determinante

$$\Sigma \pm Q_0 v_1 Q_1 v_2 \dots Q_{n-1} v_n$$

von Null verschieden ist. Denn sie ist gleich dem Producte aus den Coefficienten der höchsten Potenzen der Functionen $Q_0 x, Q_1 x, \dots Q_{n-1} x$ und aus den Differenzen der Grössen $v_1, v_2, \dots v_n$.

Daher bilden $S_1, S_2, \dots$ ein vollständiges System von einander unabhängiger Nullentwicklungen, welches, da zur Darstellung einer beliebigen Nullentwicklung S nur die unter den Reihen $S_1, S_2, \dots$ zur Verwendung kommen, die in demselben Bereiche wie S oder weiter convergiren, ein Fundamentalsystem ist.

Sei S irgend eine Nullentwicklung, welche innerhalb der Ellipse $C\varrho$ convergirt, ausserhalb divergirt. Läge nun auf der Linie $C\varrho$ keiner der Punkte v, so würde, wenn $v_1, v_2, \dots v_n$ ausserhalb $C\varrho$ lägen, und $S_1, S_2, \dots S_n$ zu ihnen gehörten, S auf die Form $h_1 S_1 + \dots + h_n S_n$ gebracht werden können und mithin über $C\varrho$ hinaus convergiren. Daraus folgt: *Nur solche Ellipsen begrenzen Convergenzbereiche von Nullentwicklungen, welche durch einen der Punkte $v_1, v_2, \dots v_n$ hindurchgehen.*

Sei

$$S' \equiv \Sigma c_\nu Q_\nu x - c'_\nu R_\nu x$$

eine zwischen den Curven $C\varrho$ und $C\varrho_0$ $(\varrho > \varrho_0)$ convergirende Nullentwicklung. Setzt man

$$Rx = \Sigma_0^\infty c_\nu Q_\nu x,$$

so ist auch

$$Rx = \Sigma_0^\infty c'_\nu R_\nu x.$$

Da mithin diese Function wegen der ersten Gleichung innerhalb $C\varrho$, wegen der zweiten ausserhalb $C\varrho_0$ und daher wegen beider in der ganzen Ebene den Charakter einer rationalen hat, so muss sie eine rationale Function sein, die wegen der ersten Gleichung innerhalb $C\varrho$ stets endlich ist, wegen der

zweiten nur in den nicht innerhalb $C\varrho$ liegenden Punkten $v_1, v_2, \ldots v_n$ von der ersten Ordnung unendlich werden kann und für $x=\infty$ verschwindet. Also ist

$$Rx = \frac{h'_1}{x-v_1}+\cdots+\frac{h'_n}{x-v_n}$$

und

$$\Sigma c'_\nu R_\nu x = \Sigma a_\nu (h'_1 Q_\nu v_1+\cdots+h'_n Q_\nu v_n) R_\nu x,$$

also

$$c'_\nu = a_\nu (h'_1 Q_\nu v_1+\cdots+h'_n Q_\nu v_n).$$

Ist ferner $R^0_\nu v$ das constante Glied in der Entwicklung von $R_\nu x$ nach Potenzen von $x-v$, so ist

$$\frac{1}{x-v} = \Sigma a_\nu R^0_\nu v\, Q_\nu x,$$

und diese Reihe convergirt im Innern der Ellipse, auf welcher v liegt. Daher ist

$$\Sigma c_\nu Q_\nu x = \Sigma a_\nu (h'_1 R^0_\nu v_1+\cdots+h'_n R^0_\nu v_n) Q_\nu x$$

und mithin

$$c_\nu = a_\nu (h'_1 R^0_\nu v_1+\cdots+h'_n R^0_\nu v_n + h_1 Q_\nu v_1+\cdots+h_n Q_\nu v_n).$$

Setzt man also

$$S_\lambda \equiv \Sigma a_\nu Q_\nu v_\lambda Q_\nu x \quad \text{und} \quad S'_\lambda = \Sigma a_\nu (R^0_\nu v_\lambda Q_\nu x - Q_\nu v_\lambda R_\nu x),$$

so ist klar, dass das System der Nullentwicklungen $S_1, S_2, \ldots, S'_1, S'_2, \ldots$ vollständig ist.

Werden aber die Constanten $h_1, \ldots h_n, h'_1, \ldots h'_n$ so bestimmt, dass alle Coefficienten des Ausdrucks

$$h_1 S_1+\cdots+h_n S_n + h'_1 S'_1+\cdots+h'_n S'_n$$

verschwinden, so ist der Coefficient von $-a_\nu R_\nu x$ gleich $h'_1 Q_\nu v_1+\cdots+h'_n Q_\nu v_n=0$, und mithin ist $h'_1=0, \ldots h'_n=0$; daher sind alle Coefficienten der Reihe $h_1 S_1+\cdots+h_n S_n$ gleich Null, und deshalb ist $h_1=0, \ldots h_n=0$. Daher bilden $S_1, S_2, \ldots S'_1, S'_2, \ldots$ ein vollständiges System von einander unabhängiger Nullentwicklungen und zwar aus demselben Grunde wie oben ein Fundamentalsystem. Ferner gilt der Satz: *Die Convergenzbereiche von Nullentwicklungen werden begrenzt entweder von einer Ellipse, die durch einen der Punkte v geht, oder von einer solchen Ellipse und der Strecke* $C1$.

Auf die Theorie der Reihen

$$\Sigma c_\nu P_\nu x \quad \text{und} \quad \Sigma c_\nu S_\nu x,$$

welche nach denselben Methoden behandelt werden kann, wie die der Reihen

$$\Sigma c_\nu Q_\nu x \quad \text{und} \quad \Sigma c_\nu R_\nu x,$$

gehe ich hier nicht ein.

§. 11.

Nachdem ich die Theorie der Nullentwicklungen in den beiden durchgeführten Beispielen auf besonderen Wegen abgeleitet habe, will ich zum Schluss noch eine Methode erwähnen, die in beiden Fällen zum Ziele führt. Zu dem Zwecke stelle ich zunächst die Voraussetzungen, die ihrer Anwendung zu Grunde liegen, und die in den beiden behandelten Beispielen erfüllt sind, kurz zusammen.

1) Die Punkte, in welchen der absolute Betrag einer gewissen Function φx einen constanten Werth ϱ hat, mögen eine geschlossene Curve $C\varrho$ bilden, innerhalb deren die Function beständig kleiner, und ausserhalb deren sie überall grösser als ϱ sei. Ist dann $\varrho' > \varrho$, so wird die Linie $C\varrho$ von $C\varrho'$ vollständig eingeschlossen; denn alle Punkte, in denen $\varphi x \leqq \varrho$ ist, genügen auch der Bedingung $\varphi x < \varrho'$. Liegt φx für alle Werthe von x zwischen ϱ_1 und ϱ_2 ($\varrho_1 < \varrho_2$), und erfüllt die Gesammtheit der Curven $C\varrho$ die ganze Ebene, so ist der *Minimalbereich* $C\varrho_1$ keine Fläche, sondern aus Linien und Punkten zusammengesetzt, während $C\varrho_2$ keinen Punkt im endlichen hat. Die Reihen

$$(1.)\quad \Sigma c_\nu F_\nu x \quad \text{und} \quad \Sigma c_\nu (\varphi x)^\nu,$$

$$(2.)\quad \Sigma c_\nu G_\nu x \quad \text{und} \quad \Sigma c_\nu (\varphi x)^{-\nu}$$

mögen dieselben Convergenzbereiche haben. Ist daher ϱ der Radius des Convergenzkreises der Reihe $\Sigma c_\nu z^\nu$, so convergirt (1.), falls ϱ zwischen ϱ_1 und ϱ_2 liegt, innerhalb $C\varrho$ und (2.), falls ϱ^{-1} zwischen denselben Grenzen liegt, ausserhalb $C\varrho^{-1}$. Im Allgemeinen bilden die Linien $C\varrho$ ein System confocaler Curven, das durch die Gleichung $z = \varphi x$ in ein System um den Nullpunkt der z-Ebene beschriebener concentrischer Kreise abgebildet wird.

2) Für endliche Werthe des Index mögen die Functionen $F_0 x, F_1 x, \dots$ im endlichen überall den Charakter ganzer Functionen haben, während ihr Verhalten im unendlichen unbestimmt gelassen wird, und $G_0 x, G_1 x, \dots$ ausserhalb des Minimalbereichs $C\varrho_1$ den Charakter rationaler Functionen besitzen und für $x = \infty$ verschwinden, während über ihre Beschaffenheit in $C\varrho_1$ nichts festgesetzt wird. Seien $v_1, v_2, \dots$ die Punkte, für welche irgend eine der Functionen $G_0 x, G_1 x, \dots$ ausserhalb $C\varrho_1$ unendlich wird, so geordnet, dass $\varphi v_1 \geqq \varphi v_2 \geqq \dots$ ist. Ich nehme an, dass ausserhalb jedes endlichen Bereiches $C\varrho$ nur eine endliche Anzahl der Punkte v liegt. Die Functionen $G_0 x, G_1 x, \dots$ können in einem bestimmten Punkte v von verschiedener Ordnung unendlich

werden und zwar für endliche Werthe des Index nur von einer endlichen. Ich setze voraus, dass es für die Grössen dieser Ordnungen ein Maximum k giebt, das ich die Ordnungszahl des Punktes v nennen will.

Aus den Annahmen über die Art der Convergenz der Reihen (1.) und (2.) und über die Beschaffenheit der Functionen $F_n x$ und $G_n x$ folgt auf dem in §. 2 eingeschlagenen Wege, dass diese Reihen für alle Punkte eines innerhalb ihres Convergenzbezirks liegenden Bereichs denselben Grad der Convergenz besitzen.

3) Ist x von v verschieden und $\varphi x < \varphi y$, so sei

$$(3.)\qquad \frac{1}{y-x} = \Sigma F_\nu x\, G_\nu y.$$

Ist aber k die Ordnungszahl von v, $\varkappa \leqq k$ und

$$F_\nu^\varkappa v = \frac{1}{1.2\ldots\varkappa}(D_x^\varkappa F_\nu x)_{x=v},$$

so sei die Reihe

$$(4.)\qquad \frac{1}{(y-v)^\varkappa} = \Sigma F_\nu^{\varkappa-1} v\, G_\nu y$$

in der ganzen Ebene mit Ausnahme des Minimalbereichs oder auch mit Einschluss desselben convergent.

4) Nach den Functionen $G_0 x$, $G_1 x$, ... lasse sich eine gegebene Function nur auf eine einzige Weise entwickeln.

Diese Annahmen genügen, um die Theorie der Nullentwicklungen von der Form der Reihe (1.) vollständig begründen zu können.

Die Curve $C\varrho$ gehe durch den Punkt v, dessen Ordnungszahl k sei, x liege im Innern von $C\varrho$, ϱ' werde so gewählt, dass $\varrho > \varrho' > \varphi x$ ist, y durchlaufe einen um v beschriebenen Kreis, der ganz ausserhalb $C\varrho'$ liegt und keinen von v verschiedenen Punkt v' einschliesst. Wird dann die Gleichung (3.) mit $(y-v)^{\varkappa-1}$ multiplicirt und nach y integrirt, so ergiebt sich

$$\Sigma G_{\nu\varkappa} v\, F_\nu x = 0,$$

wenn $G_{\nu\varkappa} v$ der Coefficient von $(y-v)^{-\varkappa}$ in der Entwicklung von $G_\nu y$ nach Potenzen von $y-v$ ist. Diese Reihe convergirt sicher, wenn x innerhalb $C\varrho$ liegt. Ich will sie, wenn $v = v_\lambda$ ist, mit $S_{\lambda\varkappa}$ bezeichnen und die $\varkappa^{\text{te}}$ zu v_λ gehörige Nullentwicklung nennen.

Sei $C\varrho_0$ eine Linie, welche die Punkte v sämmtlich einschliesst, und seien $v_1, v_2, \ldots v_n$ diejenigen unter diesen Punkten, welche nicht innerhalb einer bestimmten Curve $C\varrho$ $(\varrho < \varrho_0)$ liegen; sei $\varrho' < \varrho$ und so gewählt, dass weder auf $C\varrho'$, noch zwischen $C\varrho$ und $C\varrho'$ ein Punkt v liege. Die Variabeln

x_0 und x mögen im positiven Sinne die Linien $C\varrho_0$ und $C\varrho'$, $x_1, x_2, \dots x_n$ aber Kreise durchlaufen, welche um $v_1, v_2, \dots v_n$ mit so kleinen Radien beschrieben sind, dass jeder nur einen einzigen der Punkte v einschliesst. Dann folgt aus (3.)

$$G_\mu y = \Sigma\left(\frac{1}{2\pi i}\int F_\nu x_0 G_\mu x_0 dx_0\right) G_\nu y.$$

Da sich aber nach den Functionen $G_0 y, G_1 y, \dots$ eine Function nur auf eine einzige Weise entwickeln lässt, so ergiebt sich daraus die Gleichung

$$\frac{1}{2\pi i}\int F_\nu x_0 G_\mu x_0 dx_0 = \varepsilon,$$

in der ε gleich 0 oder 1 ist, je nachdem ν von μ verschieden ist, oder nicht. Nun ist aber

$$\int F_\nu x_0 G_\mu x_0 dx_0 = \int F_\nu x G_\mu x dx + \int F_\nu x_1 G_\mu x_1 dx_1 + \dots + \int F_\nu x_n G_\mu x_n dx_n.$$

Sind also $k_1, k_2, \dots k_n$ die Ordnungszahlen von $v_1, v_2, \dots v_n$, so besteht die Gleichung

$$-\frac{1}{2\pi i}\int F_\nu x G_\mu x dx = F_\nu^0 v_1 G_{\mu 1} v_1 + F_\nu^1 v_1 G_{\mu 2} v_1 + \dots + F_\nu^{k_1-1} v_1 G_{\mu k_1} v_1 + \dots$$
$$+ F_\nu^0 v_n G_{\mu 1} v_n + \dots + F_\nu^{k_n-1} v_n G_{\mu k_n} v_n - \varepsilon = \Sigma' F_\nu^{\varkappa-1} v_\lambda G_{\mu\varkappa} v_\lambda - \varepsilon.$$

Ist nun $S \equiv \Sigma c_\nu F_\nu x$ irgend eine Nullentwicklung, die innerhalb $C\varrho$ convergirt, so erhält man durch Multiplication mit $G_\mu x$ und Integration über $C\varrho'$

$$\Sigma c_\nu \Sigma' F_\nu^{\varkappa-1} v_\lambda G_{\mu\varkappa} v_\lambda - c_\mu = 0.$$

Da die Reihe $\Sigma F_\nu^{\varkappa-1} v G_\nu x$ in der ganzen Ebene ausserhalb des Minimalbereichs $C\varrho_1$ convergirt, so ist, wenn $\varrho_1 < \varrho_1' < \varrho' < \varrho$ gewählt wird, $\Sigma F_\nu^{\varkappa-1} v \varrho_1'^{-\nu}$ convergent und daher $F_\nu^{\varkappa-1} v < g\varrho_1'^{\nu}$; und da $C\varrho$ den Convergenzbereich der Reihe $\Sigma c_\nu F_\nu x$ begrenzt, so ist $\Sigma c_\nu \varrho'^{\nu}$ convergent und daher $c_\nu < h\varrho'^{-\nu}$. Mithin ist die Reihe $\Sigma c_\nu F_\nu^{\varkappa-1} v < gh \Sigma \varrho_1'^{\nu} . \varrho'^{-\nu}$ und deshalb convergent. Setzt man also

$$\Sigma c_\nu F_\nu^{\varkappa-1} v_\lambda = h_{\lambda\varkappa},$$

so hat $h_{\lambda\varkappa}$ einen ganz bestimmten endlichen Werth, und es ist

$$c_\mu = \Sigma' h_{\lambda\varkappa} G_{\mu\varkappa} v_\lambda.$$

Daher stimmen die Coefficienten der Reihe S mit denen des Ausdrucks

$$\Sigma' h_{\lambda\varkappa} S_{\lambda\varkappa}$$

überein, und das System der zu den Punkten v gehörenden Nullentwicklungen ist vollständig.

Aus der in der ganzen Ebene mit Ausnahme des Minimalbereichs convergirenden Reihe (4.) ergeben sich durch Coefficientenvergleichung oder ge-

schlossene Integration die Gleichungen

$$\Sigma F_\nu^{\varkappa-1} v\, G_{\nu\varkappa} v = 1$$

$$\Sigma F_\nu^{\varkappa-1} v\, G_{\nu\lambda} v = 0 \qquad (\lambda \gtrless \varkappa)$$

$$\Sigma F_\nu^{\varkappa-1} v\, G_{\nu\lambda} v' = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots k'.)$$

Werden also die Constanten $h_{\lambda\varkappa}$ so bestimmt, dass alle Coefficienten der Reihe

$$\Sigma' h_{\lambda\varkappa} S_{\lambda\varkappa}$$

verschwinden, so muss für alle Werthe von μ

$$\Sigma' h_{\lambda\varkappa} G_{\mu\varkappa} v_\lambda = 0$$

sein. Multiplicirt man diese Gleichung mit $F_\mu^{\varkappa-1} v_\lambda$ und summirt man nach μ, so erhält man

$$h_{\lambda\varkappa} = 0.$$

Mithin bilden die Reihen $S_{\lambda\varkappa}$ ein vollständiges System von einander unabhängiger Nullentwicklungen und zwar ein Fundamentalsystem.

Geht $C\varrho$ durch v_λ, so ist oben gezeigt, dass $S_{\lambda\varkappa}$ innerhalb dieser Linie sicher convergirt. Wenn nun die Reihe noch über $C\varrho$ hinaus convergirte, so liesse sie sich linear durch die Nullentwicklungen ausdrücken, welche zu den nicht innerhalb $C\varrho$ liegenden Punkten v gehören. Da sich v_λ unter diesen nicht befindet, so wäre die Reihe $S_{\lambda\varkappa}$ von einer Anzahl von ihr verschiedener Nullentwicklungen des aufgestellten Fundamentalsystems abhängig, was nicht der Fall ist. Daher muss $S_{\lambda\varkappa}$ ausserhalb $C\varrho$ divergiren. Da nun der Convergenzbezirk jeder beliebigen Nullentwicklung mit dem irgend einer Reihe eines Fundamentalsystems übereinstimmen muss, so gilt der Satz: *Nur solche Curven $C\varrho$ begrenzen Convergenzbereiche von Nullentwicklungen, welche durch einen der Punkte v hindurchgehen.*

Sei ferner $\Sigma c_\nu F_\nu x - c'_\nu G_\nu x$ irgend eine Nullentwicklung, welche zwischen den Curven $C\varrho$ und $C\varrho_0$ $(\varrho > \varrho_0)$ convergirt, seien $v_1, v_2, \ldots v_n$ die nicht innerhalb $C\varrho$ gelegenen Punkte v, und sei $\varrho' < \varrho$, $> \varrho_0$ und so gewählt, dass zwischen $C\varrho$ und $C\varrho'$ kein Punkt v liegt. Mit $F_\nu^\varkappa v$ und $G_\nu^\varkappa v$ mögen die Coefficienten von $(x-v)^\varkappa$ in der Entwicklung von $F_\nu x$ und $G_\nu x$, mit $G_{\nu\varkappa} v$ der Coefficient von $(x-v)^{-\varkappa}$ in der von $G_\nu x$ nach Potenzen von $x-v$ bezeichnet werden. Multiplicirt man dann die Gleichung

$$\Sigma c_\nu F_\nu x - c'_\nu G_\nu x = 0$$

mit $G_\mu x$ und integrirt über $C\varrho'$, so erhält man

$$c_\mu - \Sigma c_\nu \Sigma' F_\nu^{\varkappa-1} v_\lambda G_{\mu\varkappa} v_\lambda - \Sigma c'_\nu \Sigma' G_\nu^{\varkappa-1} v_\lambda G_{\mu\varkappa} v_\lambda - \Sigma c'_\nu \Sigma' G_{\nu\varkappa} v_\lambda G_\mu^{\varkappa-1} v_\lambda = 0.$$

Setzt man also

$$\Sigma c_\nu F_\nu^{\varkappa-1} v_\lambda + c'_\nu G_\nu^{\varkappa-1} v_\lambda = h_{\lambda\varkappa} \quad \text{und} \quad \Sigma c'_\nu G_{\nu\varkappa} v_\lambda = h'_{\lambda\varkappa},$$

so ist

$$c_\mu = \Sigma' h_{\lambda\varkappa} G_{\mu\varkappa} v_\lambda + h'_{\lambda\varkappa} G_\mu^{\varkappa-1} v_\lambda$$

und

$$\Sigma c_\nu F_\nu x = \Sigma' h'_{\lambda\varkappa} G_\nu^{\varkappa-1} v_\lambda F_\nu x = \Sigma' \frac{h'_{\lambda\varkappa}}{(x-v_\lambda)^\varkappa}.$$

Da aber nach den Functionen $G_0 x$, $G_1 x$, ... eine Function nur auf eine einzige Weise entwickelt werden kann, so folgt aus

$$\Sigma c'_\nu G_\nu x = \Sigma' \frac{h'_{\lambda\varkappa}}{(x-v_\lambda)^\varkappa} = \Sigma' h'_{\lambda\varkappa} \Sigma F_\nu^{\varkappa-1} v_\lambda G_\nu x$$

die Gleichung

$$c'_\nu = \Sigma' h'_{\lambda\varkappa} F_\nu^{\varkappa-1} v_\lambda.$$

Setzt man also

$$S_{\lambda\varkappa} \equiv \Sigma G_{\nu\varkappa} v_\lambda F_\nu x \quad \text{und} \quad S'_{\lambda\varkappa} \equiv \Sigma G_\nu^{\varkappa-1} v_\lambda F_\nu x - F_\nu^{\varkappa-1} v_\lambda G_\nu x,$$

so bilden diese Reihen ein vollständiges System von einander unabhängiger Nullentwicklungen und zwar ein Fundamentalsystem. Zugleich ergiebt sich, dass $C\varrho$ durch einen der Punkte v hindurchgehen, und $C\varrho_0$, wenn nicht $c'_0, c'_1, \ldots$ sämmtlich verschwinden, der Minimalbereich sein muss.

Berlin, im October 1870.

Ueber die pendelnde Bewegung einer Kugel unter dem Einflusse der inneren Reibung des umgebenden Mediums.

(Von Herrn *Oskar Emil Meyer* in Breslau.)

---

*Bessel**) und noch vor ihm *Dubuat***) haben darauf aufmerksam gemacht und durch angestellte Versuche bewiesen, dass es zur Reduction einer in der Luft beobachteten Schwingungszeit eines Pendels auf den luftleeren Raum nicht genügt, den scheinbaren Gewichtsverlust, den das Pendel in der Luft erleidet, in Rechnung zu ziehen. Ausser dieser, der sogenannten aërostatischen Correction, welche zuerst *Bouguer* angewandt hat***), ist noch eine zweite, die aërodynamische Correction, anzubringen. Dieselbe bezieht sich auf die scheinbare Vermehrung, welche das Trägheitsmoment eines Pendels durch die Trägheit der mit in Bewegung gesetzten Luft erleidet. Zur vollständigen Reduction auf den luftleeren Raum hat man also das Quadrat der beobachteten Schwingungsdauer mit dem Factor

$$\frac{1-\frac{M'}{M}}{1+k\frac{M'}{M}}$$

zu multipliciren, in welchem M die Masse des Pendels, M' die der verdrängten Luft, k eine von der Form des Pendels abhängige Zahl bedeutet.

Während *Bessel* sich darauf beschränkte, den Werth dieser Zahl k experimentell festzustellen, suchte *Poisson* †) ihn auf theoretischem Wege zu bestimmen. Er fand durch Integration der Differentialgleichungen, von welchen die Bewegung flüssiger Körper abhängt, den numerischen Werth

$$k = \tfrac{1}{2}$$

---

*) Astron. Nachr. Bd. 6. Nr. 128. 1827. Unters. über d. Länge des einfachen Secundenpendels. Abh. d. Berl. Akad. v. 1826. Berlin 1829 S. 32.

**) Principes d'hydraulique. 3ième partie, section 2, chap. 1. 2te Aufl. 1786; 3te Aufl. 1816.

***) *Bouguer* et *Condamine*, la figure de la terre. Paris 1749. 7. sect. Nr. 18 pag. 339—340.

†) Mém. de l'Acad. des sc. Tome 11. 1832. p. 521.

für den Fall einer pendelnden Kugel, während *Bessels* Messungen für eine Kugel von 2 Zoll Durchmesser

$$k = 0{,}95$$

ergaben*). Die Ursache dieser beträchtlichen Differenz zwischen der Rechnung und der Erfahrung hat *Stokes* **) klar gelegt, indem er zeigte, dass die von *Poisson* berechnete Zahl durch Vernachlässigung der inneren Reibung der Luft zu klein ausgefallen ist. Berücksichtigt man diese Reibung, so erhält die *Bessel*sche Zahl den theoretischen Werth

$$k = \tfrac{1}{2} + \frac{9}{4\nu a},$$

worin

$$\nu^2 = \frac{\pi\varrho}{2\eta T}$$

ist, und a den Radius der Pendelkugel, ϱ die Dichtigkeit der Luft, η den Coefficienten ihrer inneren Reibung, endlich T die Dauer einer Schwingung bedeutet. Setzt man in die Formel die durch andre Beobachtungen bekannten Werthe ein, so ergiebt sich eine befriedigende Uebereinstimmung derselben mit dem von *Bessel* gefundenen Werthe.

Die von *Stokes* entwickelte Theorie des Experimentes ist weit genug durchgeführt, um dem praktischen Bedürfniss einer Vergleichung mit der Erfahrung nach mehr als einer Richtung hin zu genügen. Indess ist die elegant und geschickt angelegte Rechnung nicht bis zu dem Punkte vollendet, dass sie in mathematischer Hinsicht allseitig befriedigte. Besonders kann man zweifeln, ob die entwickelten Formeln wirklich die *einzig mögliche* Auflösung des Problems enthalten, und dies um so mehr, als sie nicht die *vollständige* Auflösung bilden. Die Berechtigung eines solchen Zweifels leuchtet ein, wenn man erwägt, dass ein aus verschiedenen Theilen zusammengesetztes Pendel verschieden rascher Schwingungen fähig ist, je nach der Art der Erregung. Es könnte also möglich scheinen, dass das aus der Kugel und der mitschwingenden Luft zusammengesetzte System ebenso in verschieden rascher Folge der Oscillationen schwingen könne, wie etwa die Zunge und die Luft in einer Zungenpfeife. Wäre das möglich, so wäre *Bessels* Coefficient k eine mehrdeutige Grösse und die Resultate sorgfältiger Pendelmessungen von zweifelhaftem Werthe.

---

*) Unters. ü. d. Länge d. einf. Sec.-pendels. Abh. d. Berl. Akad. 1826. S. 54. — Versuche über die Kraft der Erde. Abh. d. Berl. Akad. 1830. S. 95.

**) Transactions of the Cambridge philosophical society. Vol. 9. part. 2. 1851 p. 8.

Dieses Bedenken schien mir wichtig genug, um mich zur Vollendung der *Stokes*schen Theorie und zu dem Versuche zu bewegen, die Schwierigkeiten der mühsamen Rechnung zu überwinden. Ich habe in derselben, wie auch *Stokes* gethan hat, die Voraussetzung unendlich kleiner Schwingungen eintreten lassen. Ebenfalls habe ich eine andre von *Stokes* gemachte Annahme beibehalten, nämlich die, dass das die Pendelkugel umgebende Medium incompressibel sei. Trotzdem bleibt die Theorie auf Versuche, welche in der Luft angestellt sind, angenähert anwendbar, weil die Bewegung der Art ist, dass keine merklichen Verdichtungen und Verdünnungen vor und hinter der Pendelkugel eintreten, wenigstens wenn das Pendel langsam genug schwingt.

Neben der Wichtigkeit des Resultates, dass wirklich nur ein *einziger* Werth der Dauer einer Schwingung möglich ist, bietet die Rechnung noch besondres Interesse durch einige Eigenthümlichkeiten. Man gelangt zu einer linearen partiellen Differentialgleichung vierter Ordnung, von der schon *Stokes* bewiesen hat, dass ihre Auflösung aus denen zweier Gleichungen zweiter Ordnung zusammengesetzt ist. Dieses Verhalten der Gleichung macht zur Bestimmung der Constanten, mit denen ihre particularen Lösungen multiplicirt sind, ein Verfahren nöthig, welches von dem gebräuchlichen etwas abweicht. Diese particularen Auflösungen hängen von den Wurzeln transcendenter Gleichungen ab, von denen eine die Eigenschaft hat, dass sie neben unendlich vielen Wurzeln von reellem Werthe zwei von complex imaginärer Form besitzt. Es zeigt sich also auch hier dieselbe Erscheinung, welcher ich früher bei einer verwandten Aufgabe *) begegnete, welche auch *C. J. H. Lampe* bei einem ähnlichen Probleme **) bestätigt fand, und welche endlich auch bei einem dritten von *Helmholtz* behandelten Probleme ***) nachgewiesen werden kann.

1.

Die Bewegungs-Gleichungen für das Innere einer flüssigen Masse, welche der Reibung unterworfen ist, sind von *Navier* †), *Poisson* ††), *Stokes* †††),

---

*) Dieses Journal Bd. 59. 1861. S. 229; Bd. 62. 1863. S. 201.

**) Ueber die Bewegung einer Kugel, welche in einer reibenden Flüssigkeit um einen senkrechten Durchmesser als feststehende Axe rotirend schwingt. Programm des städtischen Gymnasiums zu Danzig. 1866.

***) Sitzungsberichte der Wiener Akademie. Band 40. 1860. S. 607.

†) Mémoires de l'Acad. des sc. de Paris. Tome 6. 1823. p. 389.

††) Journal de l'école polytechnique. Tome 13; cahier 20. 1831. p. 139.

†††) Cambridge philosophical transactions. Vol. 8. 1849. p. 287.

Cauchy *), *Barré de St. Venant* **) und *Stefan* ***) aufgestellt worden. Die Gleichungen, welche für luftförmige Medien eine — vielleicht nur scheinbare †) — Abweichung zeigen, ergeben sich für incompressible Körper, also für tropfbare Flüssigkeiten und weiche Massen aus allen Herleitungen übereinstimmend:

$$(1.)\quad \begin{cases} \varrho\dfrac{du}{dt} = \eta\left\{\dfrac{d^2u}{dx^2}+\dfrac{d^2u}{dy^2}+\dfrac{d^2u}{dz^2}\right\}-\dfrac{d\mathfrak{p}}{dx}+\varrho X, \\ \varrho\dfrac{dv}{dt} = \eta\left\{\dfrac{d^2v}{dx^2}+\dfrac{d^2v}{dy^2}+\dfrac{d^2v}{dz^2}\right\}-\dfrac{d\mathfrak{p}}{dy}+\varrho Y, \\ \varrho\dfrac{dw}{dt} = \eta\left\{\dfrac{d^2w}{dx^2}+\dfrac{d^2w}{dy^2}+\dfrac{d^2w}{dz^2}\right\}-\dfrac{d\mathfrak{p}}{dz}+\varrho Z, \\ \quad 0 = \dfrac{du}{dx}+\dfrac{dv}{dy}+\dfrac{dw}{dz}. \end{cases}$$

In diesen Gleichungen bezeichnen u, v, w die 3 Componenten der Geschwindigkeit eines Flüssigkeitstheilchens, zerlegt nach den Richtungen der drei rechtwinkligen Coordinaten x, y, z, ferner t die Zeit, $\mathfrak{p}$ den Druck in der Flüssigkeit, X, Y, Z die von aussen auf die Flüssigkeit einwirkenden Kräfte, ϱ ihre Dichtigkeit und η ihren Reibungscoefficienten.

Ueber die Lage des Coordinatensystems setze ich fest, dass sein Anfangspunkt zusammenfalle mit der Ruhelage des Mittelpunkts der pendelnden Kugel; ferner sei die Richtung der Coordinate x und der Geschwindigkeit u dieselbe wie diejenige der Bewegung der Kugel. Von dieser letzteren setze ich, wie bereits in der Einleitung erwähnt worden ist, voraus, dass die Schwingungen der Kugel unendlich klein seien; dann darf ich den Bogen, auf dem ihr Mittelpunkt sich bewegt, als eine gerade Linie ansehen.

Durch diese Annahme unendlich kleiner Bewegungen der Kugel wird von selbst die andere gerechtfertigt, dass auch die durch die Schwingungen der Kugel erregten Bewegungen der Flüssigkeit unendlich klein seien. Ich habe also die Glieder, welche in Bezug auf die Geschwindigkeits-Componenten

---

*) Exercices de mathématiques. 3ième Année. 1828. p. 183. *Cauchy* behauptet die Gültigkeit seiner Gleichungen freilich nur für unelastische feste Körper, also für weiche Massen. Doch da eine weiche Masse und eine zähe Flüssigkeit nur quantitativ sich unterscheiden, so gelten die Gleichungen auch für zähe, d. h. für reibende Flüssigkeiten.

**) Comptes rendus. T. 17. 1843. p. 1240.

***) Wiener Sitzungsberichte. 46. Bd. 1862. Abth. 2. S. 8.

†) Vergl. *Stokes*. Cambr. Tr. V. 8. p. 313. 18.

zweiter Ordnung sind, fortzulassen; unter

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}.$$

ist also der partielle Differentialquotient nach der Zeit $\frac{\partial u}{\partial t}$ zu verstehen, ebenso $\frac{dv}{dt}$ und $\frac{dw}{dt}$.

Statt der rechtwinkligen Coordinaten führe ich in jeder zur Richtung der Bewegung der Kugel, also zur Richtung der x senkrechten Ebene, Polarcoordinaten ein; ich setze also

$$y = \varpi\cos\varphi \qquad z = \varpi\sin\varphi.$$

Ferner führe ich ein

$$v = q\cos\varphi - \varpi\sigma\sin\varphi \qquad w = q\sin\varphi + \varpi\sigma\cos\varphi$$

und

$$Y = \mathfrak{Q}\cos\varphi - S\sin\varphi \qquad Z = \mathfrak{Q}\sin\varphi + S\cos\varphi,$$

so dass also q die nach der Richtung des Radiusvector ϖ gerichtete Componente der Geschwindigkeit, σ die Winkelgeschwindigkeit der Drehung um die Axe der x, endlich $\mathfrak{Q}$ und S die entsprechenden Componenten der Kräfte bedeuten. So erhalte ich statt der obigen Differentialgleichungen

$$(2.)\quad \begin{cases} \varrho\frac{du}{dt} = \eta\left\{\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d}{\varpi\, d\varpi}\left(\varpi\frac{du}{d\varpi}\right)\right\} - \frac{d\mathfrak{p}}{dx} + \varrho X, \\ \varrho\frac{dq}{dt} = \eta\left\{\frac{d^2q}{dx^2} + \frac{d}{d\varpi}\left(\frac{d(\varpi q)}{\varpi\, d\varpi}\right)\right\} - \frac{d\mathfrak{p}}{d\varpi} + \varrho\mathfrak{Q}, \\ \varrho\frac{d\sigma}{dt} = \eta\left\{\frac{d^2\sigma}{dx^2} + \frac{d}{\varpi\, d\varpi}\left(\frac{d(\varpi^2\sigma)}{\varpi\, d\varpi}\right)\right\} - \frac{1}{\varpi^2}\frac{d\mathfrak{p}}{d\varphi} + \varrho\frac{S}{\varpi}, \\ 0 = \frac{du}{dx} + \frac{d(\varpi q)}{\varpi\, d\varpi}, \end{cases}$$

wobei vorausgesetzt worden ist, dass die Bewegung von dem Winkel φ unabhängig sei. Ferner sind die Grössen zweiter Ordnung fortgelassen worden.

Die Gleichungen (2.) stimmen bis auf geringfügige Abänderung der Bezeichnungen und bis auf die fortgelassenen Glieder mit den auf S. 241 meiner ersten Abhandlung im 59. Bande dieses Journals aufgestellten Gleichungen überein. Die dritte der Gleichungen bestimmt die Winkelgeschwindigkeit σ unabhängig von den Componenten u und q, und diese sind ihrerseits von σ unabhängig. Jene frühere Abhandlung und ebenso die Abhandlung *Lampes* benutzten diesen Umstand, die Grösse σ für sich allein zu bestimmen; und zwar bezog sich meine Untersuchung auf die oscillirende Drehung einer Scheibe, die von *Lampe* auf diejenige einer Kugel.

In der gegenwärtigen Untersuchung kann ich von der Grösse σ absehen, da eine Pendelkugel keine Oscillationen um eine mit der Richtung ihrer Schwingungen zusammenfallende horizontale Axe ausführt. Es bleiben also nur die erste, zweite und vierte der Gleichungen (2.) zu integriren. Die Lösungen, die wir erhalten werden, bilden also mit den von *Lampe* bereits aufgestellten Formeln das vollständige Integral der Gleichungen (2.).

Ehe ich an die Integration der Gleichungen gehe, ist der Werth der äusseren Kräfte einzuführen. Von diesen ist nur die Schwerkraft zu berücksichtigen, so dass, wenn z die verticale Coordinate und g die beschleunigende Kraft der Schwere bezeichnet,

$$X = 0 \qquad Y = 0 \qquad Z = -g,$$

also

$$\mathfrak{Q} = -g \sin\varphi$$

zu setzen bleibt. Substituire ich also für den Druck $\mathfrak{p}$ die Hülfsfunction p durch die Gleichung

$$(3.) \qquad \mathfrak{p} = p - \varrho g \varpi \sin\varphi,$$

so werden die drei Gleichungen (2.)

$$(4.) \qquad \begin{cases} \varrho \dfrac{du}{dt} = \eta\left\{\dfrac{d^2u}{dx^2} + \dfrac{d}{\varpi\, d\varpi}\left(\varpi \dfrac{du}{d\varpi}\right)\right\} - \dfrac{dp}{dx}, \\ \varrho \dfrac{dq}{dt} = \eta\left\{\dfrac{d^2q}{dx^2} + \dfrac{d}{d\varpi}\left(\dfrac{d(\varpi q)}{\varpi\, d\varpi}\right)\right\} - \dfrac{dp}{d\varpi}, \\ \qquad 0 = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{d(\varpi q)}{\varpi\, d\varpi}. \end{cases}$$

Aus der letzten dieser Gleichungen folgt

$$(5.) \qquad u = \frac{1}{\varpi}\frac{d\psi}{d\varpi} \qquad q = -\frac{1}{\varpi}\frac{d\psi}{dx}.$$

Eliminire ich dann p aus den ersten beiden Gleichungen (4.) und setze

$$(6.) \qquad \frac{\eta}{\varrho} = \gamma^2,$$

d. h. gleich der von *Stokes* mit dem Namen *Reibungsindex* belegten Constanten, so ergiebt sich zur Bestimmung von ψ die Differentialgleichung vierter Ordnung

$$(7.) \qquad 0 = \Delta\left(\Delta\psi - \frac{1}{\gamma^2}\frac{d\psi}{dt}\right),$$

wenn durch das Zeichen Δ die durch die Formel

$$\Delta\chi = \frac{d^2\chi}{dx^2} + \frac{d^2\chi}{d\varpi^2} - \frac{1}{\varpi}\frac{d\chi}{d\varpi}$$

erläuterte Operation angedeutet wird.

Um die Gleichung (7.) zu integriren, suche ich zunächst der Gleichung

$$0 = \Delta\chi$$

zu genügen. Setze ich dann

$$\chi = \Delta\psi - \frac{1}{\gamma^2}\frac{d\psi}{dt}$$

und integrire diese Gleichung, so habe ich damit das Integral ψ der Gleichung (7.). Dieser letzten ist zu genügen, wenn man

$$(8.) \qquad \psi = \psi_1 + \psi_2$$

setzt, wo

$$\psi_1 = -\gamma^2 \int \chi \, dt$$

die Gleichung

$$(9.) \qquad 0 = \Delta\psi_1$$

erfüllt, während ψ_2 der Gleichung

$$(10.) \qquad 0 = \Delta\psi_2 - \frac{1}{\gamma^2}\frac{d\psi_2}{dt}$$

genügt. Die Gleichung (7.) hat also die auch von *Stokes* hervorgehobene Eigenschaft, *dass die Auflösung dieser Gleichung vierter Ordnung sich aus denen zweier Gleichungen zweiter Ordnung zusammensetzt.*

Diese interessante Eigenschaft ist nicht ohne physikalische Bedeutung. Bildet man nämlich die Grösse

$$\frac{du}{d\varpi} - \frac{dq}{dx},$$

welche bekanntlich die doppelte Rotationsgeschwindigkeit eines Theilchens an der Stelle (x, ϖ) um eine zur x- und zur ϖ-Richtung senkrechte Axe *) darstellt, so wird diese Grösse nach den Gleichungen (5.)

$$\frac{du}{d\varpi} - \frac{dq}{dx} = \frac{1}{\varpi}\left\{\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{d^2\psi}{d\varpi^2} - \frac{1}{\varpi}\frac{d\psi}{d\varpi}\right\} = \frac{1}{\varpi}\Delta\psi.$$

Die Function ψ_1 definirt also denjenigen Theil der Bewegung, welcher ohne Rotation stattfindet, für den also nach *Helmholtz* ein Geschwindigkeitspotential existirt. Dieser Theil der Bewegung findet — von den weiter unten aufgestellten Grenzbedingungen abgesehen — unabhängig von der Reibung statt und würde auch ohne dieselbe stattfinden; denn ist

$$0 = \frac{du}{d\varpi} - \frac{dq}{dx}$$

*) *Helmholtz.* Dieses Journal Bd. 55. S. 31.

und

$$0 = \frac{du}{dx} + \frac{d(\varpi q)}{\varpi d\varpi},$$

so folgt

$$0 = \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d}{\varpi d\varpi}\left(\varpi \frac{du}{d\varpi}\right),$$

$$0 = \frac{d^2 q}{dx^2} + \frac{d}{d\varpi}\left(\varpi \frac{dq}{d\varpi}\right);$$

also sind nach den Gleichungen (4.) die Beschleunigungen

$$\varrho \frac{du}{dt} = -\frac{dp}{dx} \quad \text{und} \quad \varrho \frac{dq}{dt} = -\frac{dp}{d\varpi}$$

unabhängig von dem Werthe der Reibungsconstante η.

Dagegen bestimmt der zweite Theil ψ_2 eine mit Rotation der Theilchen verknüpfte Bewegung, welche nicht allein von dem Werthe der Reibung abhängt, sondern welche sogar gar nicht als einè von der ersten, durch ψ_1 charakterisirten unterschiedene Bewegung auftreten würde, wenn $\eta = 0$ wäre. Die Rotation der Flüssigkeitstheilchen entsteht also erst durch die Reibung, und umgekehrt findet ohne Reibung keine Rotation statt. *)

Um nun die Gleichung (7.) in geschickterer Form zu integriren, führe ich mit *Stokes* durch die Gleichungen

$$(11.) \qquad x = r\cos\vartheta, \qquad \varpi = r\sin\vartheta$$

die beiden neuen Variabeln r und ϑ ein, von denen die erstere die Entfernung von der Ruhelage des Kugelmittelpunktes bedeutet, während die letztere, ϑ, den Winkel bezeichnet, den die Linie r mit der Richtung der Schwingungen einschliesst. Durch diese Substitution erhalte ich

$$(12.) \qquad \Delta\psi = \frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{\sin\vartheta}{r^2}\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d\psi}{d\vartheta}\right).$$

Indem ich nun den Gleichungen (9.) und (10.) durch Auflösungen von der üblichen Form genüge, erhalte ich

$$(13.) \qquad \begin{cases} \psi = \psi_1 + \psi_2, \\ \psi_1 = \Sigma(B\Theta_n + CZ_n)Re^{\lambda^2\gamma^2 t}, \\ \psi_2 = \Sigma(\mathfrak{B}\Theta_n + \mathfrak{C}Z_n)\mathfrak{R}e^{\lambda^2\gamma^2 t}. \end{cases}$$

Hierin sind Θ_n und Z_n die beiden Auflösungen der Differentialgleichung

$$(14.) \qquad \frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d\Theta}{d\vartheta}\right) = -n(n+1)\frac{\Theta}{\sin\vartheta},$$

*) Vergl. *Stefan*. Wiener Sitzungsberichte. Bd. 46. S. 25.

welche die Werthe

$$(15.)\begin{cases}\Theta_n = 1-\frac{n(n+1)}{1.2}\cos^2\vartheta+\frac{n(n+2)(n+1)(n-1)}{1.2.3.4}\cos^4\vartheta-\frac{n(n+2)(n+4)(n+1)(n-1)(n-3)}{1.2.3.4.5.6}\cos^6\vartheta+\cdots\\ Z_n = \cos\vartheta-\frac{(n+1)n}{2.3}\cos^3\vartheta+\frac{(n+1)(n+3)n(n-2)}{2.3.4.5}\cos^5\vartheta-\cdots\end{cases}$$

besitzen. Ferner genügt R der Gleichung

$$(16.)\qquad \frac{d^2R}{dr^2} = n(n+1)\frac{R}{r^2}$$

und hat die Bedeutung

$$(17.)\qquad R = \frac{1}{r^n}+fr^{n+1}.$$

Aehnlich erfüllt $\mathfrak{R}$ die Differentialgleichung

$$(18.)\qquad 0 = \frac{d^2\mathfrak{R}}{dr^2}-\mathfrak{n}(\mathfrak{n}+1)\frac{\mathfrak{R}}{r^2}-\lambda^2\mathfrak{R},$$

und es ist

$$(19.)\qquad \begin{cases}\mathfrak{R} = P_{\mathfrak{n}}(r)+(\mathfrak{f}-1)Q_{\mathfrak{n}}(r),\\ P_{\mathfrak{n}}(r) = r^{\mathfrak{n}+1}\int_{-\lambda}^{\lambda}e^{rs}(\lambda^2-s^2)^{\mathfrak{n}}ds,\qquad Q_{\mathfrak{n}}(r) = r^{\mathfrak{n}+1}\int_{\lambda}^{\infty}e^{-rs}(s^2-\lambda^2)^{\mathfrak{n}}ds.\end{cases}$$

Die sonst noch vorkommenden Buchstaben B, C, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{f}$, f, n, $\mathfrak{n}$, λ und λ_1 bezeichnen constante Grössen, welche vorläufig unbestimmt sind.

Aus dem so bestimmten Werthe der Function ψ erhält man die Geschwindigkeiten u und q durch die Gleichungen (5.) oder

$$(20.)\qquad \begin{cases}u = \frac{1}{r\sin\vartheta}\left\{\frac{\cos\vartheta}{r}\frac{d\psi}{d\vartheta}+\sin\vartheta\frac{d\psi}{dr}\right\}\\ q = \frac{1}{r\sin\vartheta}\left\{\frac{\sin\vartheta}{r}\frac{d\psi}{d\vartheta}-\cos\vartheta\frac{d\psi}{dr}\right\}.\end{cases}$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichungen (4.) ein, so werden dieselben

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{\varrho}{r^2\sin\vartheta}\frac{d^2\psi_1}{d\vartheta\, dt},\qquad \frac{dp}{d\vartheta} = \frac{\varrho}{\sin\vartheta}\frac{d^2\psi_1}{dr\, dt},$$

so dass also aus der Gleichung

$$(21.)\qquad dp = \frac{\varrho}{\sin\vartheta}\left\{\frac{d^2\psi_1}{dr\, dt}d\vartheta-\frac{1}{r^2}\frac{d^2\psi_1}{d\vartheta\, dt}dr\right\}$$

p und damit der Druck $\mathfrak{p}$ durch eine Quadratur gefunden werden kann.

2.

Die Function ψ hat Grenzbedingungen zu genügen, welche, unabhängig von der Grösse der verflossenen Zeit t, für gewisse Werthe von ϑ und r erfüllt werden müssen.

Da die Geschwindigkeiten u und q überhaupt nicht unendlich gross sein können, so darf dies auch nicht an Punkten auf der Axe geschehen; es dürfen also die Formeln (20.) für $\vartheta=0$ und $\vartheta=\pi$ nicht den Werth ∞ geben, d. h. es muss für $\vartheta=0$ und $\vartheta=\pi$, für jeden möglichen Werth von r und t sowohl

$$\frac{d\psi}{d\vartheta}=0 \quad \text{als auch} \quad \frac{d\psi}{dr}=0$$

sein. Die erstere Bedingung wird durch die Natur der Functionen Θ und Z von selbst erfüllt. Es bleiben also für $\cos\vartheta=1$ die Bedingungen

$$0=B\Theta_n \pm CZ_n, \qquad 0=\mathfrak{B}\,\Theta_{\mathrm{n}} \pm \mathfrak{C}Z_{\mathrm{n}}$$

zu erfüllen oder

$$0=B\Theta_n, \quad 0=CZ_n, \quad 0=\mathfrak{B}\Theta_{\mathrm{n}}, \quad 0=\mathfrak{C}Z_{\mathrm{n}}.$$

Also ist nöthig, dass einerseits entweder

$$0 = 1-\frac{n(n+1)}{1.2}+\frac{n(n+2)(n+1)(n-1)}{1.2.3.4}-\cdots \quad \text{und} \quad C=0$$

oder

$$0 = 1-\frac{(n+1)n}{2.3}+\frac{(n+1)(n+3)n(n-2)}{2.3.4.5}-\cdots \quad \text{und} \quad B=0$$

sei, und andrerseits

$$0 = 1-\frac{\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)}{1.2}+\frac{\mathrm{n}(\mathrm{n}+2)(\mathrm{n}+1)(\mathrm{n}-1)}{1.2.3.4}-\cdots \quad \text{und} \quad \mathfrak{C}=0$$

oder

$$0 = 1-\frac{(\mathrm{n}+1)\mathrm{n}}{2.3}+\frac{(\mathrm{n}+1)(\mathrm{n}+3)\mathrm{n}(\mathrm{n}-2)}{2.3.4.5}-\cdots \quad \text{und} \quad \mathfrak{B}=0.$$

Man sieht hieraus, dass n mit n identisch ist. Ihre Werthe sind ganze Zahlen. Denn es sind die aufgestellten Reihen gleich den unendlichen Producten

$$0 = \frac{(n-1)(n+2)(n-3)(n+4)(n-5)(n+6)\ldots}{1.2.3.4.5.6\ldots},$$

$$0 = \frac{(n-2)(n+3)(n-4)(n+5)(n-6)(n+7)\ldots}{2.3.4.5.6.7\ldots}.$$

Es ist also *entweder* $n=\mathrm{n}$ gleich einer positiven ungeraden oder einer negativen geraden ganzen Zahl, wo dann

$$C=0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{C}=0$$

ist; *oder* es ist $n=\mathrm{n}$ gleich einer geraden positiven oder negativen ungeraden ganzen Zahl (0 und -1 ausgenommen), wobei

$$B=0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{B}=0$$

zu setzen ist. Nach Gleichung (14.) ist nun aber Θ_n mit Θ_{-n-1} und Z_n mit

Z_{-n-1} identisch. Es ist also nur nöthig, die positiven ganzzahligen Werthe von n zu berücksichtigen und für ungerade n

$$C = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{C} = 0,$$

für gerade n

$$B = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} = 0$$

zu setzen.

Als wichtiger Vortheil ergiebt sich aus diesem Resultat, dass die Reihen (15.) geschlossene Ausdrücke und Θ und Z zu ganzen rationalen algebraischen Functionen von $\cos\vartheta$ werden. Es empfiehlt sich jetzt, die Reihen (15.) etwas zu transformiren und die Functionen fortan durch folgende Gleichungen darzustellen:

$$(22.) \begin{cases} \Theta_n = \sin^2\vartheta \left\{1 - \frac{(n-1)(n+2)}{1.2}\cos^2\vartheta + \frac{(n-1)(n+2)(n-3)(n+4)}{1.2.3.4}\cos^4\vartheta - \cdots\right\}, \\ Z_n = \cos\vartheta\sin^2\vartheta \left\{1 - \frac{(n-2)(n+3)}{2.3}\cos^2\vartheta + \cdots\right\}. \end{cases}$$

Nicht weniger vereinfachen sich für ganzzahlige n die Functionen $P_n(r)$ und $Q_n(r)$ in den Gleichungen (19.). Von denselben gelten folgende Lehrsätze, welche sich leicht durch theilweise Integration herleiten lassen:

$$(23.) \begin{cases} 0 = P_{n+1}(r) + 2(n+1)(2n+1)\frac{P_n(r)}{r} - 4n(n+1)\lambda^2 P_{n-1}(r), \\ 0 = Q_{n+1}(r) - 2(n+1)(2n+1)\frac{Q_n(r)}{r} - 4n(n+1)\lambda^2 Q_{n-1}(r). \end{cases}$$

Ebenso lässt sich beweisen, dass ihre Differentialquotienten durch die Gleichungen

$$(24.) \begin{cases} rP'_n(r) = -nP_n(r) + 2n\lambda^2 rP_{n-1}(r) \\ \qquad = (n+1)P_n(r) + \frac{r}{2(n+1)}P_{n+1}(r), \\ rQ'_n(r) = -nQ_n(r) - 2n\lambda^2 rQ_{n-1}(r) \\ \qquad = (n+1)Q_n(r) - \frac{r}{2(n+1)}Q_{n+1}(r) \end{cases}$$

gegeben sind. Die Gleichungen (23.) erlauben eine einfache Berechnung der Functionen aus den Werthen

$$(25.) \begin{cases} P_0(r) = r\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{rs}\, ds = e^{\lambda r} - e^{-\lambda r}, \\ Q_0(r) = r\int_{\lambda}^{\infty} e^{-rs} ds = e^{-\lambda r}, \\ P_1(r) = r^2\int_{-\lambda}^{\lambda} (\lambda^2 - s^2)e^{rs}\, ds = 2\left\{\left(\lambda - \frac{1}{r}\right)e^{\lambda r} + \left(\lambda + \frac{1}{r}\right)e^{-\lambda r}\right\}, \\ Q_1(r) = r^2\int_{\lambda}^{\infty} (s^2 - \lambda^2)e^{-rs} ds = 2\left(\lambda + \frac{1}{r}\right)e^{-\lambda r}. \end{cases}$$

Man findet, wenn

$$(26.)\quad \begin{cases} Q_n(r) = Q_n(r,\lambda) \\ \text{gesetzt wird,} \\ P_n(r) = (-1)^n \{Q_n(r,-\lambda) - Q_n(r,\lambda)\}, \end{cases}$$

und hierin ist

$$(27.)\quad Q_n(r,\lambda) = 2.4\ldots(2n)e^{-\lambda r}\left\{\lambda^n + \frac{n(n+1)}{2}\frac{\lambda^{n-1}}{r} + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2.4}\frac{\lambda^{n-2}}{r^2} - \cdots\right\}.$$

Diese Reihe ist ebenfalls eine endliche.

3.

Zweitens hat die Function ψ Bedingungen für gewisse Werthe von r zu erfüllen. Solchen Bedingungen ist sowohl an der Oberfläche der Kugel, als auch an der sphärisch gedachten Umhüllung des Mediums zu genügen. Die Oberfläche der Kugel schwankt hin und her. Es ist indess angenommen worden, dass die Bewegungen der Kugel unendlich klein seien. Ich vernachlässige also nur unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung in den Ausdrücken für die Geschwindigkeiten, wenn ich diese Bedingungen als für die Oberfläche der *festen* Kugel gültig annehme, mit welcher die bewegte in ihrer Gleichgewichtslage zusammenfällt.

Mit dieser sei die äussere Umhüllungskugel concentrisch; ihr Radius sei b, der der Pendelkugel a. Dann sind Bedingungen für $r = a$ und für $r = b$ aufzustellen.

Ich nehme an, dass die Flüssigkeit an beiden Oberflächen *fest hafte ohne zu gleiten.* Dann habe ich für $r = a$ die Geschwindigkeit der Flüssigkeit gleich der der Kugel, für $r = b$ dieselbe $= 0$ zu setzen. Bezeichne ich die Geschwindigkeit der Kugel durch U, so habe ich

$$\text{für } r = a,\quad u = U,\quad q = 0,$$
$$\text{für } r = b,\quad u = 0,\quad q = 0$$

zu machen oder nach den Gleichungen (20.)

$$\begin{array}{ll} \text{für } r = a & \text{und} \quad \text{für } r = b \\ \dfrac{d\psi}{dr} = aU\sin^2\vartheta, & \dfrac{d\psi}{dr} = 0, \\ \dfrac{d\psi}{d\vartheta} = a^2U\sin\vartheta\cos\vartheta & \dfrac{d\psi}{d\vartheta} = 0. \end{array}$$

Diesen Bedingungen ist für jeden Werth von ϑ zwischen 0 und π und für jeden positiven Werth von t zu genügen.

Man sieht leicht, dass diesen vier Gleichungen weder durch die zwei in jedem Gliede von ψ_1 enthaltenen Constanten, B und f für ungerade, C und f für gerade n, noch durch die drei in jedem Gliede von ψ_2 enthaltenen, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{f}$ und λ, respective $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{f}$ und λ genügt werden kann. Es ergiebt sich also, dass

$$\lambda_1 = \lambda$$

angenommen werden muss; es wird dann möglich, durch 4 der 5 Constanten B, $\mathfrak{B}$, f, $\mathfrak{f}$, λ für ungerade n, dagegen C, $\mathfrak{C}$, f, $\mathfrak{f}$, λ für gerade n den obigen 4 Bedingungen zu genügen.

Zugleich ergiebt sich eine nothwendige Folgerung für die Form der Function U, der Geschwindigkeit der Kugel. Da nämlich ψ, als Function von t betrachtet, aus einer Reihe von Exponentialgrössen mit dem Exponenten $\lambda^2\gamma^2 t$ besteht, so muss nach den obigen Bedingungen dasselbe für U der Fall sein. Man hat also

$$(28.) \qquad U = \Sigma D e^{\lambda^2\gamma^2 t},$$

und hieraus ergiebt sich für die augenblickliche Ablenkung ξ der Kugel aus der Gleichgewichtslage

$$(29.) \qquad \xi = \Sigma \frac{D}{\lambda^2\gamma^2} e^{\lambda^2\gamma^2 t},$$

weil ξ und U durch die Gleichung

$$U = \frac{d\xi}{dt}$$

unter einander verbunden sind.

Nunmehr ist es leicht, den 4 Bedingungen zu genügen. Beachtet man nämlich, dass dieselben für alle Werthe von ϑ zwischen 0 und π gelten, sowie dass nach Gleichung (22.)

$$\Theta_1 = \sin^2\vartheta,$$

so findet man, dass sich folgende Gleichungen als nothwendig ergeben. Es ist für $n = 1$

$$(30.) \quad \begin{cases} aD = B\left(2fa - \frac{1}{a^2}\right) + \mathfrak{B}(P_1'(a) + (\mathfrak{f}-1)Q_1'(a)), \\ \frac{1}{2}a^2 D = B\left(fa^2 + \frac{1}{a}\right) + \mathfrak{B}(P_1(a) + (\mathfrak{f}-1)Q_1(a)), \\ 0 = B\left(2fb - \frac{1}{b^2}\right) + \mathfrak{B}(P_1'(b) + (\mathfrak{f}-1)Q_1'(b)), \\ 0 = B\left(fb^2 + \frac{1}{b}\right) + \mathfrak{B}(P_1(b) + (\mathfrak{f}-1)Q_1(b)), \end{cases}$$

für ungerade n grösser als 1 für $r = a$ und $r = b$

$$(31.)\quad \begin{cases} 0 = B\Big((n+1)fr^n - \frac{n}{r^{n+1}}\Big) + \mathfrak{B}(P'_n(r) + (\mathfrak{f}-1)\,Q'_n(r)), \\ 0 = B\Big(fr^{n+1} \quad + \frac{1}{r^n}\Big) + \mathfrak{B}(P_n(r) + (\mathfrak{f}-1)\,Q_n(r)), \end{cases}$$

für gerade n für $r = a$ und $r = b$

$$(32.)\quad \begin{cases} 0 = C\Big((n+1)fr^n - \frac{n}{r^{n+1}}\Big) + \mathfrak{C}(P'_n(r) + (\mathfrak{f}-1)\,Q'_n(r)), \\ 0 = C\Big((fr^{n+1} \quad + \frac{1}{r_n}\Big) + \mathfrak{C}(P_n(r) + (\mathfrak{f}-1)\,Q_n(r)). \end{cases}$$

Die Gleichungen (30.) bestimmen für $n = 1$ B, f, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{f}$ durch D; d. h. sie bestimmen die Bewegung des Mediums durch die der Kugel. Man erhält, falls D nicht $= 0$ ist, unter Rücksicht auf die in (24.) enthaltenen Werthe:

$$(33.)\quad \begin{cases} BN = -\frac{1}{2}abD\,\{\alpha_1\beta_2 e^{\lambda(b-a)} - \alpha_2\beta_1 e^{-\lambda(b-a)}\}, \\ fBN = \quad \frac{1}{2}a\lambda^2 D\,\{\alpha_1 e^{\lambda(b-a)} \quad - \alpha_2 e^{-\lambda(b-a)} - 6\lambda b\}, \\ \mathfrak{B}N = -\frac{3}{4}abD\,\{\alpha_1 e^{-\lambda a} - \beta_1 e^{-\lambda b}\}, \\ \mathfrak{f}\mathfrak{B}N = \quad \frac{3}{4}abD\,\{\beta_2 e^{\lambda b} \quad - \alpha_2 e^{\lambda a}\}, \end{cases}$$

worin zur Abkürzung

$$(34.)\quad \begin{cases} \alpha_1 = 3 + 3\lambda a + \lambda^2 a^2, \qquad \beta_1 = 3 + 3\lambda b + \lambda^2 b^2, \\ \alpha_2 = 3 - 3\lambda a + \lambda^2 a^2, \qquad \beta_2 = 3 - 3\lambda b + \lambda^2 b^2, \\ N = \lambda^2\{(a\alpha_1 - b\beta_2)\,e^{\lambda(b-a)} + (b\beta_1 - a\alpha_2)\,e^{-\lambda(b-a)} - 12\lambda ab\} \end{cases}$$

gesetzt worden ist. In dem vorläufig noch als möglich erscheinenden Falle, dass die Constante $D = 0$ wäre, würde man eine Auflösung der Gleichungen (30.) erhalten, welche mit der der Gleichungen (31.) für $n = 1$ zusammenfiele. Indess ist diese Auflösung nicht im Stande, den im folgenden Abschnitt aufgestellten Bedingungen, insbesondere der Gleichung (42.), zu genügen.

Dagegen bestimmen die Gleichungen (31.) und (32.) von jenen 4 Constanten f, $\mathfrak{f}$ und B, $\mathfrak{B}$, respective C, $\mathfrak{C}$ nur 3. Es ergiebt sich aber eine Gleichung zur Bestimmung der Werthe von λ. Da die Gleichungen keine der mit D bezeichneten Constanten enthalten, so sieht man, dass sie zur Berechnung derjenigen Art von Bewegungen dienen, welche die Flüssigkeit ausführt, ohne dass die Kugel daran Antheil nähme.

Die Gleichungen sind durch einen Lehrsatz, welchen ich zuvor beweisen werde, leicht aufzulösen. Aus den Differentialgleichungen, denen die

Functionen P und Q nach Gleichung (18.) genügen,

$$0 = \frac{d^2 P_n(r)}{dr^2} - \frac{n(n+1)}{r^2} P_n(r) - \lambda^2 P_n(r),$$

$$0 = \frac{d^2 Q_n(r)}{dr^2} - \frac{n(n+1)}{r^2} Q_n(r) - \lambda^2 Q_n(r),$$

folgt die Gleichung

$$0 = Q_n(r) \frac{d^2 P_n(r)}{dr^2} - P_n(r) \frac{d^2 Q_n(r)}{dr^2},$$

welche durch Integration liefert, dass

$$Q_n(r) \frac{dP_n(r)}{dr} - P_n(r) \frac{dQ_n(r)}{dr}$$

einen von r unabhängigen Werth besitzt.

Durch dieses Theorem findet man aus den ersten der Gleichungen (31.) oder (32.), also sowohl für gerade als für ungerade n:

$$(35.) \quad \begin{cases} f = -4n(n+1)\lambda^2 \dfrac{b^{-n} P_{n-1}(b) - a^{-n} P_{n-1}(a)}{b^{n+1} P_{n+1}(b) - a^{n+1} P_{n+1}(a)}, \\ \text{oder auch} \\ f = -4n(n+1)\lambda^2 \dfrac{a^{-n} Q_{n-1}(a) - b^{-n} Q_{n-1}(b)}{a^{n+1} Q_{n+1}(a) - b^{n+1} Q_{n+1}(b)}. \end{cases}$$

Desgleichen ergiebt sich aus den zweiten dieser Gleichungen durch einfache Elimination, ebenfalls für gerade und ungerade n,

$$(36.) \quad \begin{cases} 1 - \mathfrak{f} = \dfrac{b^{n+1} P_{n+1}(b) - a^{n+1} P_{n+1}(a)}{a^{n+1} Q_{n+1}(a) - b^{n+1} Q_{n+1}(b)} \\ \text{sowie} \\ 1 - \mathfrak{f} = \dfrac{b^{-n} P_{n-1}(b) - a^{-n} P_{n-1}(a)}{a^{-n} Q_{n-1}(a) - b^{-n} Q_{n-1}(b)}. \end{cases}$$

Hieraus folgt die Gleichung

$$(37.) \quad \frac{b^{-n} P_{n-1}(b) - a^{-n} P_{n-1}(a)}{b^{n+1} P_{n+1}(b) - a^{n+1} P_{n+1}(a)} = \frac{a^{-n} Q_{n-1}(a) - b^{-n} Q_{n-1}(b)}{a^{n+1} Q_{n+1}(a) - b^{n+1} Q_{n+1}(b)},$$

welche als einzige unbekannte Grösse λ enthält; sie bestimmt also die Werthe dieser Grösse und zwar sowohl für gerade, als für ungerade Werthe von n, welche grösser als 1 sind.

Endlich erhält man aus den Gleichungen (31.) noch für ungerade n

$$(38.) \quad \begin{cases} 2(n+1)(2n+1)\big(a^{n+1} Q_{n+1}(a) - b^{n+1} Q_{n+1}(b)\big) B \\ = a^{n+1} b^{n+1} \big(Q_{n+1}(a) P_{n+1}(b) - Q_{n+1}(b) P_{n+1}(a)\big) \mathfrak{B} \end{cases}$$

und für gerade n aus (32.)

$$(39.) \quad \begin{cases} 2(n+1)(2n+1)\big(a^{n+1} Q_{n+1}(a) - b^{n+1} Q_{n+1}(b)\big) C \\ = a^{n+1} b^{n+1} \big(Q_{n+1}(a) P_{n+1}(b) - Q_{n+1}(b) P_{n+1}(a)\big) \mathfrak{C}. \end{cases}$$

Es bleibt also noch je eine der Constanten, etwa 𝔅 für ungerade und ℭ für gerade n unbestimmt.

4.

Ich habe noch die Differentialgleichung aufzustellen, welche die periodische Bewegung der Kugel bestimmt.

Stokes hat für den Ausdruck der von der Flüssigkeit auf die Kugel ausgeübten Druckkräfte eine Formel gegeben, welche ich in etwas andrer Weise herleiten will.

Nach den Principien der allgemeinen Theorie, auf der die Gleichungen (1.) beruhen, liefern die Formeln

$$X_x = \mathfrak{p} - 2\eta \frac{du}{dx}, \quad Y_z = Z_y = -\eta\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right),$$
$$Y_y = \mathfrak{p} - 2\eta \frac{dv}{dy}, \quad Z_x = X_z = -\eta\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right),$$
$$Z_z = \mathfrak{p} - 2\eta \frac{dw}{dz}, \quad X_y = Y_x = -\eta\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right)$$

die nach den Coordinatenrichtungen zerlegten Componenten der Druckkräfte, welche im Innern der Flüssigkeit im Sinne der positiven Richtungen der Coordinaten auf Flächen ausgeübt werden, welche zu den Coordinaten senkrecht gelegen sind.

Aus den 3 X-Componenten erhalte ich nach einem bekannten Theorem *Cauchys* die Componente, welche nach derselben Richtung, also horizontal auf eine gegen den Radiusvector r senkrecht gelegene Fläche ausgeübt wird,

$$\begin{aligned} X_r &= X_x \cos\vartheta + X_y \sin\vartheta \cos\varphi + X_z \sin\vartheta \sin\varphi \\ &= \mathfrak{p}\cos\vartheta - \eta\left\{\frac{du}{dr} + \frac{du}{dx}\cos\vartheta + \frac{dq}{dx}\sin\vartheta\right\}. \end{aligned}$$

Wende ich diese Formel auf die Oberfläche der Kugel an, so erhalte ich eine Kraft, welche dem auf dieselbe ausgeübten Druck gleich, aber entgegengesetzt gerichtet ist. Ich setze die Werthe von u und q aus den Formeln (20.) ein, benutze die Differentialgleichungen (9.) und (10.), sowie die Bedingung, dass für $r = a$ $q = 0$ ist, und erhalte

$$X_r = \mathfrak{p}\cos\vartheta - \frac{\varrho}{r}\frac{d\psi_1}{dt} \qquad {}_{r=a}.$$

Die gesammte auf die Kugel ausgeübte horizontale Componente der Druckkräfte ergiebt sich durch Integration über die Kugel. Dieselbe ist, genommen

nach der positiven Richtung der x,

$$a\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\varrho\frac{d\psi_t}{dt}-a\mathfrak{p}\cos\vartheta\right)_a\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi$$

und wegen (3.)

$$2\pi a\int_0^{\pi}\left(\varrho\frac{d\psi_t}{dt}-ap\cos\vartheta\right)\sin\vartheta\,d\vartheta.$$

Auf das zweite Glied wende ich den Satz von der partiellen Integration an, setze den Werth von $\frac{dp}{d\vartheta}$ aus (21.) ein und erhalte die *Stokes*sche Formel

$$\pi\varrho a\frac{d}{dt}\int_0^{\pi}\left(a\frac{d\psi_1}{dr}+2\psi_2\right)_a\sin\vartheta\,d\vartheta.$$

Ebenso wie diesen Werth der einen horizontalen Componente des auf die Kugel wirkenden Drucks kann man die zweite horizontale und die verticale Componente bilden. Es ergiebt sich

$$Y_r = \left(\mathfrak{p}\sin\vartheta-\eta\left\{\frac{dq}{dr}+\frac{du}{d\varpi}\cos\vartheta+\frac{dq}{d\varpi}\sin\vartheta\right\}\right)\cos\varphi,$$

$$Z_r = \left(\mathfrak{p}\sin\vartheta-\eta\left\{\frac{dq}{dr}+\frac{du}{d\varpi}\cos\vartheta+\frac{dq}{d\varpi}\sin\vartheta\right\}\right)\sin\varphi.$$

Bildet man die Summe wie oben, so liefert die erste Formel das Resultat 0, die zweite

$$-\tfrac{4}{3}\pi\varrho a^3 g,$$

welche Grösse gleich und entgegengesetzt dem Druck ist, den die Kugel nach oben erleidet.

Es ist jetzt leicht, die Differentialgleichung zu bilden, welche das Gesetz der Bewegung der Pendelkugel enthält. Auf dieselbe wirkt, wenn M ihre Masse ist, die Schwerkraft

$$-Mg$$

in der Richtung der vertical nach oben gerichteten z-Coordinate. In derselben Richtung drückt die Flüssigkeit mit der Kraft

$$\tfrac{4}{3}\pi\varrho a^3 g = M'g,$$

wo M' die Masse der von der Kugel verdrängten Flüssigkeit bezeichnet. Es bleibt also die Kraft

$$-(M-M')g = -mg.$$

Das von dieser verticalen Kraft herrührende Moment beträgt

$$-mg\xi,$$

wenn ξ, wie bisher, die augenblickliche Entfernung der Pendelkugel aus der Gleichgewichtslage bedeutet. Dazu kommt das Moment der horizontalen Druckkraft

$$\pi \varrho a l \frac{d}{dt} \int_0^\pi \left(a \frac{d\psi_1}{dr} + 2\psi_2 \right)_a \sin\vartheta \, d\vartheta,$$

wo l die Länge des Pendels, d. h. die Entfernung des Mittelpunkts der Kugel vom Aufhängungspunkte bezeichnet. Fügt man zu diesen beiden Momenten das negative Moment der beschleunigenden Kraft

$$-Ml \frac{d^2\xi}{dt^2},$$

so erhält man die gesuchte Differentialgleichung in der Form

$$(40.) \qquad 0 = M \frac{d^2\xi}{dt^2} + m \frac{g}{l} \xi - \pi \varrho a \frac{d}{dt} \int_0^\pi \left(a \frac{d\psi_1}{dr} + 2\psi_2 \right)_a \sin\vartheta \, d\vartheta.$$

In diese Formel sind die oben gefundenen Werthe einzusetzen. Dabei bietet sich die Aufgabe, die Integrale

$$\int_0^\pi \Theta_n \sin\vartheta \, d\vartheta, \qquad \int_0^\pi Z_n \sin\vartheta \, d\vartheta$$

zu berechnen, welche mit den Integralen

$$\int_0^\pi \Theta_n \Theta_1 \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta}, \qquad \int_0^\pi Z_n \Theta_1 \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta}$$

identisch sind.

Statt dieser Aufgabe behandle ich die allgemeinere, welche später nützlich sein wird, den Werth des Integrals

$$\int_0^\pi \Theta_n \Theta_{\mathfrak{n}} \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta}$$

zu finden, wenn Θ_n und $\Theta_{\mathfrak{n}}$ Auflösungen der Differentialgleichungen

$$0 = \frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{1}{\sin\vartheta} \frac{d\Theta_n}{d\vartheta} \right) + n(n+1) \frac{\Theta_n}{\sin\vartheta},$$

$$0 = \frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{1}{\sin\vartheta} \frac{d\Theta_{\mathfrak{n}}}{d\vartheta} \right) + \mathfrak{n}(\mathfrak{n}+1) \frac{\Theta_{\mathfrak{n}}}{\sin\vartheta}$$

bedeuten; es kann also auch Z statt Θ geschrieben werden. Aus diesen Differentialgleichungen folgt

$$(n(n+1) - \mathfrak{n}(\mathfrak{n}+1)) \frac{\Theta_n \Theta_{\mathfrak{n}}}{\sin\vartheta} = \frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{1}{\sin\vartheta} \left(\Theta_n \frac{d\Theta_{\mathfrak{n}}}{d\vartheta} - \Theta_{\mathfrak{n}} \frac{d\Theta_n}{d\vartheta} \right) \right)$$

und durch Integration unter Rücksicht auf die unter (22.) aufgeführten Formen

der Functionen

$$\left(n(n+1)-\mathfrak{n}(\mathfrak{n}+1)\right)\int_0^\pi \Theta_n \Theta_{\mathfrak{n}} \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta} = 0,$$

also, wenn die positiven Zahlen n und $\mathfrak{n}$ von einander verschieden sind, so ist

$$(41.)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\pi \Theta_n \Theta_{\mathfrak{n}} \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta} = 0 \\ \text{und ebenso} \\ \displaystyle\int_0^\pi \Theta_n Z_{\mathfrak{n}} \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta} = 0, \\ \displaystyle\int_0^\pi Z_n Z_{\mathfrak{n}} \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta} = 0. \end{cases}$$

Aus den ersten beiden dieser Theoreme folgt für die zunächst vorliegende Gleichung (40.), dass, wenn man in dieselbe die Werthe der Functionen ψ_1 und ψ_2 einsetzt, alle Glieder fortfallen mit Ausnahme derer, in welchen $n=1$ ist. Denn es ist

$$\left.\begin{aligned} \int_0^\pi \Theta_n \sin\vartheta\, d\vartheta &= \int_0^\pi \Theta_n \Theta_1 \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta} = 0, \\ \int_0^\pi Z_n \sin\vartheta\, d\vartheta &= \int_0^\pi Z_n \Theta_1 \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta} = 0; \end{aligned}\right\} n>1$$

dagegen ist

$$\int_0^\pi \Theta_1 \sin\vartheta\, d\vartheta = \int_0^\pi \sin^3\vartheta\, d\vartheta = \tfrac{4}{3}.$$

Somit erhält man, indem man beachtet, dass die Gleichung (40.) für jeden Werth von t zu erfüllen ist, durch Einsetzen aus (13.) und (29.)

$$(42.)\qquad 0 = D\left(M\lambda^2\gamma^2+\frac{m}{\lambda^2\gamma^2}\frac{g}{l}\right)-\tfrac{4}{3}\pi\varrho a\left(aB\frac{dR}{dr}+2\mathfrak{B}\mathfrak{R}\right)_a\lambda^2\gamma^2$$

unter der Bedingung $n=1$. In Folge der Gleichungen (30.), welche sich auch

$$(43.)\quad \begin{cases} B\dfrac{dR}{dr}+\mathfrak{B}\dfrac{d\mathfrak{R}}{dr} = aD \quad \text{für } r=a, \quad =0 \text{ für } r=b, \\ BR+\mathfrak{B}\mathfrak{R} = \tfrac{1}{2}a^2D \quad - \quad - \quad =0 \quad - \quad - \end{cases}$$

schreiben lassen, und der identischen Gleichung

$$(44.)\qquad rR-\frac{r^2}{2}\frac{dR}{dr} = \tfrac{3}{2}$$

verwandelt sich diese Gleichung in

$$(45.)\qquad 0 = Dm\left(\lambda^2\gamma^2+\frac{g}{l}\frac{1}{\lambda^2\gamma^2}\right)+4\pi\varrho\lambda^2\gamma^2 B,$$

und man erhält durch die erste Gleichung (33.)

$$(46.)\quad 0 = m\left(\lambda^2\gamma^2 + \frac{g}{l}\frac{1}{\lambda^2\gamma^2}\right) - 2\pi\eta ab \frac{\alpha_1\beta_2 e^{\lambda(b-a)} - \alpha_2\beta_1 e^{-\lambda(b-a)}}{(a\alpha_1 - b\beta_2)e^{\lambda(b-a)} + (b\beta_1 - a\alpha_2)e^{-\lambda(b-a)} - 12\lambda ab}.$$

Diese Gleichung enthält nur noch λ als einzige Unbekannte, dient also zur Bestimmung der möglichen Werthe dieser Constanten für den Fall $n = 1$, während für $n > 1$ die Gleichung (37.) an ihre Stelle tritt.

5.

Fassen wir jetzt die gewonnenen Resultate zusammen, so haben wir in den Formeln (28.) und (29.)

$$U = \mathfrak{S} D e^{\lambda^2\gamma^2 t},$$

$$\xi = \mathfrak{S} \frac{D}{\lambda^2\gamma^2} e^{\lambda^2\gamma^2 t}$$

den vollständigen Ausdruck der Geschwindigkeit U und der Ablenkung ξ der Pendelkugel, wenn die durch $\mathfrak{S}$ angedeutete Summe sich über alle Werthe λ, welche der Gleichung (46.) genügen, erstreckt. Ferner sind die Formeln (13.) dahin zu verbessern, dass die Function ψ und die von ihr abhängenden u, q und p aus einer nicht einfachen, sondern doppelt unendlichen Reihe bestehen. Es nimmt nicht allein die Zahl n, sondern auch der Parameter λ, als Wurzel einer transcendenten Gleichung (37.) oder (46.), unendlich viele verschiedene Werthe an. Man kann also ψ schreiben

$$(47.)\quad \begin{cases} \psi = \Theta_1 \mathfrak{S}(BR + \mathfrak{B}\mathfrak{R}) e^{\lambda^2\gamma^2 t} + \sum \Theta_n \mathfrak{S}(BR + \mathfrak{B}\mathfrak{R}) e^{\lambda^2\gamma^2 t} \\ \qquad + \sum Z_n \mathfrak{S}(CR + \mathfrak{C}\mathfrak{R}) e^{\lambda^2\gamma^2 t}. \end{cases}$$

Die erste Summe $\mathfrak{S}$ ist über alle Wurzeln λ der Gleichung (46.) auszudehnen, und es sind die Werthe der zugehörigen Constanten den Gleichungen (33.) zu entnehmen; unbestimmt bleibt dann in jedem der Terme nur die Constante D. Im zweiten Gliede der Gleichung erstreckt sich die Summe $\sum$ über alle *ungeraden* Zahlen n, die Summe $\mathfrak{S}$ über alle Wurzeln λ der Gleichung (37.); die Gleichungen (35.), (36.), (38.) drücken die übrigen Constanten durch je eine derselben, etwa $\mathfrak{B}$, aus. Aehnlich bezeichnet im dritten Gliede $\sum$ eine Summe nach allen *geraden* Zahlen n, $\mathfrak{S}$ nach allen Wurzeln λ der Gleichung (37.); die Gleichungen (35.), (36.), (39.) bestimmen alle übrigen Constanten bis auf je eine, etwa $\mathfrak{C}$.

Es bleiben also noch zu bestimmen: 1) für $n=1$ die Werthe der Constanten D; 2) für grössere ungerade Zahlen n die Werthe der $\mathfrak{B}$; 3) für gerade n die Werthe der Constanten $\mathfrak{C}$. Dies geschieht durch den Anfangszustand der Bewegung, welcher gegeben sein muss.

Es sei zu Anfang, also zur Zeit $t=0$, das Pendel aus seiner Ruhelage um die Grösse A abgelenkt gewesen, und es habe zu derselben Zeit die Geschwindigkeit c besessen. Ferner muss die Geschwindigkeit der Flüssigkeit gegeben sein, d. h. es müssen die Werthe von u und q bekannt sein; dieselben sind es, wenn der Werth von ψ — bis auf eine aus den folgenden Formeln von selbst verschwindende von r und ϑ unabhängige Constante — gegeben ist; dieser sei gleich der von r und ϑ abhängenden Function Ψ. Dann ist noch den Bedingungen zu genügen, dass

$$(48.)\quad \text{für } t=0 \quad \xi=A,\quad U=c,\quad \psi=\Psi \text{ sei;}$$

oder dass

$$A=\mathrm{S}\frac{D}{\lambda^2\gamma^2},\qquad c=\mathrm{S}D,$$

$$\Psi = \Theta_1\mathrm{S}(BR+\mathfrak{B}\mathfrak{R})+\sum\Theta_n\mathrm{S}(BR+\mathfrak{B}\mathfrak{R})+\sum Z_n\mathrm{S}(CR+\mathfrak{C}\mathfrak{R})$$

sei.

Zur bequemen Auflösung dieser Gleichungen dienen zunächst die Theoreme (41.). Man findet durch dieselben, dass für $n=1$ die Constanten D aus den drei Gleichungen

$$(49.)\quad \begin{cases} A=\mathrm{S}\dfrac{D}{\lambda^2\gamma^2},\qquad c=\mathrm{S}D, \\ \displaystyle\int_0^\pi \Psi\sin\vartheta\, d\vartheta = \tfrac{4}{3}\mathrm{S}(BR+\mathfrak{B}\mathfrak{R}) \end{cases}$$

zu bestimmen sind. Dagegen sind für grössere ungerade n die Constanten $\mathfrak{B}$ aus der einzigen Gleichung

$$(50.)\quad \int_0^\pi \Psi\Theta_n\frac{d\vartheta}{\sin\vartheta} = \int_0^\pi \Theta_n\Theta_n\frac{d\vartheta}{\sin\vartheta}\cdot\mathrm{S}(BR+\mathfrak{B}\mathfrak{R})$$

herzuleiten und ähnlich die $\mathfrak{C}$ für gerade n aus der Gleichung

$$(51.)\quad \int_0^\pi \Psi Z_n\frac{d\vartheta}{\sin\vartheta} = \int_0^\pi Z_n Z_n\frac{d\vartheta}{\sin\vartheta}\cdot\mathrm{S}(CR+\mathfrak{C}\mathfrak{R}).$$

Die beiden letzteren Gleichungen enthalten das Resultat, *dass die Bewegung, welche die Flüssigkeit ohne die Kugel ausführt, nur aus einer anfänglichen Bewegung der Flüssigkeit, nicht durch eine Einwirkung der Kugel entstehen kann.* Die Auflösung aller dieser Gleichungen (49.) bis (51.) lässt

sich durch Theoreme bewerkstelligen, welche sich auf die Functionen R und $\mathfrak{R}$ beziehen.

Es seien λ und $\mathfrak{l}$ zwei Auflösungen derselben Gleichung (37.) oder (46.), R_λ, $\mathfrak{R}_\lambda$, $R_\mathfrak{l}$, $\mathfrak{R}_\mathfrak{l}$ die zugehörigen Functionen. Die beiden R, welche sich nur durch den Werth der Constante f unterscheiden, genügen derselben Differentialgleichung (16.)

$$\frac{d^2R}{dr^2} = n(n+1)\frac{R}{r^2};$$

also ist

$$R_\mathfrak{l}\frac{d^2R_\lambda}{dr^2} - R_\lambda\frac{d^2R_\mathfrak{l}}{dr^2} = 0$$

und durch Integration

$$R_\mathfrak{l}\frac{dR_\lambda}{dr} - R_\lambda\frac{dR_\mathfrak{l}}{dr} = \text{const.},$$

folglich

$$(52.)\quad \left[R_\mathfrak{l}\frac{dR_\lambda}{dr} - R_\lambda\frac{dR_\mathfrak{l}}{dr}\right]_a^b = 0,$$

wo die eckigen Parenthesen die gebräuchliche Bedeutung haben.

Aehnlich ist nach (18.)

$$\lambda^2\mathfrak{R}_\lambda + \frac{n(n+1)}{r^2}\mathfrak{R}_\lambda = \frac{d^2\mathfrak{R}_\lambda}{dr^2},$$

$$\mathfrak{l}^2\mathfrak{R}_\mathfrak{l} + \frac{n(n+1)}{r^2}\mathfrak{R}_\mathfrak{l} = \frac{d^2\mathfrak{R}_\mathfrak{l}}{dr^2};$$

also ist

$$(\lambda^2-\mathfrak{l}^2)\mathfrak{R}_\lambda\mathfrak{R}_\mathfrak{l} = \mathfrak{R}_\mathfrak{l}\frac{d^2\mathfrak{R}_\lambda}{dr^2} - \mathfrak{R}_\lambda\frac{d^2\mathfrak{R}_\mathfrak{l}}{dr^2} = \frac{d}{dr}\left(\mathfrak{R}_\mathfrak{l}\frac{d\mathfrak{R}_\lambda}{dr} - \mathfrak{R}_\lambda\frac{d\mathfrak{R}_\mathfrak{l}}{dr}\right)$$

und durch Integration

$$(53.)\quad (\lambda^2-\mathfrak{l}^2)\int_a^b \mathfrak{R}_\lambda\mathfrak{R}_\mathfrak{l}\,dr = \left[\mathfrak{R}_\mathfrak{l}\frac{d\mathfrak{R}_\lambda}{dr} - \mathfrak{R}_\lambda\frac{d\mathfrak{R}_\mathfrak{l}}{dr}\right]_a^b.$$

Ist nun $n>1$, so gelten die Gleichungen (31.) und (32.) oder kürzer

$$0 = BR + \mathfrak{B}\mathfrak{R}, \qquad 0 = CR + \mathfrak{C}\mathfrak{R},$$

$$0 = B\frac{dR}{dr} + \mathfrak{B}\frac{d\mathfrak{R}}{dr}, \qquad 0 = C\frac{dR}{dr} + \mathfrak{C}\frac{d\mathfrak{R}}{dr}$$

für $r=a$ und $r=b$. Hierdurch findet man unter Beachtung des Theorems (52.)

$$(54.)\quad \int_a^b \mathfrak{R}_\lambda\mathfrak{R}_\mathfrak{l}\,dr = 0,$$

vorausgesetzt, dass $\mathfrak{l}$ nicht $=\lambda$ und n grösser als 1 ist.

Ganz ebenso ist für $n>1$

$$(55.)\quad \lambda^2\int_a^b \mathfrak{R}_\lambda R_\mathfrak{l}\,dr = \left[R_\mathfrak{l}\frac{d\mathfrak{R}_\lambda}{dr} - \mathfrak{R}_\lambda\frac{dR_\mathfrak{l}}{dr}\right]_a^b = 0,$$

und dieser Satz gilt auch für $\mathfrak{l}=\lambda$.

Multiplicirt man also die Gleichung (50.) mit $\mathfrak{R}_\lambda dr$ und integrirt zwischen den Grenzen a und b, so verschwinden rechterseits alle Glieder bis auf das λ enthaltende. Man findet

$$(56.)\quad \begin{cases} \int_a^b \mathfrak{R}\int_0^\pi \Psi\,\Theta_n \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta} dr = \mathfrak{B}\int_0^\pi \Theta_n\Theta_n \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta}\int_a^b \mathfrak{R}\mathfrak{R}\,dr \\ \text{und ebenso} \\ \int_a^b \mathfrak{R}\int_0^\pi \Psi\,Z_n \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta} dr = \mathfrak{C}\int_0^\pi Z_n Z_n \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta}\int_a^b \mathfrak{R}\mathfrak{R}\,dr, \end{cases}$$

wodurch $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ für jedes $n > 1$ bestimmt sind.

Für $n = 1$ dagegen werden die Formeln (54.) und (55.) ungültig. Denn es gelten die Grenzbedingungen (43.). Benutzt man diese neben den Gleichungen (42.) und (44.), so findet man aus (53.), vorausgesetzt dass $\mathfrak{l}$ und λ *verschiedene* Wurzeln der Gleichung (46.) sind,

$$(57.)\quad \begin{cases} \mathfrak{B}_\lambda\mathfrak{B}_\mathfrak{l}\int_a^b \mathfrak{R}_\lambda\mathfrak{R}_\mathfrak{l}\,dr = -\tfrac{3}{8} D_\lambda D_\mathfrak{l}\frac{mg}{\pi\varrho l\gamma^4}\frac{\lambda^2+\mathfrak{l}^2}{\lambda^4\mathfrak{l}^4} \\ \text{und ebenso} \\ \mathfrak{B}_\lambda B_\mathfrak{l}\int_a^b \mathfrak{R}_\lambda R_\mathfrak{l}\,dr = \tfrac{3}{8} D_\lambda D_\mathfrak{l}\frac{m}{\pi\varrho\lambda^2}\left(1+\frac{g}{l\mathfrak{l}^4\gamma^4}\right), \end{cases}$$

welche letztere Gleichung auch für $\mathfrak{l} = \lambda$ gilt. Man hat also für $n = 1$ und $\mathfrak{l} \gtrless \lambda$

$$\mathfrak{B}_\lambda\int_a^b \mathfrak{R}_\lambda(B_\mathfrak{l}R_\mathfrak{l}+\mathfrak{B}_\mathfrak{l}\mathfrak{R}_\mathfrak{l})\,dr = \tfrac{3}{8} D_\lambda D_\mathfrak{l}\frac{m}{\pi\varrho\lambda^2}\left(1-\frac{g}{l\mathfrak{l}^2\lambda^2\gamma^4}\right).$$

Nach diesem Theorem ist es leicht, aus den Gleichungen (49.) alle D bis auf eins zu eliminiren. Man bildet nämlich und erhält

$$\mathfrak{B}\int_a^b \mathfrak{R}\int_0^\pi \Psi\sin\vartheta\,d\vartheta\,dr + D\frac{m}{2\pi\varrho\lambda^2}\left\{\frac{gA}{l\lambda^2\gamma^2}-c\right\} = \tfrac{4}{3}\mathfrak{B}\int_a^b \mathfrak{R}(BR+\mathfrak{B}\mathfrak{R})\,dr.$$

Das hier rechter Hand vorkommende Integral lässt sich aus der Formel (53.), welche für $\mathfrak{l} = \lambda$ einen unbestimmten Werth $\frac{0}{0}$ liefert, finden, indem man nach $\mathfrak{l}$ differentiirt und dann $\mathfrak{l} = \lambda$ setzt. Man erhält so, indem man noch die mehrfach angewandten Bedingungs- und Hülfsgleichungen benutzt, schliesslich

$$(58.)\quad \begin{cases} \mathfrak{B}\int_a^b \mathfrak{R}\int_0^\pi \Psi\sin\vartheta\,d\vartheta\,dr + \frac{1}{2\pi}D\frac{m}{\varrho\lambda^2}\left\{\frac{gA}{l\gamma^2\lambda^2}-c\right\} \\ = \tfrac{2}{3}\mathfrak{B}^2[r\mathfrak{R}\mathfrak{R}]_a^b + \frac{3}{\lambda^2}\mathfrak{B}D + \frac{mg}{\pi\varrho l\gamma^4\lambda^6}D^2. \end{cases}$$

Setzt man aus den Gleichungen (33.) die Werthe der verschiedenen Constanten ein, so bleibt nach Division durch D eine Gleichung, welche diese Grösse eindeutig bestimmt.

Damit sind alle Constanten bestimmt, folglich auch die gesuchten Functionen ψ und die von dieser abhängenden u, q, U, ξ, d. h. die Geschwindigkeiten der Flüssigkeit und der Kugel und der Ort der letzteren zur Zeit t.

6.

Um den Sinn der für diese Functionen aufgestellten Formeln zu verstehen, ist vor allen Dingen eine Untersuchung der Natur der Grössen λ nöthig, welche durch die Gleichungen (37.) und (46.) bestimmt werden. Es handelt sich namentlich darum, ob sie reell, imaginär oder complex sind, da hiervon abhängt, ob die Bewegung mit der Zeit periodisch ist oder nicht, sowie ob die Grösse derselben ab- oder zunimmt.

Was zunächst die Gleichung (37.) anbetrifft, so ist leicht einzusehen, dass, wenn ihr ein Werth λ genügt, auch $-\lambda$ sie erfüllt. Denn man erhält durch Anwendung der Gleichung (26.)

$$\frac{a^{-n}Q_{n-1}(a,-\lambda)-b^{-n}Q_{n-1}(b,-\lambda)}{a^{n+1}Q_{n+1}(a,-\lambda)-b^{n+1}Q_{n+1}(b,-\lambda)} = \frac{a^{-n}Q_{n-1}(a,\lambda)-b^{-n}Q_{n-1}(b,\lambda)}{a^{n+1}Q_{n+1}(a,\lambda)-b^{n+1}Q_{n+1}(b,\lambda)}.$$

Ich brauche also im folgenden nur die positiven unter den reellen λ zu untersuchen.

Mit Hülfe der vier Lehrsätze

$$\int_a^b dr\, r^{-n}P_n(r) = 2n(b^{-n}P_{n-1}(b)-a^{-n}P_{n-1}(a)),$$

$$\int_a^b dr\, r^{-n}Q_n(r) = 2n(a^{-n}Q_{n-1}(a)-b^{-n}Q_{n-1}(b)),$$

$$\int_a^b dr\, r^{n+1}P_n(r) = \frac{\lambda^{-2}}{2(n+1)}(b^{n+1}P_{n+1}(b)-a^{n+1}P_{n+1}(a)),$$

$$\int_a^b dr\, r^{n+1}Q_n(r) = \frac{\lambda^{-2}}{2(n+1)}(a^{n+1}Q_{n+1}(a)-b^{n+1}Q_{n+1}(b)),$$

welche durch die Differentialgleichungen (16.) und (18.), deren particulare Lösungen die Functionen r^{-n}, r^{n+1}, $P_n(r)$, $Q_n(r)$ sind, leicht zu beweisen sind, bringe ich die Gleichung (37.) oder

$$(59.)\quad \begin{cases} 0 = (b^{n+1}P_{n+1}(b)-a^{n+1}P_{n+1}(a))(a^{-n}Q_{n-1}(a)-b^{-n}Q_{n-1}(b)) \\ \quad -(b^{-n}P_{n-1}(b)-a^{-n}P_{n-1}(a))(a^{n+1}Q_{n+1}(a)-b^{n+1}Q_{n+1}(b)) \end{cases}$$

auf die Form

$$0 = \int_a^b\int_a^b dr\, d\mathfrak{r}\,(r^{n+1}\mathfrak{r}^{-n}-r^{-n}\mathfrak{r}^{n+1})P_n(r)Q_n(\mathfrak{r}).$$

In dieser Gestalt lässt die Gleichung erkennen, dass ihr kein reelles λ genügen kann. Denn es kann das Doppel-Integral, da beiden Variabeln gleiche Grenzen vorgeschrieben sind, als eine Summe aufgefasst werden, in welcher neben jedem Gliede

$$(r^{n+1}\mathfrak{r}^{-n}-r^{-n}\mathfrak{r}^{n+1})P_n(r)Q_n(\mathfrak{r}),$$

das entsprechende

$$(\mathfrak{r}^{n+1}r^{-n}-\mathfrak{r}^{-n}r^{n+1})P_n(\mathfrak{r})Q_n(r)$$

enthalten ist. Die Summe beider ist

$$(r^{n+1}\mathfrak{r}^{-n}-r^{-n}\mathfrak{r}^{n+1})(P_n(r)Q_n(\mathfrak{r})-P_n(\mathfrak{r})Q_n(r));$$

deren Werth aber ist, falls λ positiv ist, ebenfalls positiv, weil unter dieser Bedingung nach den Gleichungen (24.) P mit wachsendem r zunimmt, während Q abnimmt. Demnach ist auch der Werth des Integrals und der rechten Seite der Gleichung (59.) positiv; dieselben können also nicht 0 sein. Es besitzt also die Gleichung (59.) oder (37.) keine positive reelle Wurzel λ und überhaupt keine reelle.

Ihr genügt auch kein λ von complex-imaginärer Form. Würde ein

$$\lambda = \mathfrak{a}+\mathfrak{b}i \qquad i=\sqrt{-1}$$

mit der zugehörigen Function

$$\mathfrak{R}_\lambda = V+Wi$$

existiren, so gäbe es auch ein andres λ, das ich

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{a}-\mathfrak{b}i$$

bezeichne und die Function

$$\mathfrak{R}_\mathfrak{l} = V-Wi.$$

Setze ich diese Werthe in die Gleichung (54.), so erhalte ich die unmögliche Gleichung

$$\int_a^b dr(V^2+W^2) = 0.$$

Es giebt also kein complex-imaginäres λ, falls n grösser als 1 ist.

Die möglichen Werthe dieser Grösse λ können also nur rein imaginäre Grössen sein.

Nun ist λ der unterscheidende Parameter einer der particularen Auflösungen der Differentialgleichungen, und zwar für $n>1$ einer solchen particularen Auflösung, welche die Bewegung bestimmt, welche die Flüssigkeit ohne Theilnahme der Pendelkugel ausführt. Die Form einer solchen Auflösung ist (vergleiche Gleichung (47.))

$$\Theta_n(BR+\mathfrak{B}\mathfrak{R})e^{\lambda\gamma t}$$

oder

$$Z_n(CR+\mathfrak{C}\mathfrak{R})e^{\lambda^2\gamma^2 t},$$

je nachdem n ungerade oder gerade ist. Da hierin λ imaginär ist, so bilden diese Glieder Functionen der Zeit, welche, ohne sich periodisch zu verändern, mit wachsender Zeit an Werth abnehmen. *Die Flüssigkeit kann also ohne das Pendel weder in periodische Schwingungen gerathen, noch auch überhaupt ohne dasselbe dauernd in Bewegung bleiben.*

Anders verhält es sich mit der Bewegung, welche die Pendelkugel und die Flüssigkeit gemeinsam und nach denselben Gesetzen ausführen. Diese Bewegung wird durch particulare Auflösungen angegeben, für welche $n=1$ ist, und deren Parameter λ durch die Gleichung (46.) bestimmt wird.

Dieser Gleichung genügt ebenfalls kein reelles λ. Sie verwandelt sich durch eine leichte Transformation in

$$(60.) \qquad 0 = m\left(\lambda^2\gamma^2+\frac{g}{l\lambda^2\gamma^2}\right)+2\pi\eta ab\frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{K}},$$

worin

$$\mathfrak{J} = \alpha_1 e^{-\lambda a}(\beta_2 e^{\lambda b}-\beta_1 e^{-\lambda b})-\beta_1 e^{-\lambda b}(\alpha_2 e^{\lambda a}-\alpha_1 e^{-\lambda a}),$$

$$\mathfrak{K} = (b e^{-\lambda a}-a e^{-\lambda b})(\beta_2 e^{\lambda b}-\alpha_2 e^{\lambda a})-(b e^{\lambda a}-a e^{\lambda b})(\beta_1 e^{-\lambda b}-\alpha_1 e^{-\lambda a})$$

oder nach den Gleichungen (25.) bis (27.)

$$P_0(r)+Q_0(r) = e^{\lambda r},$$

$$Q_0(r) = e^{-\lambda r},$$

$$P_2(r)+Q_2(r) = 8\left(\lambda^2-3\frac{\lambda}{r}+\frac{3}{r^2}\right)e^{\lambda r},$$

$$Q_2(r) = 8\left(\lambda^2+3\frac{\lambda}{r}+\frac{3}{r^2}\right)e^{-\lambda r}$$

und wegen der Bedeutung von α_1, α_2, β_1, β_2 (Gleichungen (34.))

$$64\mathfrak{J} = a^2b^2\{Q_2(a)P_2(b)-P_2(a)Q_2(b)\},$$

$$8\mathfrak{K} = ab\{(b^2P_2(b)-a^2P_2(a))(a^{-1}Q_0(a)-b^{-1}Q_0(b))-(b^{-1}P_0(b)-a^{-1}P_0(a))(a^2Q_2(a)-b^2Q_2(b))\}$$

gesetzt ist. Wenn nun λ reell und positiv ist, so ist, wie leicht zu erkennen, $\mathfrak{J}$ ebenfalls positiv, desgleichen $\mathfrak{K}$; denn der gefundene Ausdruck stimmt bis auf einen constanten Coefficienten mit der in der Gleichung (59.) enthaltenen Function, von der nachgewiesen wurde, dass sie bei positivem λ ebenfalls von positivem Werthe sei, für $n=1$ überein. Ist λ negativ, so wechseln sowohl $\mathfrak{J}$, als auch $\mathfrak{K}$ das Vorzeichen. Das in der Gleichung (60.) vorkommende Verhältniss $\mathfrak{J}:\mathfrak{K}$ ist demnach für reelle λ immer positiv, desgleichen die ganze rechte Seite der Gleichung. Diese, sowie die mit ihr identische Gleichung (46.) besitzt folglich keine reelle Wurzel λ.

Dagegen können ihr sowohl imaginäre als auch complexe Wurzelwerthe genügen. Die ersteren liefern wiederum zu den Ausdrücken der gesuchten Functionen eine Reihe von Gliedern, welche, ohne sich periodisch zu verändern, mit der Zeit stetig abnehmen. Die letzteren, die complexen Werthe von λ, geben Anlass zum Auftreten periodischer Functionen.

Zuvörderst ist zu bemerken, dass, wenn wirklich complexe Werthe existiren, deren mindestens 4 vorhanden sein müssen oder in einer durch 4 theilbaren Anzahl. Denn wenn ein λ von der Form

$$\gamma\lambda = \mathfrak{a}+\mathfrak{b}i \qquad i=\sqrt{-1}$$

die Gleichung erfüllt, so genügt ihr nicht minder

$$\gamma\lambda = \mathfrak{a}-\mathfrak{b}i,$$

sowie die beiden mit entgegengesetztem Vorzeichen

$$\gamma\lambda = -\mathfrak{a}-\mathfrak{b}i \quad \text{und} \quad \gamma\lambda = -\mathfrak{a}+\mathfrak{b}i.$$

Ich bin also berechtigt, unter $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ nicht bloss reelle, sondern auch positive Grössen zu verstehen.

Giebt es nun ein λ von einer der aufgeführten 4 Formen complexer Grössen, so wird sich in den Ausdrücken der gesuchten Functionen ein Glied finden, das mit dem Factor

$$e^{\gamma^2\lambda^2 t} = (\cos 2\mathfrak{a}\mathfrak{b}\,t \pm i \sin 2\mathfrak{a}\mathfrak{b}\,t)\,e^{(\mathfrak{a}^2-\mathfrak{b}^2)t}$$

multiplicirt ist. Ein solches Glied bedeutet, dass regelmässig periodische Schwingungen entstehen, deren jede in der Zeit

$$T = \frac{\pi}{2\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$$

ausgeführt wird; die Grösse dieser Schwingungen nimmt mit der Zeit zu oder ab, je nachdem $\mathfrak{a}$ grösser als $\mathfrak{b}$, oder $\mathfrak{b}$ grösser als $\mathfrak{a}$ ist.

Ueber diese Frage giebt das erste der Theoreme (57.) Auskunft. Existirt ein complexes λ, für welches

$$\lambda\gamma = \mathfrak{a}+\mathfrak{b}i$$

ist, so muss es auch ein anderes geben, das ich $\mathfrak{l}$ nenne, welches durch

$$\mathfrak{l}\gamma = \mathfrak{a}-\mathfrak{b}i$$

bestimmt ist. Bei dieser Wahl sind in der genannten Gleichung die Producte $\lambda\mathfrak{l}$, $\mathfrak{B}_\lambda\mathfrak{B}_\mathfrak{l}\mathfrak{R}_\lambda\mathfrak{R}_\mathfrak{l}$ und $D_\lambda D_\mathfrak{l}$ positive reelle Grössen; es muss also

$$\gamma^2(\lambda^2+\mathfrak{l}^2) = 2(\mathfrak{a}^2-\mathfrak{b}^2)$$

eine negative Grösse sein. Somit ergiebt sich, *dass die mit der Schwingungsdauer*

$$T = \frac{\pi}{2\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$$

ausgeführten Schwingungen des Pendels und der mitschwingenden Luft nach dem Gesetze einer geometrischen Reihe abnehmen, deren logarithmisches Decrement ist:

$$\varepsilon = (\mathfrak{b}^2 - \mathfrak{a}^2)\,T = \frac{\pi}{2}\,\frac{\mathfrak{b}^2 - \mathfrak{a}^2}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\,.$$

Durch eine ähnliche Benutzung eines andren Integralsatzes kann man über die Grösse der Schwingungszeit T ein Urtheil gewinnen. Es ist vermöge der Differentialgleichungen (16.) und (18.)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr}(\lambda^2 R_\lambda R'_\mathfrak{l} - \mathfrak{l}^2 R_\mathfrak{l} R'_\lambda) &= (\lambda^2 - \mathfrak{l}^2)\Big(R'_\lambda R'_\mathfrak{l} + \frac{n(n+1)}{r^2} R_\lambda R_\mathfrak{l}\Big),\\
\frac{d}{dr}(\lambda^2 \mathfrak{R}_\lambda \mathfrak{R}'_\mathfrak{l} - \mathfrak{l}^2 \mathfrak{R}_\mathfrak{l} \mathfrak{R}'_\lambda) &= (\lambda^2 - \mathfrak{l}^2)\Big(\mathfrak{R}'_\lambda \mathfrak{R}'_\mathfrak{l} + \frac{n(n+1)}{r^2} \mathfrak{R}_\lambda \mathfrak{R}_\mathfrak{l}\Big),\\
\frac{d}{dr}(\mathfrak{R}_\lambda R'_\mathfrak{l}) &= \mathfrak{R}'_\lambda R'_\mathfrak{l} + \frac{n(n+1)}{r^2}\mathfrak{R}_\lambda R_\mathfrak{l},\\
\frac{d}{dr}(\mathfrak{R}_\mathfrak{l} R'_\lambda) &= \mathfrak{R}'_\mathfrak{l} R'_\lambda + \frac{n(n+1)}{r^2}\mathfrak{R}_\mathfrak{l} R_\lambda.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt für $n = 1$, wenn wir für den Augenblick

$$A = B_\lambda R_\lambda + \mathfrak{B}_\lambda \mathfrak{R}_\lambda, \qquad \mathfrak{L} = B_\mathfrak{l} R_\mathfrak{l} + \mathfrak{B}_\mathfrak{l} \mathfrak{R}_\mathfrak{l}$$

zur Abkürzung setzen,

$$\int_a^b dr\left\{A'\mathfrak{L}' + \frac{2}{r^2}A\mathfrak{L}\right\} = \frac{3}{8\pi\varrho} D_\lambda D_\mathfrak{l}\left\{m\,\frac{g}{l}\,\frac{1}{\lambda^2 \mathfrak{l}^2 \gamma^4} - M\right\},$$

wobei der Reihe nach die Formeln (43.), (44.), (52.), (45.) zur Anwendung gebracht worden sind. Setzt man hierin für λ und $\mathfrak{l}$ die obigen Werthe ein, so findet man

$$\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 < \sqrt{\frac{mg}{Ml}}\,.$$

Umsomehr ist also

$$2\mathfrak{a}\mathfrak{b} < \sqrt{\frac{mg}{Ml}}\,,$$

oder es ist, wenn ich

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{Ml}{mg}}$$

setze,

$$T > \tau.$$

Nun aber ist τ derjenige Werth, den man für die Schwingungsdauer eines Pendels von der Länge l und der Masse M, dessen Gewicht in der Luft mg beträgt, durch eine Rechnung findet, in welcher die Bewegung der Luft ver-

nachlässigt wird. Die gefundene Beziehung zwischen T und τ sagt also aus, *es werde die Dauer einer Pendelschwingung dadurch vergrössert, dass das umgebende Medium mit bewegt wird.* Dies ist die von *Dubuat* und *Bessel* beobachtete Thatsache.

Es ist noch zu untersuchen, wie viele solcher complexen Werthe von λ existiren, insbesondre ob es mehr als 4 geben kann. Diese Frage ist von besondrer Wichtigkeit. Denn gäbe es mehr als 4, also etwa 8 oder 12 u. s. w., so würden die Grössen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, folglich auch die Schwingungszeit T und das Decrement ε nicht eindeutig, sondern vieldeutig sein. Es würde also von dem Anfangszustande, d. h. von der Art und Weise, wie das Pendel in Bewegung gesetzt wurde, abhängen, welche Zahl von Schwingungen in der Luft es in einer Minute ausführt.

Da die Gleichung (46.), welche λ bestimmt, eine transcendente ist, so fehlt es an einem Mittel, ihre Wurzeln anders als durch ein Annäherungs-Verfahren aufzufinden. Um zu einem solchen zu gelangen, substituire ich

$$\lambda = hi$$

und erhalte nach einer kleinen Umgestaltung

$$(61.) \quad \begin{cases} 0 = \dfrac{2\pi\eta\gamma^2 ablh^2}{m(h^4\gamma^4 l+g)} \\ + \dfrac{\{a(3-h^2a^2)-b(3-h^2b^2)\}\sin h(b-a)+3h(a^2+b^2)\cos h(b-a)-6hab}{\{(3-h^2a^2)(3-h^2b^2)+9h^2ab\}\sin h(b-a)-\{3hb(3-h^2a^2)-3ha(3-h^2b^2)\}\cos h(b-a)}. \end{cases}$$

Diese Function lässt sich in eine für jeden endlichen Werth von h convergente Reihe von Partialbrüchen entwickeln. Um dies einzusehen, denke man sich die trigonometrischen Functionen $\sin h(b-a)$ und $\cos h(b-a)$ als unendliche Producte entwickelt. Diese Product-Entwicklung, welche für jedes reelle oder imaginäre h von endlichem Werthe convergirt, werde nach dem $\mathfrak{n}^{\text{ten}}$ Gliede abgebrochen: so erhält man eine algebraische Function, welche sich mit unendlich wachsendem $\mathfrak{n}$ der transcendenten nähert. Zerfällt man dann die algebraische Function in Partialbrüche, so ergiebt sich eine Reihe von Partialbrüchen, welche ebenfalls gegen die transcendente Function convergirt.

Statt der obigen Gleichung (61.) kann ich also schreiben

$$(62.) \qquad 0 = \frac{\pi\eta l\gamma^2 h^2}{m(h^4\gamma^4 l+g)} + \frac{H_1}{h^2-h_1^2} + \frac{H_2}{h^2-h_2^2} + \cdots + \frac{H_\mathfrak{n}}{h^2-h_\mathfrak{n}^2} + \cdots$$

Hierin sind h_1, h_2, h_3, ... die Wurzeln der transcendenten Gleichung

$$\operatorname{tang} h(b-a) = \frac{3hb(3-h^2a^2)-3ha(3-h^2b^2)}{(3-h^2a^2)(3-h^2b^2)+9h^2ab};$$

dieselben sind sämmtlich reell; denn diese Gleichung ist eine specielle Form der Gleichung (61.), folglich auch der Gleichung (46.), welche dieselbe annimmt, wenn $m=0$ gesetzt wird; geschieht aber dies, so liefert der soeben bewiesene Satz

$$\mathfrak{a}^2+\mathfrak{b}^2<\sqrt{\frac{mg}{Ml}},$$

dass kein reelles $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, folglich auch kein complexes λ oder h existiren kann. Diese somit reellen Grössen $h_1, h_2, h_3, \ldots$, welche auch als positive aufzufassen sind, haben wir uns ihrer Grösse nach geordnet zu denken. H_n ist eine positive Constante:

$$H_n = \frac{3}{h_n^2}\,\frac{(\sqrt{9+3h_n^2b^2+h_n^4b^4}-\sqrt{9+3h_n^2a^2+h_n^4a^4})^2}{b^5(9+3h_n^2a^2+h_n^4a^4)-a^5(9+3h_n^2b^2+h_n^4b^4)}.$$

Die reellen, sowie imaginären h von endlicher Grösse, welche der Gleichung (62.) genügen, lassen sich durch Annäherung berechnen, wenn man den Umstand benutzt, dass die Grössen $h_1, h_2, h_3, \ldots$ eine Reihe von zunehmenden Gliedern bilden, deren Werth bis ins unendliche wächst. Man breche diese Formel zunächst nach dem Gliede mit der Ordnungszahl n ab und löse die so entstehende algebraische Gleichung nach h^2 auf. Einen so gefundenen Werth kann man verbessern, indem man bei nochmaliger Berechnung das folgende Glied berücksichtigt. Indem man auf diese Weise fortfährt, erhält man den gesuchten Werth bis zu jeder beliebigen Genauigkeit berechnet. Durch dieses Verfahren lassen sich *alle* Wurzeln h von *endlichem* Werthe auffinden. Zu diesen gehören, weil nach den bewiesenen Ungleichungen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ kleiner als eine gewisse endliche Grösse sind, auch die sämmtlichen complexen Wurzeln h oder λ.

Breche ich also die Gleichung (62.) nach dem n^{ten} Gliede der Entwicklung ab, so erhalte ich nach Multiplication mit sämmtlichen $n+1$ Nennern eine Gleichung, welche in Bezug auf h^2 vom $(n+1)^{\text{ten}}$ Grade ist, folglich, nach h^2 aufgelöst, $n+1$ Wurzeln liefert. Von diesen sind mindestens $n-1$ reell und positiv. Denn da die Function in (62.) für $h=h_x+\delta$, wo δ unendlich klein ist, positiv unendlich gross und für $h=h_{x+1}-\delta$ negativ unendlich gross wird, ohne in dem Intervall $h_x<h<h_{x+1}$ unstetig zu werden, so muss zwischen h_x und h_{x+1} ein Werth h liegen, welcher sie verschwinden lässt. Es liegt also zwischen h_1 und h_2, h_2 und h_3, $\ldots$ h_{n-1} und h_n mindestens je eine positive Wurzel h^2. Jene algebraische Gleichung besitzt also höchstens 2 complexe Wurzeln h^2; man findet folglich höchstens 4 complexe Wurzeln λ.

Dies Resultat bleibt richtig für jeden, auch noch so grossen endlichen Werth der Zahl n. Jenes Annäherungs-Verfahren liefert also niemals mehr als 4 complexe λ; da es *alle* liefern muss, so existiren nicht mehr als höchstens 4 complexe λ, welche der Gleichung (46.) genügen. *Diese Gleichung besitzt somit entweder 4 complexe Wurzeln von der Form*

$$\gamma\lambda = \pm(\mathfrak{a} \pm \mathfrak{b}i)$$

oder keine, je nach dem Werthe der in der Gleichung enthaltenen constanten Coefficienten. Auf alle Fälle sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, und durch diese T und ε *eindeutig* bestimmte Grössen. *Die Schwingungsdauer des Pendels und das logarithmische Decrement seiner Amplituden sind immer dieselben, welches auch die anfängliche Ursache seiner Bewegung war.*

Die Regelmässigkeit dieser periodischen, in geometrischer Progression abnehmenden Schwingungen des Pendels wird freilich durch Bewegungen gestört, deren Werth die Glieder mit rein imaginärem λ angeben. Dass diese Störungen jedoch nur kurze Zeit nach dem Beginne der Schwingungen andauern und weit rascher als diese verschwinden, will ich im folgenden Abschnitt für den interessantesten Specialfall beweisen.

7.

Die abgeleiteten Formeln will ich schliesslich auf einen besonderen Fall anwenden und Voraussetzungen einführen, wie sie bei angestellten Experimenten meistens erfüllt sein werden. Zunächst will ich den Raum, in welchem das Pendel schwingt, so gross annehmen, dass seine Wände keinen merklichen Einfluss auf die Schwingungen ausüben; ich werde also die Constante $b = \infty$ setzen. Sodann setze ich voraus, dass die Schwingungen durch eine anfängliche Ablenkung des Pendels aus seiner Gleichgewichtslage hervorgerufen, nicht aber aus einer mitgetheilten ursprünglichen Geschwindigkeit des Pendels oder der dasselbe umgebenden Luft entstanden seien; ich nehme also in den Formeln (48.) die Grösse $c = 0$ und die Function $\Psi = 0$ an. Unter diesen Voraussetzungen will ich die Rechnung soweit durchführen, dass sie unmittelbar mit den Resultaten der Beobachtungen verglichen werden kann.

Durch die Annahme $\Psi = 0$ verschwinden aus den Formeln alle die Glieder, in denen $n > 1$ ist; es bleiben nur diejenigen, in denen $n = 1$ ist. Diese letzteren enthalten theils imaginäre, theils complexe Parameter λ; für beide Arten ergeben sich wesentlich verschiedene Formeln.

Für ein imaginäres $\lambda = hi$ erhält man aus der Formel (58.), wenn man das unendlich grosse b durch die Gleichung (46.) thunlichst eliminirt:

$$D = \frac{2}{b}\frac{mg}{lh}A\frac{G}{F^2+G^2},$$

worin zur Abkürzung

$$F = m\left(h^2\gamma^2 + \frac{g}{lh^2\gamma^2}\right) - 2\pi\eta a(3 - h^2a^2),$$

$$G = 6\pi\eta h a^2$$

gesetzt worden ist. Das hierin vorkommende h genügt nach (61.) der Gleichung

$$\operatorname{tang} h(b-a) = \frac{G}{F}.$$

Genügt dieser Gleichung ein gewisses h, so wird das unendlich wenig grössere

$$h + dh = h + \frac{\pi}{b-a}$$

sie ebenfalls bis auf verschwindend kleine Grössen erfüllen; h ist also eine stetig wachsende Grösse, deren Differential

$$dh = \frac{\pi}{b-a} = \frac{\pi}{b}$$

ist. Die Grenzen, in denen sich diese Grösse verändert, sind, da die von negativen Werthen abhängenden Terme mit den durch die gleichen positiven Werthe bestimmten zusammenfallen, 0 und ∞. Hiernach wird

$$D = \frac{2}{\pi}\frac{mg}{l}A\frac{dh}{h}\frac{G}{F^2+G^2}.$$

Von den 4 complex-imaginären λ sind, falls sie existiren, aus dem soeben angeführten Grunde, im Endresultate nur 2 zu berücksichtigen, etwa

$$\gamma\lambda = \mathfrak{a} \pm \mathfrak{b}i,$$

wo $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ positiv sind. Die Gleichung (46.) verwandelt sich unter dieser Bedingung in die algebraische Gleichung vierten Grades

$$0 = m\left(\lambda^2\gamma^2 + \frac{g}{l}\frac{1}{\lambda^2\gamma^2}\right) + 2\pi\eta a(3 + 3\lambda a + \lambda^2 a^2)$$

oder

$$(63.)\qquad 0 = \mu\lambda^2\gamma^2 + m\frac{g}{l}\frac{1}{\lambda^2\gamma^2} + 6\pi\eta a(1 + \lambda a),$$

worin bedeutet

$$\mu = M + \tfrac{1}{2}M' = M + \tfrac{2}{3}\pi\varrho a^3,$$

$$m = M - M' = M - \tfrac{4}{3}\pi\varrho a^3.$$

Zwar besitzt diese Gleichung 4 Wurzeln λ; doch befinden sich unter ihnen,

die ich λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 nennen will, nur 2, welche der geforderten Bedingung, dass $\mathfrak{a}$ positiv sei, Genüge leisten; dieses, sowie auch, dass die 2 Wurzeln von der Beschaffenheit

$$\gamma\lambda_1 = \mathfrak{a}+\mathfrak{b}i, \qquad \gamma\lambda_2 = \mathfrak{a}-\mathfrak{b}i$$

unter allen Umständen existiren, lässt sich aus den Vorzeichen der Glieder der Gleichung (63.) leicht erkennen. Die beiden andern, zunächst nicht in Betracht kommenden Wurzeln sind entweder von der Form

$$\gamma\lambda_3 = -\mathfrak{a}_1+\mathfrak{b}_1 i, \qquad \gamma\lambda_4 = -\mathfrak{a}_1-\mathfrak{b}_1 i,$$

oder sie sind beide reell und negativ.

Für jene beiden complexen Parameter $\gamma\lambda = \mathfrak{a}\pm\mathfrak{b}i$ findet man aus der Formel (58.) unter Rücksicht auf (33.) und (63.)

$$D\left\{2m\frac{g}{l}+3\pi\eta\gamma^2\lambda^2 a(2+\lambda a)\right\} = \gamma^2\lambda^2 m\frac{g}{l}A.$$

Durch Benutzung dieses und des für rein imaginäre λ gefundenen Werthes von D erhält man als vollständigen Ausdruck für die Ablenkung der Kugel aus ihrer Gleichgewichtslage zur Zeit t

$$(64.) \qquad \xi = \{K\cos 2\mathfrak{a}\mathfrak{b}t - L\sin 2\mathfrak{a}\mathfrak{b}t\}e^{-(\mathfrak{b}^2-\mathfrak{a}^2)t} - \frac{2}{\pi}m\frac{g}{l}A\int_0^\infty \frac{dh}{\gamma^2 h^3}\frac{G}{F^2+G^2}e^{-h^2\gamma^2 t},$$

worin zur Abkürzung

$$K\pm Li = \frac{mgA}{mg+\frac{3}{2}\pi\,\eta a l(\mathfrak{a}^2-\mathfrak{b}^2\pm 2\mathfrak{a}\mathfrak{b}i)(2+(\mathfrak{a}\pm\mathfrak{b}i)a\gamma^{-1})}$$

gesetzt worden ist.

Das Integral in der Gleichung (64.) steht in einer einfachen Beziehung zu dem ersten Gliede, welche man erkennt, wenn man die algebraische Function im Integral in Partialbrüche zerfällt. Setzt man nämlich den Nenner

$$F^2+G^2 = 0,$$

so erhält man damit eine Gleichung vierten Grades in Bezug auf h^2, deren Wurzeln bis auf das negative Vorzeichen den Quadraten der Wurzeln λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 der Gleichung (63.) gleich sind. Man erhält also durch Zerfällung in Partialbrüche das Integral in 4 Integrale von der Form

$$\int_0^\infty \frac{dh}{h^2+\lambda^2}e^{-h^2\gamma^2 t}$$

zerlegt, worin λ einen jener 4 Werthe besitzt. Man vereinfacht diese Integrale, indem man sie durch die Lehrsätze

$$\int_0^\infty d\varphi \cos h\varphi . e^{-\lambda\varphi} = \frac{\lambda}{h^2+\lambda^2}, \qquad (\gamma\lambda = \mathfrak{a} \pm \mathfrak{b}i),$$

$$\int_0^\infty d\varphi \cos h\varphi . e^{\lambda\varphi} = \frac{-\lambda}{h^2+\lambda^2}, \qquad (\lambda = \lambda_3 \text{ oder } \lambda_4)$$

in Doppelintegrale verwandelt, sie nach Vertauschung der Integrationsordnung einmal integrirt und endlich eine geringfügige Veränderung der Integrations-Variabeln einführt.

Bei der Angabe des Resultats dieser Rechnung mache ich die Annahme, dass die Reibungsconstante η des Mediums einen geringen Werth besitze. Unter dieser Voraussetzung sind auch λ_3 und λ_4 complexe Grössen. So erhalte ich schliesslich für die Ablenkung der Kugel den Ausdruck

$$(65.) \quad \begin{cases} \xi = e^{\mathfrak{a}^2 t}\{K(e^{-\mathfrak{b}^2 t}\cos 2\mathfrak{a}\mathfrak{b}t - C(\mathfrak{a}\mathfrak{b}t))\} + K_1 e^{\mathfrak{a}_1^2 t} C(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1 t) \\ \qquad -Le^{\mathfrak{a}^2 t}(e^{-\mathfrak{b}^2 t}\sin 2\mathfrak{a}\mathfrak{b}t + S(\mathfrak{a}\mathfrak{b}t)) + L_1 e^{\mathfrak{a}_1^2 t} S(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1 t), \end{cases}$$

worin zur Abkürzung

$$C(\mathfrak{a}\mathfrak{b}t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathfrak{a}\sqrt{t}}^\infty d\varphi\, e^{-\varphi^2}\cos 2\mathfrak{b}(\varphi\sqrt{t} - \mathfrak{a}t),$$

$$S(\mathfrak{a}\mathfrak{b}t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathfrak{a}\sqrt{t}}^\infty d\varphi\, e^{-\varphi^2}\sin 2\mathfrak{b}(\varphi\sqrt{t} - \mathfrak{a}t)$$

und analog einer früheren Formel

$$K_1 \pm L_1 i = \frac{mgA}{mg + \frac{3}{2}\pi\eta a l(\mathfrak{a}_1^2 - \mathfrak{b}_1^2 \pm 2\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 i)(2 - (\mathfrak{a}_1 \pm \mathfrak{b}_1 i)a\gamma^{-1})}$$

gesetzt worden ist.

Es ist nun leicht einzusehen, dass sich $\mathfrak{a}_1$ von $\mathfrak{a}$, und $\mathfrak{b}_1$ von $\mathfrak{b}$ nur um Grössen von der Ordnung der kleinen Grösse η unterscheiden; denn man hat aus der Gleichung (63.) unter Vernachlässigung von η

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} = \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{b}_1 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\left(\frac{mg}{\mu l}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Es kann sich also K_1 von K und L_1 von L auch nur um Grössen von der Ordnung η unterscheiden. Daraus folgt, dass in der Formel (65.) die Summe der Glieder, welche Integralfunctionen enthalten, verglichen mit den trigonometrischen Functionen, kleine Grössen von der Ordnung der Reibungsconstanten sind.

Dazu kommt ein zweiter Grund. Jene Glieder sind gegen die trigonometrischen verschwindend klein, wenn angenommen wird, dass seit dem Beginne der Schwingungen eine erheblich lange Zeit t verflossen sei. Denn

es ist sowohl $C(\mathfrak{a}\mathfrak{b}t)$ als auch $S(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\,t)$ kleiner als das Integral

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathfrak{a}\sqrt{t}}^{\infty} d\varphi\, e^{-\varphi^2},$$

welches für mässig grosse Werthe von $\mathfrak{a}^2 t$ gegen die Exponentialfunction $e^{-\mathfrak{a}^2 t}$, folglich auch $e^{-\mathfrak{b}^2 t}$ verschwindend klein wird.

Aus beiden Gründen ist es für den Zweck der Anwendung auf die Beobachtung gestattet, in der Formel (65.) jene kleinen Glieder zu vernachlässigen und zu setzen

$$\xi = \{K\cos 2\mathfrak{a}\mathfrak{b}t - L\sin 2\mathfrak{a}\mathfrak{b}t\}\, e^{-(\mathfrak{b}^2-\mathfrak{a}^2)t},$$

falls die Bewegung hinreichend lange angedauert hat. *Dann also bewegt sich das Pendel periodisch; seine Schwingungszeit beträgt*

$$(66.) \qquad T = \frac{\pi}{2\mathfrak{a}\mathfrak{b}}.$$

Die Amplituden nehmen nach dem Gesetze einer geometrischen Reihe ab, deren logarithmisches Decrement

$$(67.) \qquad \varepsilon = (\mathfrak{b}^2-\mathfrak{a}^2)T = \frac{\mathfrak{b}^2-\mathfrak{a}^2}{2\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\pi$$

in natürlichen Logarithmen beträgt.

Die Werthe dieser beiden Grössen T und ε sind aus der Gleichung (63.) zu berechnen. Man hat in derselben zu setzen

$$\gamma^2\lambda^2 = (\mathfrak{a}\pm\mathfrak{b}i)^2 = \frac{-\varepsilon\pm\pi i}{T},$$

also

$$\mathfrak{a}^2 = \frac{\sqrt{\pi^2+\varepsilon^2}-\varepsilon}{2T}, \qquad \mathfrak{b}^2 = \frac{\sqrt{\pi^2+\varepsilon^2}+\varepsilon}{2T}.$$

Dadurch findet man zur Bestimmung von T und ε

$$(M+kM')\frac{\pi^2+\varepsilon^2}{T^2} = m\frac{g}{l},$$

$$(M+\tfrac{1}{2}(k+\tfrac{1}{2})M')\varepsilon = \frac{\pi}{2}k_1 M',$$

wenn zur Abkürzung

$$k = \tfrac{1}{2}+\frac{9}{4\nu a}\sqrt{\frac{\sqrt{\pi^2+\varepsilon^2}+\varepsilon}{\pi}},$$

$$k_1 = \frac{9}{4\nu a}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{\pi^2+\varepsilon^2}-\varepsilon}{\pi}}+\frac{1}{\nu a}\right),$$

$$(68.) \qquad \nu^2 = \frac{\pi}{2\gamma^2 T}$$

gesetzt wird.

Unbedenklich darf man in diesen Formeln ε^2 und Grössen gleicher Ordnung, wie z. B. $k_1\varepsilon$, gegen π^2 vernachlässigen. Dann erhält man

$$(69.)\quad \begin{cases} \dfrac{T^2}{\pi^2} = \dfrac{(M+kM')l}{mg}, \\ \varepsilon = \dfrac{\frac{1}{2}\pi k_1 M'}{M+\frac{1}{2}(k+\frac{1}{2})M'}, \end{cases}$$

worin

$$(70.)\quad \begin{cases} k = \frac{1}{2}+\dfrac{9}{4\nu a}, \\ k_1 = \dfrac{9}{4\nu a}\left(1+\dfrac{1}{\nu a}-\frac{1}{2}\dfrac{\varepsilon}{\pi}\right) \end{cases}$$

zu setzen sind. Die erste Formel (69.) unterscheidet sich von der von *Bessel* *) aufgestellten der Form nach nicht, wohl aber darin, dass k nicht constant, sondern von der Schwingungsdauer abhängig ist. Den Werth dieses Coefficienten k hat bereits *Stokes* **) ebenso gefunden, wie ihn die erste Formel (70.) angiebt.

Die zweite Formel (69.), welche das logarithmische Decrement angiebt, stimmt nicht mit der von *Stokes* ***) aufgestellten überein. Indess will ich nicht unterlassen, zu erwähnen, dass die Formel

$$\varepsilon = \frac{\frac{1}{2}\pi k' M'}{M+kM'},$$

in welcher

$$k' = \frac{9}{4\nu a}\left(1+\frac{1}{\nu a}+\frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{\pi}\right)$$

gesetzt ist, mit derselben Genauigkeit richtig ist, wie jene, und dass diese Formel mit der *Stokes*schen zusammenfällt, wenn in k' noch ε gegen π vernachlässigt wird.

Um von diesen Schlussformeln der Theorie diejenigen, welche die Schwingungsdauer bestimmen, experimentell zu prüfen, bedarf es nicht der Anstellung neuer Beobachtungen, da *Bessels* unübertreffliche Messungen vorliegen.

In seiner ersten Abhandlung †) sieht allerdings *Bessel* den Coefficienten k als unabhängig von der Schwingungsdauer an. Doch erkannte er später ††), dass der Werth desselben für ein kürzeres Pendel, also von kleinerer Schwin-

---

*) Abh. d. Berl. Akad. 1826. Unters. ü. d. Länge des Secundenpendels. S. 36.

**) Cambridge phil. Transactions. Vol. 9 Part 2. pag. [32.] Formel (52.).

***) Ebendaselbst. Formel (53.).

†) Abh. d. Berl. Akad. 1826. Unters. ü. d. Länge des Secundenpendels.

††) Vers. üb. die Kraft der Erde. Abh. d. Berl. Akad. 1830.

gungszeit, geringer ausfällt. Er berechnete aus seinen Königsberger Beobachtungen für das kürzere Pendel, dessen Schwingungsdauer 1,001 Secunden betrug, $k = 0,75487$, für das längere, dessen Schwingungszeit 1,721 Secunden war, $k = 0,9519$ *).

Ich berechne den Werth derselben Grössen aus den vorstehenden Formeln. Dazu habe ich den Radius der Pendelkugel $a = 12,06$ pariser Linien, d. h. gleich dem Mittelwerthe der Halbmesser beider Kugeln zu setzen**). Von den bis jetzt ausgeführten directen Bestimmungen des Reibungscoefficienten der Luft ist die von *Maxwell****) angestellte vermuthlich die genaueste. Ich nehme nach seinen Messungen $\eta = 0,000200 = 0,168 . \varrho$ an. Diese Zahlen enthalten als Einheiten das Quadratcentimeter, die Dichtigkeit des Wassers und die Zeitsecunde. Aus diesen Daten habe ich für das kurze Pendel $k = 0,770$ und für das lange $k = 0,854$ berechnet. Die Uebereinstimmung zwischen dieser Rechnung und der Beobachtung *Bessels* ist für das kurze Pendel sehr befriedigend. Die Abweichung, welche sich für das lange Pendel zeigt, findet ohne Zweifel darin, dass der Einfluss der Luft auf den Pendelfaden in der Rechnung nicht berücksichtigt worden ist, ihre natürliche Erklärung.

Andrerseits fehlte es bisher an geeigneten Beobachtungen zur Prüfung des Gesetzes, nach welchem die Amplituden des schwingenden Pendels in Folge der Luftreibung abnehmen. Ich habe daher zu diesem Zwecke Beobachtungen angestellt, und zwar benutzte ich in der Absicht, möglichst kleine Schwingungsbogen mit grosser Genauigkeit messen zu können, drei Pendel von ausserordentlicher Länge. Um die Abnahme möglichst stark und dadurch genauer messbar zu machen, bediente ich mich einer grossen Kugel aus leichter Masse, aus Holz.

Mit diesem Apparate fand ich eine einfache Regelmässigkeit, zwar nicht das Gesetz einer geometrischen Reihe, jedoch ein solches, dass es sich mit abnehmenden Bogen dem einer geometrischen Reihe mehr und mehr nähert. Die vorstehende Theorie, welche unendlich kleine Amplituden voraussetzt, bedarf also für endliche Amplituden einer Verbesserung.

Das Gesetz, dem meine Beobachtungen genügen, ist in der Formel

$$\log\left(\frac{\Phi}{\varphi}\,\frac{1+\delta\varphi}{1+\delta\Phi}\right) = n\varepsilon,$$

*) Ebendaselbst S. 95.

**) Unters. S. 130 u. 141.

***) Philos. Transactions for 1866.

welche ich einer Abhandlung von *Gronau* *) entnommen habe, enthalten. Hierin ist Φ der anfängliche Schwingungbogen, φ die Grösse desselben Bogens nach n Schwingungen, δ und ε Constante; letztere fällt für unendlich kleine Werthe von Φ und φ mit dem logarithmischen Decrement zusammen. Bei der Berechnung meiner Beobachtungen verfuhr ich daher der Art, dass ich ε nach der obigen Formel für das logarithmische Decrement theoretisch berechnete und dann die Reihen meiner Beobachtungen benutzte, δ zu bestimmen. Auf diese Weise fand ich das theoretisch noch nicht bewiesene Gesetz, dass die Constante δ der Schwingungszeit proportional ist. Näheres werde ich nächstens in *Poggendorffs* Annalen mittheilen.

*) Ueber die Bewegung schwingender Körper im widerstehenden Mittel. (Programm.) Danzig 1850.

Breslau im October 1870.

Ueber einfache singuläre Punkte linearer Differentialgleichungen.

(Von Herrn *L. Pochhammer*.)

In einer linearen Differentialgleichung, bei welcher der Coefficient der höchsten Ableitung gleich Eins gemacht ist, werden, nach Herrn *Weierstrass*, diejenigen Werthe der unabhängigen Veränderlichen, für welche einer oder mehrere der Coefficienten unendlich sind, als *singuläre* Werthe oder Punkte bezeichnet. Für die Umgebungen aller nicht singulären Punkte sind dann die Reihenentwicklungen der Integralfunction bekannt, da man stets eine eindeutige convergente Reihe mit n willkürlichen Constanten als Lösung der Differentialgleichung erhält. Dagegen ist es bisher nur in sehr wenigen Fällen möglich gewesen, das Verhalten der Function bei den singulären Punkten festzustellen. Es ist mehrfach der umgekehrte Weg eingeschlagen worden, aus gewissen Anforderungen, welche man an die Integralfunction stellte, die Differentialgleichung derselben zu gewinnen; indessen die wichtigere Aufgabe bleibt doch immer, aus einer *gegebenen* Differentialgleichung die Eigenschaften der Integralfunction zu bestimmen, was zunächst die Auffindung der Reihenentwicklungen für die Umgebungen der singulären Punkte erfordert.

Es soll im Folgenden ein besonders einfacher Fall, welcher ohne Weiteres in den Vordergrund tritt, behandelt werden, nämlich der, wo die Coefficienten nur wie eine *erste negative Potenz* unendlich werden. Wenn man einer Differentialgleichung die Form geben kann

$$(x-a)\frac{d^n y}{dx^n} = E_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+E_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots+E_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+E_n(x)y,$$

wo $E_1(x)$, $E_2(x)$, ... $E_n(x)$ Functionen, die *in der Umgebung von a eindeutig und stetig* sind, bedeuten: so soll, der Abkürzung halber, der Werth a ein *einfacher singulärer* Werth oder Punkt heissen. Hat z. B. eine lineare Differentialgleichung ganze rationale Coefficienten, so sind alle einfachen Wurzeln des Coefficienten der höchsten Ableitung einfache singuläre Werthe der Differentialgleichung. Der Werth $E_1(a)$ wird die *zugehörige Zahl* des einfachen singulären Punktes a genannt. Man bezeichnet hier $E_1(a)$ kurz durch b.

Für die obige Differentialgleichung gilt dann in Bezug auf die Umgebung des einfachen singulären Punktes a der folgende Satz:

1) Es existirt stets eine *convergente*, $n-1$ *willkürliche Constanten enthaltende Reihe*

$$y = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots,$$

welche der Differentialgleichung genügt. Ist die zugehörige Zahl b weder gleich einer positiven ganzen Zahl noch gleich Null, so nehmen die $n-1$ *ersten* Coefficienten c_0, c_1, ... c_{n-2} beliebige Werthe an. Ist aber b eine positive ganze Zahl oder Null, so bleibt der $b+n^{\text{te}}$ Coefficient, c_{b+n-1}, willkürlich, und es sind in Folge dessen unter den $b+n-1$ ersten Coefficienten nur $n-2$ willkürliche Constanten vorhanden.

2) Das n^{te} partikuläre Integral wird, ausser wenn b ganzzahlig ist, durch das Product

$$(x-a)^{b+n-1}\{C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \cdots\}$$

dargestellt, in welchem die *Reihe convergent*, und C_0 *von Null verschieden* ist. Ist jedoch b eine positive oder negative ganze Zahl, die Null einbegriffen, so enthält das n^{te} Integral im Allgemeinen logarithmische Glieder; in speciellen Fällen können letztere fortfallen.

Die beiden Theile des Satzes sollen in den folgenden zwei Abschnitten nacheinander behandelt werden.

I.

Um den ersten Theil des behaupteten Satzes zu beweisen, setzt man in die gegebene Differentialgleichung

$$(1.)\quad (x-a)\frac{d^n y}{dx^n} = E_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + E_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + E_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + E_n(x)y$$

für y die Reihe

$$(2.)\quad y = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

ein, und entwickelt die Gleichungen für die Coefficienten c. Man hat dann zu zeigen, 1) dass $n-1$ der Coefficienten c willkürlich bleiben, 2) dass alle übrigen in eindeutiger Weise als Functionen dieser $n-1$ bestimmt sind, 3) dass die Reihe convergent ist.

Für die Ableitungen von y ergeben sich die Ausdrücke:

$$\frac{d^\nu y}{dx^\nu} = \nu!\{(\nu)_\nu c_\nu + (\nu+1)_\nu c_{\nu+1}(x-a) + (\nu+2)_\nu c_{\nu+2}(x-a)^2 + \cdots\},$$

in welchen die eingeklammerten, mit einem Index versehenen Constanten Binomialcoefficienten bedeuten. Nachdem man auch für die Functionen $E_i(x)$ die nach der Voraussetzung convergenten Entwicklungen

$$E_i(a) + E_i'(a)\frac{x-a}{1} + E_i''(a)\frac{(x-a)^2}{1.2} + \cdots$$

eingesetzt hat, sind in der Gleichung (1.) die Factoren der einzelnen Potenzen von $x-a$ gleich Null zu setzen.

Es ist für die Differentialgleichung (1.) charakteristisch, dass in den so erhaltenen Gleichungen dasjenige c, welches den höchsten Index hat, stets nur durch die beiden ersten Summanden

$$(x-a)\frac{d^n y}{dx^n} \quad \text{und} \quad E_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

geliefert wird; in Folge dessen hat das c mit höchstem Index einen ausschliesslich aus ganzen Zahlen und dem Werthe b zusammengesetzten Factor.

Man gewinnt für die Grössen c das folgende Gleichungssystem:

$$-(n-1)_{n-1}(n-1)!\,b\,c_{n-1} = (n-2)_{n-2}(n-2)!\,E_2(a)\,c_{n-2}+\cdots+(1)_1 E_{n-1}(a)c_1+E_n(a)c_0,$$

$$(n)_{n-1}(n-1)!(1-b)\,c_n = \left\{(n-1)_{n-1}(n-1)!\frac{E_1'(a)}{1}+(n-1)_{n-2}(n-2)!\,E_2(a)\right\}c_{n-1}$$
$$+\left\{(n-2)_{n-2}(n-2)!\frac{E_2'(a)}{1}+(n-2)_{n-3}(n-3)!\,E_3(a)\right\}c_{n-2}+\cdots+\frac{E_n'(a)}{1}c_0,$$

$$(n+1)_{n-1}(n-1)!(2-b)\,c_{n+1} = \left\{(n)_{n-1}(n-1)!\frac{E_1'(a)}{1}+(n)_{n-2}(n-2)!\,E_2(a)\right\}c_n$$
$$+\left\{(n-1)_{n-1}(n-1)!\frac{E_1''(a)}{1.2}+(n-1)_{n-2}(n-2)!\frac{E_2'(a)}{1}+(n-1)_{n-3}(n-3)!E_3(a)\right\}c_{n-1}$$
$$+\cdots+\frac{E_n''(a)}{1.2}c_0,$$

. . . .

$$(n+m-1)_{n-1}(n-1)!(m-b)c_{n+m-1}$$
$$= \left\{(n+m-2)_{n-1}(n-1)!\frac{E_1'(a)}{1}+(n+m-2)_{n-2}(n-2)!\,E_2(a)\right\}c_{n+m-2}+\cdots+\frac{E_n^{(m)}(a)}{m!}c_0,$$

etc.

Die erste Gleichung giebt c_{n-1} als lineare Function der $n-1$ Grössen c_0, c_1, ... c_{n-2}, ausgenommen den Fall, wo b gleich Null ist. Die zweite Gleichung bestimmt c_n, ausser wenn b gleich 1, die dritte c_{n+1}, ausser wenn b gleich 2 ist. Allgemein ergiebt sich c_{n+m-1} als lineare Function der c mit niederem Index, wenn nicht $b=m$ ist.

Hieraus folgt, dass wenn b nicht eine positive ganze Zahl oder Null ist, die $n-1$ Grössen c_0, c_1, ... c_{n-2} willkürliche Werthe annehmen, dass aber sämmtliche übrigen Coefficienten c_{n-1}, c_n, c_{n+1} etc. in eindeutiger Weise durch c_0, c_1, ... c_{n-2} ausgedrückt sind. Ist b eine positive ganze Zahl oder Null, so ist der Coefficient c_{b+n-1} nicht durch die Coefficienten mit niederem Index ausdrückbar.

Um die Convergenz der Reihe (2.) darzuthun, setzt man zunächst voraus, dass der reelle Theil von b negativ sei. Der Beweis der Convergenz wird analog dem von *Cauchy*, so wie von den Herren *Briot, Bouquet* *) und *Fuchs* **) angewendeten Verfahren, dadurch geliefert, dass die Reihe für y mit einer einfacheren Reihe verglichen wird, welche weniger stark convergirt und immer positive Glieder hat. Das Auftreten eines von b abhängigen Nenners erfordert hier gewisse Modificationen der Methode.

In den Bestimmungsgleichungen der Grössen c findet sich $E_1(a)$ oder b stets nur auf der linken Seite, während alle übrigen Functionalwerthe $E_2(a), \ldots E_n(a), E_1'(a), E_2'(a), \ldots E_n'(a), E_1''(a)$ etc. ausschliesslich auf der rechten Seite vorkommen; hieraus folgt, dass aus letzteren der Zähler, aus b dagegen der Nenner der Coefficienten c gebildet wird. Um die Reihe (2.) mit einer Reihe, deren Glieder absolut grösser sind, zu vergleichen, vergrössert man die Zähler der Coefficienten, während man die Nenner verkleinert oder unverändert lässt.

Es sei $b = -p+qi$, wo p positiv: dann ist der Factor von c_{n+m-1} in derjenigen Gleichung, welche diesen Coefficienten bestimmt, gleich

$$(n+m-1)_{n-1}(n-1)!(m+p-qi).$$

Der Modul des letzteren Ausdrucks verkleinert sich, wenn der imaginäre Theil ganz fortgelassen, also b durch $-p$ ersetzt wird. Ist b reell, so bleibt der erwähnte Factor unverändert.

Wenn man sodann in den Gleichungen an Stelle von $c_0, c_1, \ldots c_{n-2}$ reelle positive Werthe $k_0, k_1, \ldots k_{n-2}$, welche grösser als die Moduln von $c_0, c_1, \ldots c_{n-2}$ sind, einführt, und alle Ausdrücke $E_i(a)$, $E_i'(a)$, $E_i''(a)$ etc., mit Ausnahme von $E_1(a)$, durch reelle positive Werthe ersetzt, die grösser als die Moduln der bisherigen Werthe sind: so werden die neuen Coefficienten, welche k_{n-1}, k_n, k_{n+1} etc. heissen mögen, sämmtlich reell, positiv und grösser als die Moduln der Coefficienten c_{n-1}, c_n, c_{n+1} etc. sein. Denn in allen Fällen ist der Zähler vergrössert, der Nenner verkleinert oder unverändert gelassen worden, und es kommen, da auch p als positiv vorausgesetzt ist, nur reelle positive Grössen vor. Kann man folglich beweisen, dass eine derartig gebildete Reihe

$$k_0 + k_1(x-a) + \cdots + k_{n-1}(x-a)^{n-1} + k_n(x-a)^n + \cdots$$

convergent ist, so gilt dies um so mehr von der Reihe (2.).

*) Journ. de l'École polyt., cah. 36.

**) Dieses Journal Bd. 66.

Um nun die Grössen $E_i(a)$, $E_i'(a)$, $E_i''(a)$ etc. durch reelle positive Ausdrücke, welche grösser als ihre Moduln sind, zu ersetzen, wendet man den bekannten Satz an, dass für das ganze Gebiet des um einen Punkt a mit einem Radius r beschriebenen Kreises und für ein beliebiges ν die Ungleichheit besteht

$$\left[\frac{d^\nu}{dx^\nu}\frac{M_i}{1-\frac{x-a}{r}}\right]_{x=a} > \operatorname{mod} E_i^{(\nu)}(a),$$

wenn M_i dem grössten Werthe des Moduls von $E_i(x)$ auf jener Kreisfläche gleich ist oder ihn übertrifft *). Man denke sich demnach für eine Variable u eine der Gleichung (1.) analoge Differentialgleichung gebildet, in welcher die Functionen $E_i(x)$, für $i=2, 3, \dots n$, durch die Quotienten $\frac{M_i}{1-\frac{x-a}{r}}$ ersetzt sind.

An Stelle von $E_1(x)$ hat man eine Function zu wählen, deren Ableitungen für $x=a$ zwar grösser als $E_1'(a)$, $E_1''(a)$ etc. sind, die aber selbst für $x=a$ den Werth $-p$ annimmt. Eine solche Function ist der Ausdruck

$$\frac{M_1}{1-\frac{x-a}{r}}-M_1-p,$$

in welchem M_1 wieder die oben angeführte Bedeutung hat.

Man gewinnt somit den Schluss, dass, wenn die Differentialgleichung

$$(3.)\quad \begin{cases} (x-a)\frac{d^n u}{dx^n} = \left\{\frac{M_1}{1-\frac{x-a}{r}}-M_1-p\right\}\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}+\frac{M_2}{1-\frac{x-a}{r}}\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} \\ \quad +\frac{M_3}{1-\frac{x-a}{r}}\frac{d^{n-3}u}{dx^{n-3}}+\dots+\frac{M_{n-1}}{1-\frac{x-a}{r}}\frac{du}{dx}+\frac{M_n}{1-\frac{x-a}{r}}u \end{cases}$$

eine convergente Reihe

$$(4.)\quad u = k_0+k_1(x-a)+\dots+k_{n-1}(x-a)^{n-1}+k_n(x-a)^n+\cdots$$

mit $n-1$ willkürlichen Constanten zum Integral hat, die Reihe (2.) jedenfalls auch convergent ist. Es bleibt folglich nur übrig, die Convergenz der Reihe (4.) zu beweisen.

Man multiplicire die Gleichung (3.) mit $1-\frac{x-a}{r}$, wodurch sämmtliche

---

*) Cfr. *Briot* et *Bouquet*, Fonct. doubl. périod., Seite 44.

Coefficienten derselben mit Ausnahme der beiden ersten constant werden, und führe statt x die Variable z ein, indem man setzt

$$\frac{x-a}{r} = z, \qquad dx = r\,dz.$$

Auf diese Weise nimmt die Gleichung (3.), wenn man M_1+p kurz durch M_1' bezeichnet, die Gestalt an:

$$(5.) \quad \begin{cases} (z-z^2)\dfrac{d^n u}{dz^n} = (-p+M_1'z)\dfrac{d^{n-1}u}{dz^{n-1}} + M_2 r \dfrac{d^{n-2}u}{dz^{n-2}} \\ \quad + M_3 r^2 \dfrac{d^{n-3}u}{dz^{n-3}} + \cdots + M_{n-1} r^{n-2}\dfrac{du}{dz} + M_n r^{n-1} u. \end{cases}$$

Die Reihe (4.) geht, indem $k_\nu = \frac{K_\nu}{r^\nu}$ genommen wird, über in:

$$(6.) \qquad u = K_0 + K_1 z + \cdots + K_{n-1} z^{n-1} + K_n z^n + \cdots.$$

Setzt man die Reihe (6.) in die Differentialgleichung (5.) ein, so lautet die erste der für die Constanten K sich ergebenden Gleichungen:

$$(n-1)_{n-1}(n-1)!\,p K_{n-1}$$
$$= (n-2)_{n-2}(n-2)!\,M_2 r K_{n-2} + (n-3)_{n-3}(n-3)!\,M_3 r^2 K_{n-3} + \cdots + M_n r^{n-1} K_0,$$

und allgemein erhält man:

$$(7.) \quad \begin{cases} (n+m)_{n-1}(n-1)!(m+p+1)K_{n+m} \\ = \{(n+m-1)_n n! + (n+m-1)_{n-1}(n-1)!\,M_1' + (n+m-1)_{n-2}(n-2)!\,M_2 r\} K_{n+m-1} \\ + (n+m-2)_{n-3}(n-3)!\,M_3 r^2 K_{n+m-2} + (n+m-3)_{n-4}(n-4)!\,M_4 r^3 K_{n+m-3} + \cdots + M_n r^{n-1} K_{m+1}. \end{cases}$$

Aus der Gleichung (7.) ist der Grenzwerth des Quotienten aus K_{n+m} und K_{n+m-1} für $m=\infty$ zu berechnen. Man dividirt die Gleichung durch K_{n+m-1} und hat zunächst zu beweisen, dass die Quotienten

$$\frac{K_{n+m-2}}{K_{n+m-1}}, \quad \frac{K_{n+m-3}}{K_{n+m-1}}, \quad \ldots \quad \frac{K_{m+1}}{K_{n+m-1}}$$

für $m=\infty$ endlich bleiben. Da alle vorkommenden Grössen reell und positiv sind, kann man die Gleichung (7.) schreiben:

$$(n+m)_{n-1}(n-1)!(m+p+1)K_{n+m} = \{(n+m-1)_n n! + (n+m-1)_{n-1}(n-1)!\,M_1'\} K_{n+m-1} + P,$$

oder

$$\frac{K_{n+m}}{K_{n+m-1}} = \frac{(m+1)m + (m+1)M_1'}{(n+m)(m+p+1)} + P',$$

wo durch P und P' reelle positive Grössen bezeichnet werden. Es ist aber:

$$\frac{(m+1)m+(m+1)M_1'}{(n+m)(m+p+1)} = \frac{m^2+(M_1'+1)m+M_1'}{m^2+(p+n+1)m+np+n};$$

nimmt man also $M_1' > np+n$, was durchaus erlaubt ist, da M_1' hinsichtlich seiner Grösse nicht beschränkt wurde, so ist der letztere Quotient grösser als 1, und es folgt für ein beliebiges m

$$K_{n+m} > K_{n+m-1}.$$

Da somit die Grössen K mit wachsendem Index grösser werden, so sind alle Quotienten

$$\frac{K_{n+m-2}}{K_{n+m-1}}, \quad \frac{K_{n+m-3}}{K_{n+m-1}}, \quad \dots \quad \frac{K_{m+1}}{K_{n+m-1}}$$

kleiner als Eins.

Zur Bestimmung des Grenzwerthes von $\frac{K_{n+m}}{K_{n+m-1}}$ erhält man aus (7.):

$$\frac{K_{n+m}}{K_{n+m-1}} = \frac{(m+1)m+(m+1)M_1'+M_2 r}{(n+m)(m+p+1)} + \frac{(n+m-2)_{n-3}(n-3)!M_3 r^2}{(n+m)_{n-1}(n-1)!(m+p+1)} \frac{K_{n+m-2}}{K_{n+m-1}}$$
$$+ \frac{(n+m-3)_{n-4}(n-4)!M_4 r^3}{(n+m)_{n-1}(n-1)!(m+p+1)} \frac{K_{n+m-3}}{K_{n+m-1}} + \dots + \frac{M_n r^{n-1}}{(n+m)_{n-1}(n-1)!(m+p+1)} \frac{K_{m+1}}{K_{n+m-1}}.$$

Mit zunehmendem m nähert sich der erste Quotient auf der rechten Seite der Grenze 1, alle übrigen der Grenze 0; es ergiebt sich demnach:

$$\lim_{m=\infty} \left(\frac{K_{n+m}}{K_{n+m-1}} \right) = 1.$$

In der Reihe (6.) ist der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder für einen unendlich wachsenden Index gleich

$$\lim_{m=\infty} \left(\frac{K_{n+m} z^{n+m}}{K_{n+m-1} z^{n+m-1}} \right) = z \lim_{m=\infty} \left(\frac{K_{n+m}}{K_{n+m-1}} \right) = z.$$

Der Modul von z oder $\frac{x-a}{r}$ ist aber in der Umgebung des Punktes a kleiner als Eins; denn der Werth r ist nur der Einschränkung unterworfen, dass derselbe kleiner sein muss, als der Abstand des Punktes a von dem nächstgelegenen singulären Punkte. Folglich ist, nach bekannter Regel, die durch die Gleichung (4.) oder (6.) angegebene Reihenentwicklung der Function u für das ganze Gebiet des Punktes a convergent, wodurch gleichzeitig die Convergenz der Reihe (2.) bewiesen ist, für den Fall dass der reelle Theil von b negativ ist.

Der Fall, wo der reelle Theil von b positiv oder Null ist, wird auf den, wo derselbe negativ ist, mittelst successiver Differentiationen der gegebenen Differentialgleichung zurückgeführt. Die Gleichung (1.), einmal differentiirt, giebt:

$$(x-a)\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = (E_1(x)-1)\frac{d^n y}{dx^n} + (E_1'(x)+E_2(x))\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + E_n'(x) y$$

und nach s Differentiationen

$$(x-a)\frac{d^{n+s}y}{dx^{n+s}} = (E_1(x)-s)\frac{d^{n+s-1}y}{dx^{n+s-1}} + H_2(x)\frac{d^{n+s-2}y}{dx^{n+s-2}} + \cdots + H_{n+s}(x)y,$$

wo $H_2(x), \ldots H_{n+s}(x)$ gleich Summen der Functionen $E(x)$ und ihrer Ableitungen, und folglich ebenfalls eindeutig und stetig in der Umgebung von a sind. Der Punkt a ist wieder ein einfacher singulärer Punkt der Differentialgleichung, aber die zugehörige Zahl ist um eine ganze Zahl verkleinert worden. Es möge durch s diejenige ganze Zahl bezeichnet werden, welche man von b subtrahiren muss, um den reellen Theil dieser Grösse negativ zu machen.

Denkt man sich dann eine Function η durch die letzterhaltene Differentialgleichung $n+s^{\text{ter}}$ Ordnung definirt

$$(8.)\quad (x-a)\frac{d^{n+s}\eta}{dx^{n+s}} = (E_1(x)-s)\frac{d^{n+s-1}\eta}{dx^{n+s-1}} + H_2(x)\frac{d^{n+s-2}\eta}{dx^{n+s-2}} + \cdots + H_{n+s}(x)\eta,$$

so folgt aus dem Vorhergehenden, dass der Gleichung (8.) durch eine convergente Reihe

$$(9.)\quad \eta = \gamma_0 + \gamma_1(x-a) + \cdots + \gamma_{n+s-2}(x-a)^{n+s-2} + \gamma_{n+s-1}(x-a)^{n+s-1} + \cdots$$

genügt wird, in welcher die $n+s-1$ ersten Coefficienten, $\gamma_0, \gamma_1, \ldots \gamma_{n+s-2}$, willkürliche Constanten sind.

Die Reihe (9.) geht für gewisse Werthe der $n+s-1$ willkürlichen Constanten in ein Integral der Differentialgleichung (1.) über. Damit die Reihe (9.) der Gleichung (1.) genüge, müssen zwischen den Grössen $\gamma_0, \gamma_1, \ldots \gamma_{n+s-2}$ dieselben s Relationen bestehen, welche für die $n+s-1$ ersten Coefficienten c der Reihe (2.) gefunden wurden, nämlich:

$$(10.)\quad \begin{cases} -(n-1)_{n-1}(n-1)!\,b\gamma_{n-1} = (n-2)_{n-2}(n-2)!\,E_2(a)\gamma_{n-2} + \cdots + E_n(a)\gamma_0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (n+s-2)_{n-1}(n-1)!\,(s-b-1)\gamma_{n+s-2} = \\ \qquad \left\{(n+s-3)_{n-1}(n-1)!\frac{E_1'(a)}{1} + \cdots\right\}\gamma_{n+s-3} + \cdots + \frac{E_n^{(s-1)}(a)}{(s-1)!}\gamma_0. \end{cases}$$

Diese s Gleichungen zwischen $\gamma_0, \ldots \gamma_{n+s-2}$ sind aber immer hinreichend, um sämmtliche Grössen γ völlig identisch mit den Grössen c, und daher die Reihe (9.) zu einem Integral der Gleichung (1.) zu machen.

Es wurde bewiesen, dass für ein im reellen Theile negatives b die Reihe (2.) convergent, die $n-1$ ersten Coefficienten willkürlich, alle übrigen Coefficienten aber in eindeutiger Weise durch diese bestimmt seien. Da es demnach nicht zwei verschiedene convergente Reihenentwicklungen von der angeführten Form geben kann, die der Differentialgleichung (1.) genügen, und

deren $n-1$ erste Coefficienten willkürliche Constanten sind: so muss für den Fall, dass der reelle Theil von b negativ ist, das Gleichungssystem der Grössen γ durch die Gleichungen (10.) identisch mit dem Gleichungssystem der Grössen c werden. In Bezug auf die Frage der Identität ist aber der Umstand, ob der reelle Theil von b positiv oder negativ ist, völlig unerheblich; es muss daher in allen Fällen die Reihe (9.) durch die s Gleichungen (10.) in die Reihe (2.) übergehen. Weil nun die Reihe (9.) für ganz beliebige Werthe von $\gamma_0, \gamma_1, \dots \gamma_{n+s-2}$, also auch für die durch die Gleichungen (10.) bestimmten, convergent ist: so ist hierdurch der Beweis geliefert, dass die Reihe (2.) auch für den Fall, dass der reelle Theil von b positiv ist, convergirt.

Aus der Convergenz der Reihe und den Gleichungen (10.) folgt, dass, sobald b nicht eine positive ganze Zahl oder Null ist, die Function y und die $n-2$ ersten Ableitungen derselben für $x=a$ beliebigen Werthen gleichgemacht werden können. Ist dagegen b gleich einer positiven ganzen Zahl oder gleich Null, so ist, wie aus dem Früheren hervorgeht, der $b+n^{\text{te}}$ Coefficient, c_{b+n-1}, willkürlich. Es bleiben alsdann noch $n-2$ unter den $b+n-1$ ersten Coefficienten beliebig. Zwischen $c_0, c_1, \dots c_{b+n-2}$ bestehen erstens die b Gleichungen, welche mit den Gleichungen (10.) für $s=b$ gleichlautend sind; und zweitens werden diese Grössen durch diejenige Gleichung ($s=b+1$) beschränkt, welche sonst c_{b+n-1} bestimmt, deren linke Seite aber hier gleich Null ist. Indem also die $b+n-1$ Grössen durch $b+1$ lineare Gleichungen verbunden sind, bleiben $n-2$ derselben unbeschränkt, während die übrigen sich als eindeutige lineare Functionen jener $n-2$ ergeben.

Es darf jedoch in diesem Falle nicht mehr behauptet werden, dass die $n-2$ ersten Coefficienten der Reihe (2.) beliebigen Werthen gleichgemacht werden können. Im Gegentheil findet man unmittelbar gewisse Specialfälle, in denen c_0 gleich Null sein muss, z. B.:

$$b=0, \quad E_2(a)=E_3(a)=\dots=E_{n-1}(a)=0.$$

Ob man für ein ganzzahliges, positives b und für $b=0$ die Coefficienten $c_0, c_1, \dots c_{n-3}$ zu willkürlichen Constanten nehmen kann, oder ob andere der $b+n-1$ ersten Coefficienten beliebig bleiben müssen, hängt davon ab, ob bei Auflösung der $b+1$ Gleichungen in Bezug auf $c_{n-2}, c_{n-1}, \dots c_{b+n-2}$ die Nenner der für letztere sich ergebenden Ausdrücke sämmtlich von Null verschieden sind, oder nicht.

Man bemerke, dass, wenn jene $n-2$ willkürlichen Werthe gleich Null genommen werden, die $b+n-1$ ersten Coefficienten $c_0, c_1, \dots c_{b+n-2}$ sämmt-

lich verschwinden, so dass man eine mit der Potenz $(x-a)^{b+n-1}$ beginnende Reihenentwicklung für y erhält.

II.

Der zweite Theil des Satzes sagt aus, dass, wenn b nicht ganzzahlig ist, das n^{te} Integral durch ein Product

$$(11.)\qquad y = (x-a)^{b+n-1}\{C_0+C_1(x-a)+C_2(x-a)^2+\cdots\},$$

in welchem die Reihe convergent, und C_0 von Null verschieden ist, gebildet wird. Auf die Existenz eines derartigen Integrals wird man sogleich hingewiesen, wenn man in die Gleichung (1.) für y die Reihe

$$y = C_0(x-a)^\sigma+C_1(x-a)^{\sigma+1}+C\,(x-a)^{\sigma+2}+\cdots$$

einsetzt. Dann ergiebt sich für die Grössen C das Gleichungssystem:

$$(12.)\qquad \begin{cases} \{(\sigma)_n n!-(\sigma)_{n-1}(n-1)!b\}\,C_0 = 0, \\ \{(\sigma+1)_n n!-(\sigma+1)_{n-1}(n-1)!b\}\,C_1 \\ \qquad = \{(\sigma)_{n-1}(n-1)!E_1'(a)+(\sigma)_{n-2}(n-2)!E_2(a)\}\,C_0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \{(\sigma+m)_n n!-(\sigma+m)_{n-1}(n-1)!b\}\,C_m \\ \quad = \{(\sigma+m-1)_{n-1}(n-1)!E_1'(a)+(\sigma+m-1)_{n-2}(n-2)!E_2(a)\}\,C_{m-1}+\cdots, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Die erste der Gleichungen (12.) giebt an, welche Potenzen das Anfangsglied der Entwicklung von y bilden können. Damit C_0 von Null verschieden sei, muss σ der Gleichung genügen:

$$(13.)\qquad (\sigma)_n n!-(\sigma)_{n-1}(n-1)!b = \sigma(\sigma-1)(\sigma-2)\dots(\sigma-n+2)(\sigma-b-n+1) = 0.$$

Die $n-1$ Wurzeln $\sigma=0$, $\sigma=1$, $\sigma=2$, ... $\sigma=n-2$ betreffen die im ersten Abschnitt behandelten Integrale; denn wegen der Willkürlichkeit der $n-1$ ersten Constanten kann man die Reihe (2.) auch mit jeder der Potenzen $x-a$, $(x-a)^2$, ... $(x-a)^{n-2}$ beginnen lassen. Die n^{te} Wurzel der Gleichung (13.) giebt den Werth

$$\sigma = b+n-1,$$

welcher hier in Betracht kommt.

Setzt man in (12.) den Werth $b+n-1$ für σ ein, so wird der Factor von C_m in derjenigen Gleichung, welche C_m zuerst enthält und in Folge dessen bestimmt, gleich dem Ausdruck

$$m(b+m+1)(b+m+2)(b+m+3)\dots(b+m+n-1).$$

Dieser Factor kann nur gleich Null werden, wenn b eine negative ganze

Zahl ist. Durch das Gleichungssystem (12.) werden somit sämmtliche Grössen C_1, C_2 etc. als eindeutige lineare Functionen von C_0, welches allein willkürlich bleibt, bestimmt, ausgenommen den Fall, wo b gleich einer negativen ganzen Zahl ist. Findet letzteres statt, so liefern die Gleichungen (12.) keine bestimmten Werthe für die Coefficienten der Reihe (11.); das Gleichungssystem deutet alsdann auf den logarithmischen Grenzfall hin, wo ein Theil der Coefficienten unendlich gross gegen die andern wird.

Aber auch in dem Falle, wo b eine positive ganze Zahl oder Null ist, giebt die Gleichung (11.) nicht das n^{te} Integral von (1.). Allerdings erhält man aus (12.) eindeutige Werthe für die Coefficienten C; indessen ist die so bestimmte Reihe (11.) nur eins der früher gefundenen particulären Integrale. Denn für positive ganzzahlige Werthe des b, den Werth Null einbegriffen, wurde nachgewiesen, dass eine convergente Reihe, in welcher die Potenz $(x-a)^{b+n-1}$ das Anfangsglied bildet, der gegebenen Differentialgleichung genügt. Mit diesem Integral wird die Reihe (11.) identisch. Letztere kann folglich das n^{te} Integral der Gleichung (1.) nur in dem Falle, dass b nicht ganzzahlig ist, darstellen.

Die Gleichung (13.) zeigt, dass bei den einfachen singulären Punkten je $n-1$ particuläre Integrale insofern denselben Charakter haben, als sich rationale Anfangspotenzen für ihre Entwicklung ergeben. Es macht eine wesentliche Eigenschaft der einfachen singulären Punkte aus, dass dieses gleichartige Verhalten von $n-1$ Integralen niemals zu Logarithmen führt. Nur das n^{te} Integral giebt, wenn es aufhört, irrational wie eine Potenz zu sein, im Allgemeinen logarithmische Glieder.

Um die Convergenz der Reihe (11.) zu beweisen und gleichzeitig Schlüsse für den Fall, wo b ganzzahlig ist, zu erhalten, benutzt man den Zusammenhang, in welchem die n Integrale der Differentialgleichung unter einander stehen; durch die im ersten Abschnitt hergeleiteten $n-1$ Integrale ist auch das n^{te} Integral vollständig bestimmt, da bekanntlich mit Hülfe derselben die Gleichung (1.) auf eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung reducirt werden kann.

Man schliesse den Fall, dass b eine positive ganze Zahl oder Null ist, vorläufig aus. Dann sind in dem Integral (2.) die $n-1$ ersten Coefficienten willkürlich; man kann also c_0 von Null verschieden annehmen. Man bezeichne durch die Reihe

$$v_1 = c_{1,0}+c_{1,1}(x-a)+c_{1,2}(x-a)^2+\cdots,$$

wo $c_{1,0}$ nicht gleich Null ist, ein Integral von (1.), und führe mittelst der Substitution

$$y = v_1 \int w_1\, dx$$

die Variable w_1 an Stelle von y ein. Es folgt für w_1 die Differentialgleichung $n-1^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(x-a)\frac{d^{n-1}w_1}{dx^{n-1}} = \left\{-\frac{(n)_1}{v_1}\frac{dv_1}{dx}(x-a)+E_1(x)\right\}\frac{d^{n-2}w_1}{dx^{n-2}}$$
$$+\left\{-\frac{(n)_2}{v_1}\frac{d^2v_1}{dx^2}(x-a)+\frac{(n-1)_1}{v_1}\frac{dv_1}{dx}E_1(x)+E_2(x)\right\}\frac{d^{n-3}w_1}{dx^{n-3}}+\cdots$$
$$+\left\{-\frac{(n)_{n-1}}{v_1}\frac{d^{n-1}v_1}{dx^{n-1}}(x-a)+\frac{(n-1)_{n-2}}{v_1}\frac{d^{n-2}v_1}{dx^{n-2}}E_1(x)+\cdots+E_{n-1}(x)\right\}w_1,$$

welche wieder a zum einfachen singulären Punkt und b zur zugehörigen Zahl desselben hat. Denn da v_1 für $x=a$ nicht verschwindet, so sind sämmtliche Coefficienten der Gleichung eindeutig und stetig in der Umgebung von a; und aus demselben Grunde nimmt der Coefficient der zweithöchsten Ableitung für $x=a$ den Werth b an.

Indem man das angewendete Verfahren wiederholt, erniedrigt man, unter Beibehaltung der Form der Differentialgleichung, successiv die Ordnung derselben. Es sei

$$v_2 = c_{2,0}+c_{2,1}(x-a)+c_{2,2}(x-a)^2+\cdots,$$

wo $c_{2,0}$ von Null verschieden, ein Integral der Gleichung für w_1, und man nehme $w_1 = v_2\int w_2\, dx$, etc. Die Substitutionen

$$(14.)\quad y=v_1\int w_1\, dx,\quad w_1=v_2\int w_2\, dx,\quad w_2=v_3\int w_3\, dx,\quad \ldots\quad w_{n-2}=v_{n-1}\int w_{n-1}\, dx$$

ergeben für w_{n-1} schliesslich eine Differentialgleichung erster Ordnung

$$(15.)\qquad (x-a)\frac{dw_{n-1}}{dx} = F(x)\,w_{n-1},$$

wo die Function $F(x)$ eindeutig und stetig in der Umgebung von a ist und für $x=a$ den Werth b annimmt. Setzt man demnach

$$F(x) = b+(x-a)f(x),$$

so wird die Gleichung (15.):

$$\frac{dw_{n-1}}{w_{n-1}} = \left\{\frac{b}{x-a}+f(x)\right\}dx,$$
$$\log w_{n-1} = b\log(x-a)+\int f(x)\,dx,$$
$$w_{n-1} = (x-a)^b\, e^{\int f(x)dx}.$$

Aus der Eindeutigkeit und Stetigkeit von $f(x)$ in der Umgebung des Punktes a folgt dieselbe Eigenschaft für $\int f(x)\,dx$ und $e^{\int f(x)dx}$; die letzterwähnte Function ist ausserdem für $x = a$ jedenfalls von Null verschieden. Nennt man also

$$e^{\int f(x)dx} = G(x) = k_0 + k_1(x-a) + k_2(x-a)^2 + \cdots,$$

so ergiebt sich für w_{n-1} die Gleichung

$$(16.)\qquad w_{n-1} = (x-a)^b G(x) = (x-a)^b \{k_0 + k_1(x-a) + k_2(x-a)^2 + \cdots\},$$

in der die Reihe convergent, und k_0 von Null verschieden ist.

Um y zu erhalten, hat man, gemäss den Substitutionen (14.), den obigen Ausdruck $n-1$ Mal zu integriren, indem man nacheinander mit v_{n-1}, v_{n-2}, ... v_1 multiplicirt. Macht man die Integrationsconstante bei allen $n-1$ Integrationen gleich Null, so ergiebt sich das gesuchte n^{te} Hauptintegral. Da keine der Grössen v_1, v_2, ... v_{n-1} für $x = a$ verschwindet, so hat die Multiplication mit denselben keinen Einfluss auf die Anfangspotenz. Hieraus ergiebt sich der Schluss, dass für ein nicht ganzzahliges b die Potenz $(x-a)^{b+n-1}$ zur Anfangspotenz wird, und dass nach Abtrennung des Factors $(x-a)^{b+n-1}$ eine bei dem Punkte a eindeutige und stetige Function übrig bleibt.

Es ist somit bewiesen, dass, sobald b nicht gleich einer positiven oder negativen ganzen Zahl oder gleich Null ist, der Differentialgleichung (1.) stets durch einen Ausdruck

$$y = (x-a)^{b+n-1} \{C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \cdots\}$$

Genüge geschieht, in welchem die Reihe convergent, und C_0 von Null verschieden ist.

Wenn b gleich einer negativen ganzen Zahl ist, wird das n^{te} Integral ebenfalls durch die Gleichungen (14.) und (16.) bestimmt. In diesem Falle entstehen aber im Allgemeinen durch Integration der Potenz $(x-a)^{-1}$ logarithmische Glieder. In speciellen Fällen können letztere fortfallen, indem die Factoren derselben gleich Null werden. Um für eine gegebene Differentialgleichung zu entscheiden, ob das n^{te} Integral den $\log(x-a)$ enthält, oder nicht, hat man die Anfangsglieder der Entwicklungen der betreffenden Functionen zu berechnen, so weit dieselben für die negativen Potenzen von $x-a$ in Betracht kommen. Aus dem Umstande, dass keine der Grössen v_1, v_2, ... v_{n-1} für $x = a$ verschwindet, ergiebt sich die Regel, dass das Integral nur dann frei von Logarithmen ist, wenn bei jeder der $n-1$ in (14.) angegebenen Integrationen die zu integrirende Function die Potenz $(x-a)^{-1}$ nicht enthält.

Es bleibt übrig, den Fall eines ganzzahligen positiven b zu behandeln, für welchen ebenfalls das n^{te} Integral im Allgemeinen logarithmisch wird. Man wendet, wie vorher, die Substitutionen (14.) an, indessen wird die Entwicklung dadurch eine andere, dass v_{n-1} für $x=a$ verschwindet. Es wurde im ersten Abschnitt gezeigt, dass, wenn b eine positive ganze Zahl oder Null ist, in der Reihe (2.) der Coefficient c_{b+n-1} und ausserdem $n-2$ der Grössen $c_0, c_1, \dots c_{b+n-2}$ willkürlich bleiben; für letztere kann man im allgemeinen Falle die Coefficienten $c_0, c_1, \dots c_{n-3}$ nehmen. Die $n-2$ ersten Substitutionen

$$y = v_1 \int w_1 dx, \quad w_1 = v_2 \int w_2 dx, \quad \dots \; w_{n-3} = v_{n-2} \int w_{n-2} dx$$

führen dann zu demselben Resultat wie in dem früheren Falle; man erhält für w_{n-2} eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(17.) \qquad (x-a)\frac{d^2 w_{n-2}}{dx^2} = F_1(x)\frac{dw_{n-2}}{dx} + F_2(x)\, w_{n-2},$$

in welcher die Functionen $F_1(x)$ und $F_2(x)$ für das Gebiet des Punktes a eindeutig und stetig sind, und erstere für $x=a$ gleich b wird.

In gewissen Fällen sind, wie im ersten Abschnitt ausgeführt wurde, auch die Grössen $v_1, v_2, \dots v_{n-2}$ nicht sämmtlich von Null verschieden. Dann modificirt sich die Gleichung (17.). Indessen soll auf diese speciellen Fälle nicht weiter eingegangen werden, weil es sich hier nur darum handelt, das Vorhandensein der logarithmischen Glieder für den allgemeinen Fall nachzuweisen, und weil das n^{te} Integral doch immer durch die $n-1$ übrigen vollständig bestimmt ist.

Bei der Gleichung (17.) reduciren sich die $n-1$ willkürlichen Constanten der Reihe (2.) auf die eine Grösse c_{b+1}; man erhält für (17.) das partikuläre Integral:

$$v_{n-1} = (x-a)^{b+1} + c'(x-a)^{b+2} + c''(x-a)^{b+3} + \cdots.$$

Die Substitution

$$w_{n-2} = v_{n-1} \int w_{n-1} dx$$

giebt alsdann für w_{n-1} die Differentialgleichung

$$(x-a)\frac{dw_{n-1}}{dx} = \left\{ -\frac{2(x-a)}{v_{n-1}}\frac{dv_{n-1}}{dx} + F_1(x) \right\} w_{n-1},$$

in welcher die zu a zugehörige Zahl nicht mehr gleich b ist. Die Entwicklung von $\frac{2(x-a)}{v_{n-1}}\frac{dv_{n-1}}{dx}$ beginnt mit dem constanten Gliede $2(b+1)$, und die von $F_1(x)$ mit b; die Gleichung für w_{n-1} gewinnt demnach die Gestalt

$$(x-a)\frac{dw_{n-1}}{dx} = \{-(b+2) + (x-a)f(x)\}\, w_{n-1},$$

wo $f(x)$ in der Umgebung von a eindeutig und stetig ist. Hieraus folgt für w_{n-1} der Ausdruck

$$(18.) \qquad w_{n-1} = (x-a)^{-b-2} e^{\int f(x)dx} = (x-a)^{-b-2} G(x),$$

in welchem $G(x)$ eine bei a eindeutige und stetige Function, die für $x=a$ von Null verschieden ist, bedeutet.

Stellt man aus letzterer Gleichung den Werth von y her, so entsteht bei der Integration des Ausdruckes (18.) aus der Potenz $(x-a)^{-1}$ ein logarithmischer Summandus. Derselbe fällt nur dann fort, wenn in der Entwicklung von $G(x)$ nach aufsteigenden Potenzen von $x-a$ der Coefficient der Potenz $(x-a)^{b+1}$ gleich Null ist. Also ist auch für ein positives ganzzahliges b und für $b=0$ das n^{te} Integral der Differentialgleichung (1.) im Allgemeinen logarithmischer Natur.

Hiermit sind die behaupteten Eigenschaften der Integralfunction y in Bezug auf den einfachen singulären Punkt a in allen Stücken bewiesen.

Bei jedem endlichen Werthe erkennt man ohne Weiteres, ob derselbe ein einfacher singulärer Punkt einer gegebenen Differentialgleichung ist, oder nicht. Dagegen erfordern die Bedingungen, unter denen der Werth $x=\infty$ ein einfacher singulärer Werth einer linearen Differentialgleichung wird, eine besondere Analyse. Es soll die Frage hier etwas allgemeiner gestellt, und die Bedingung dafür, dass der Werth $x=\infty$ ein einfacher singulärer Werth für das Product $x^\sigma y$ sei, in den Grundzügen hergeleitet werden. Der Exponent σ bleibt beliebig, so dass für $\sigma=0$ die Function y selbst den Werth $x=\infty$ zum einfachen singulären Werth haben würde.

Die Function y sei durch eine Differentialgleichung

$$(19.) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + F_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + F_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + F_n(x)y = 0$$

bestimmt; man substituirt

$$x^\sigma y = \eta, \quad x = \frac{1}{t}$$

und verlangt, dass die sich ergebende Differentialgleichung zwischen η und t die Form habe

$$t\frac{d^n\eta}{dt^n} + E_1(t)\frac{d^{n-1}\eta}{dt^{n-1}} + E_2(t)\frac{d^{n-2}\eta}{dt^{n-2}} + \cdots + E_n(t)\eta = 0,$$

wo die Functionen $E_1(t)$, $E_2(t)$, ... $E_n(t)$ in der Umgebung des Punktes $t=0$ eindeutig und stetig sind.

Setzt man für die Ableitungen von y ihre Werthe ein

$$\frac{d^\nu y}{dx^\nu} = (-1)^\nu t^{\nu+1} \frac{d^\nu (t^{\nu-\sigma-1}\eta)}{dt^\nu},$$

so führt die gestellte Anforderung unmittelbar zu Beschränkungen der Functionen $F(x)$ hinsichtlich ihrer Entwicklung nach fallenden Potenzen von x. Man findet, dass bei dieser Entwicklung, für ein beliebiges i, die Function $F_i(x)$ weder ein constantes Glied, noch die Potenzen $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \cdots \frac{1}{x^{i-1}}$ enthalten darf, und es ergiebt sich demgemäss für $F_i(x)$ die convergente Reihenentwicklung:

$$(20.) \qquad F_i(x) = \frac{K_{i,0}}{x^i} + \frac{K_{i,1}}{x^{i+1}} + \frac{K_{i,2}}{x^{i+2}} + \cdots.$$

Für die Differentialgleichungen mit ganzen rationalen Coefficienten folgt aus der Gleichung (20.), dass, wenn $x = \infty$ ein einfacher singulärer Werth für $x^\sigma y$ sein soll, der Grad des Coefficienten von $\frac{d^n y}{dx^n}$ um i den Grad des Coefficienten von $\frac{d^{n-i} y}{dx^{n-i}}$ übersteigen muss. Dies zeigt, dass der Coefficient von $\frac{d^n y}{dx^n}$ mindestens vom Grade n ist. In dem einfachsten Falle erhält daher die Differentialgleichung die Gestalt

$$(21.) \qquad \varphi_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + \varphi_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + \varphi_i(x)\frac{d^i y}{dx^i} + \cdots + \varphi_0 y = 0,$$

wo $\varphi_i(x)$ eine ganze Function i^{ten} Grades, und φ_0 eine Constante bedeutet.

Ausser den Gleichungen (20.) ergeben sich aus der Forderung, dass $x = \infty$ ein einfacher singulärer Werth für $x^\sigma y$ sein soll, eine Anzahl von Bedingungsgleichungen für die ersten Coefficienten $K_{i,0}$, $K_{i,1}$, $K_{i,2}$ etc. der Entwicklungen von $F_i(x)$. In dem erwähnten einfachen Falle der Gleichung (21.) führen diese Bedingungsgleichungen direct zu der Differentialgleichung der hypergeometrischen Functionen n^{ter} Ordnung, welche ich in einer früheren Arbeit*) definirt habe.

Es geht hieraus hervor, dass, sobald der singuläre Werth $x = \infty$ berücksichtigt wird, die Betrachtung der einfachen singulären Punkte mit Nothwendigkeit zu den erwähnten hypergeometrischen Functionen führt; gleichzeitig beweisen die gegebenen Entwicklungen, dass die hypergeometrischen Functionen n^{ter} Ordnung einfacher und elementarer sind, als irgend welche andere durch lineare Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung definirte Functionen.

Berlin, im August 1870.

---

*) Dieses Journal, Bd. 71.

Notiz über die Herleitung der hypergeometrischen Differentialgleichung.

(Von Herrn *L. Pochhammer.*)

Die hypergeometrischen Functionen n^{ter} Ordnung wurden im 71sten Bande dieses Journals dadurch definirt, dass ihre Eigenschaft, an den endlichen singulären Punkten je $n-1$ eindeutige und stetige Integrale und ein wie eine Potenz mehrdeutiges (und resp. unstetiges) Integral zu enthalten und für $x=\infty$ das nämliche Verhalten nach Multiplication mit $x^{1-\lambda}$ zu zeigen, direct angegeben wurde, was ausreichend war, um ihre Differentialgleichung aus der diese Fälle enthaltenden Differentialgleichung des Herrn *Fuchs* herzuleiten. Die hypergeometrische Differentialgleichung lässt sich indessen in etwas einfacherer Weise ableiten, wenn man nicht die Gleichung des Herrn *Fuchs* benutzt, sondern die in dem vorstehenden Aufsatz entwickelte Theorie der einfachen singulären Punkte linearer Differentialgleichungen zu Grunde legt. Die Definition der allgemeinen hypergeometrischen Function wird hierdurch in formaler Beziehung modificirt; die Differentialgleichung, deren vollständiges Integral sie ist, wird jedoch genau in derselben Gestalt erhalten.

Man definire die allgemeine hypergeometrische Function

$$H_n\binom{a_1, a_2, \dots a_n, x}{b_1, b_2, \dots b_n, \lambda}$$

als das vollständige Integral derjenigen linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, bei welcher

1) $a_1, a_2, \dots a_n$ einfache singuläre Punkte mit den zugehörigen Zahlen $b_1+\lambda-n,\ b_2+\lambda-n,\ \dots\ b_n+\lambda-n$ sind,
2) der Werth ∞ ein einfacher singulärer Werth für das Product $x^{1-\lambda}H_n$ ist,
3) ausser $a_1, a_2, \dots a_n$ und ∞ kein singulärer Punkt existirt, und keine der $n+1$ zugehörigen Zahlen eine ganze Zahl ist.

Diese Festsetzungen bestimmen die Function; dieselbe ist völlig frei von logarithmischen Unstetigkeiten.

Aus der Bedingung, dass $a_1, a_2, \dots a_n$ einfache singuläre Punkte sein sollen, folgt, dass die Differentialgleichung die Form

$$(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)\frac{d^ny}{dx^n}$$
$$+E_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+E_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\dots+E_k(x)\frac{d^{n-k}y}{dx^{n-k}}+\dots+E_n(x)y = 0$$

haben muss, wo $E_1(x)$, $E_2(x)$, ... $E_n(x)$ Functionen bedeuten, welche für $x=a_1, a_2, \dots a_n$ stetig und eindeutig bleiben. Da aber $a_1, a_2, \dots a_n$ als die einzigen endlichen singulären Punkte vorausgesetzt wurden, so sind $E_1(x)$, $E_2(x)$, ... $E_n(x)$ für alle endlichen Werthe von x stetig und eindeutig.

Auf die Bedingung, dass der Werth ∞ für das Product $x^{1-\lambda}y$ ein einfacher singulärer Werth sei, ist in der vorstehenden Abhandlung näher eingegangen worden. Es muss hiernach der Quotient

$$\frac{E_k(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)}$$

nach Multiplication mit x^k in eine convergente, nur die negativen Potenzen von x enthaltende Reihe entwickelbar sein. Da nun $E_k(x)$ keinen endlichen Verzweigungs- oder Unstetigkeits-Punkt hat, und auch für $x=\infty$ nach Multiplication mit $\frac{x^k}{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)}$, oder, was hier dasselbe ist, mit $\frac{1}{x^{n-k}}$, stetig und eindeutig sein soll: so ergiebt sich, dass $E_k(x)$ eine ganze Function $n-k^{\text{ten}}$ Grades ist. Die Differentialgleichung hat also die Gestalt

$$\varphi_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+\varphi_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots+\varphi_k(x)\frac{d^ky}{dx^k}+\dots+\varphi_1(x)\frac{dy}{dx}+\varphi_0 y = 0,$$

wo $\varphi_k(x)$ eine ganze Function k^{ten} Grades von x bedeutet, und φ_0 constant ist.

Nachdem diese Form der Differentialgleichung gewonnen ist, geschieht die weitere Bestimmung der Constanten in derselben Weise, wie im ersten Abschnitt der Abhandlung über die hypergeometrischen Functionen (Bd. 71) angegeben ist.

Durch den Satz über die einfachen singulären Punkte ist gleichzeitig der Beweis geliefert, dass der erhaltenen Differentialgleichung an jedem endlichen singulären Punkte durch $n-1$ stetige und eindeutige Integrale und durch ein Integral, welches nach Division mit einer Potenz stetig und eindeutig ist, genügt wird, und dass für $x=\infty$ dasselbe von dem Producte $x^{1-\lambda}y$ gilt.

Berlin, im October 1870.

Zusatz zu dem Aufsatze „Ueber einige Sätze von *Steiner* und ihren Zusammenhang mit der zwei und zweigliedrigen Verwandtschaft der Grundgebilde ersten Grades.“

(Von Herrn *Eduard Weyr* in Prag.)

In den genannten p. 18 des 71ten Bandes abgedruckten Aufsatz hat sich ein Irrthum eingeschlichen, auf welchen ich von meinem Bruder *Emil Weyr* bei Gelegenheit einer gemeinschaftlich vorgenommenen Untersuchung mehrdeutiger Grundgebilde ersten Grades aufmerksam gemacht wurde. Dieser Irrthum soll nun in Kürze corrigirt werden.

Seien S und Σ zwei zwei und zweigliedrig verwandte Büschel d. h. es bestehe zwischen den Theilverhältnissen x und ξ entsprechender Strahlen eine Relation von der Form

$$(1.)\quad x^2(A\xi^2+B\xi+C)+x(A'\xi^2+B'\xi+C')+(A''\xi^2+B''\xi+C'') = 0,$$

und sei e ein solcher Strahl von S, dass die ihm in Σ zugeordneten Strahlen ε_1, ε_2 in ein Element ε_{12} zusammenfallen, d. h. ein Doppelelement von Σ bilden. Dreht man die Büschel um ihre Scheitel so lange, bis die Strahlen e und ε_{12} (welche als reell vorausgesetzt werden) in den S und Σ gemeinsamen Strahl $\overline{S\Sigma}$ fallen, so gehört dieser dem von S und Σ erzeugten Orte C_4 jedenfalls an. In dem besagten Aufsatze habe ich nun behauptet, dass $\overline{S\Sigma}$ doppelt zu zählen sei d. h. dass sich das Erzeugniss der Büschel auf ihn und eine Curve zweiter Ordnung reduciren müsse. Dies ist der begangene Fehlschluss. Schneidet man nämlich die Büschel durch eine willkürliche Tansversale T, so entstehen auf derselben zwei zwei und zweigliedrig verwandte Punktreihen, für welche man wiederum die Verwandtschaftsgleichung in der Form (1.) voraussetzen kann. Misst man dabei x und ξ bezüglich des nämlichen Punktepaares, so liefert (1.) für $x=\xi$ eine Gleichung, welche die Schnittpunkte von T und C_4 charakterisirt. Natürlich muss $\overline{S\Sigma}$, da sich dieser Strahl selbst entspricht, T in einem der vier Punkte treffen, wesswegen $\overline{S\Sigma}$ wirklich zu dem Orte C_4 gehört; es fragt sich nur, ob die Coordinate x_1 dieses Schnittpunktes eine *doppelte* Wurzel der Gleichung

$$x^2(Ax^2+Bx+C)+x(A'x^2+B'x+C')+(A''x^2+B''x+C'') = 0$$

ist. Der Kürze halber wollen wir den Punkt α_1 selbst als einen der zwei Grundpunkte annehmen, bezüglich welcher man x und ξ misst. Weil ε_{12} dem Strahle e doppelt entspricht, so muss die Gleichung (1.), wenn man $x = x_1 = 0$ setzt, von dem Werthe $\xi = x_1 = 0$ zweimal befriedigt werden, oder $B'' = C'' = 0$ sein. Somit sind die vier Schnittpunkte von T und C_4 durch die Gleichung $x^2(Ax^2 + Bx + C) + x(A'x^2 + B'x + C') + A''x^2 = 0$ charakterisirt, und offenbar ist $x = 0$ eine einfache Wurzel derselben. Somit trifft jede Transversale C_4 erstlich in dem Punkte, wo sie $\overline{S\Sigma}$ schneidet und dann noch in drei weiteren Punkten; oder: in der angenommenen speciellen Lage erzeugen S und Σ ausser $\overline{S\Sigma}$ noch eine Curve dritter Ordnung C_3.

Ist der Strahl ε_{12} so beschaffen, dass der ihm in S ausser e zugeordnete Strahl mit e zusammenfällt, d. h. dass e auch ein Doppelstrahl von S ist, so wird aus denselben Gründen $C' = C = 0$ sein, d. h. wir erhalten für unsere auf T gelegenen vier Punkte der Curve C_4 die Gleichung

$$x^2(Ax^2 + Bx) + x(A'x^2 + B'x) + A''x^2 = 0,$$

welche $x = 0$ nun zu einer doppelten Wurzel hat. In diesem Falle reducirt sich C_4 wirklich auf die doppelt gezählte Gerade $\overline{S\Sigma}$ und einen Kegelschnitt. Zwei Gebilde S und Σ, in welchen die beiden Doppelstrahlen e_{12} und ε_{12} sich entsprechen, erzeugen in allgemeiner Lage offenbar eine Curve C_4, welche in dem Schnitte von e_{12} mit ε_{12} einen Doppelpunkt hat und somit ihrer drei besitzt. Demgemäss gelten die in dem früheren Aufsatze gegebenen Beweise nur für Curven C_4 mit drei Doppelpunkten und für Curve C_3 mit einem Doppelpunkte. — Ich trage nun den Beweis der *Steiner*schen Sätze für Curven vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten und für allgemeine Curven dritter Ordnung nach.

Seien P und Q zwei Punkte einer Curve dritter Ordnung C_3 und A ein weiterer Punkt derselben. Es treffe $\overline{PA}$ die Curve C_3 in B, $\overline{QB}$ in C, $\overline{PC}$ in D, ..., und man gelange schliesslich bei derartigem Linienziehen wieder nach A. Dann hat man auf C_3 ein $2n$-Eck $ABCD\dots$, dessen Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, ... abwechselnd durch P und Q gehen. Gesetzt, es existire ein zweites derartiges $2n$-Eck $A'B'C'\dots$ auf C_3. Bezeichnet man die durch P gehenden Seiten dieser Polygone durch $1\,2\,3\dots$, $1'2'3'\dots$, die durch Q laufenden Seiten derselben jedoch durch I II III..., I' II' III'..., so hat man sowohl in P, als auch in Q je zwei Strahlengruppen $1\,2\dots$, $1'2'\dots$ resp. I II..., I' II''... jede zu n Strahlen. Die zwei Gruppen in P bestimmen vollkommen eine Strahleninvolution J_n n^{ten} Grades, und jene in Q eine Involution J'_n der-

selben Ordnung. Selbst dann, wenn die $2n$-Ecke $ABC\ldots$, $A'B'C'\ldots$ unendlich nahe wären, sind J_n und J'_n vollkommen bestimmt, wie man sich durch Zuhilfenahme der in den Eckpunkten der Polygone gezogenen Tangenten von C_3 leicht überzeugt. — Auch kann eines der Polygone z. B. das zweite die besondere Lage haben, dass eine seiner Seiten z. B. $1' = A'B'$ ein Strahl e des Büschels P ist, welchem in Q ein Doppelstrahl ε_{12} entspricht, d. h. es kann $A'B'$ die Curve in $A' = B'$ berühren. Um die Entwicklung nicht unnütz zu erschweren, nehmen wir etwa $n = 3$ an, d. h. wir setzen die Existenz zweier *Steiner*schen Sechsecke $ABCDEF$, $A'B'C'D'E'F'$ voraus, und zwar soll die durch P gehende Seite $A'B'$ die Curve in $A' = B'$ berühren. Dann ist offenbar $A' = B'$, $C' = F'$ und $D' = E'$, und die durch Q laufende Seite $D'E'$ muss die Curve C_3 tangiren, was sofort anschaulich wird, wenn man sich das Sechseck $A'B'C'D'E'F'$ durch eine Zeichnung versinnlicht und nachher A' mit B' zusammenfallen lässt. Nun ist $A'B' = 1'$, $C'D' = 2'$, $E'F' = 3'$ und somit $2' = 3'$; ebenso hat man $B'C' = \mathrm{I}'$, $D'E' = \mathrm{II}'$, $F'A' = \mathrm{III}'$, daher $\mathrm{I}' = \mathrm{III}'$. Bezeichnet man die Theilverhältnisse der Strahlen $1\,2\,3\,1'2'$ durch $x_1 x_2 x_3 x_{1'} x_{2'}$, jene von I II III I'II' hingegen mit ξ_I etc., so stellen uns die Wurzeln der Gleichung

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)+\lambda(x-x_{1'})(x-x_{2'})^2 \;=\; 0,$$

wobei λ ein veränderlicher Parameter ist, die Theilverhältnisse x der Strahlen einer Gruppe von J_n dar, so dass J_n wirklich ganz unzweideutig gegeben ist. Ersetzt man x durch ξ und die arabischen durch römische Ziffern, so erhält man jene Gleichung, welche die Involution J'_n liefert.

Die Involutionen J_n und J'_n kann man auf einander projectivisch beziehen, und zwar ordnen wir der Gruppe $1\,2\,3\ldots$ die Gruppe I II III..., $1'2'3'\ldots$ jedoch I'II'III'... zu; hierauf wählen wir auf C_3 einen willkürlichen Punkt p und lassen dem Strahle $\overline{Pp}$ den Strahl $\overline{Qp}$ entsprechen. Die so projectivisch verwandten Involutionen $J_n J'_n$ erzeugen durch den Durchschnitt entsprechender Strahlen eine Linie C_{2n} von der Ordnung $2n$, welche in P und Q n-fache Punkte hat. Nun liegen offenbar die Ecken der beiden Polygone nebst p auf C_{2n}, und überdies fallen in die Punkte P und Q je n Schnittpunkte von C_3 und C_{2n}, so dass wir $2.2n+2n+1 = 6n+1$ beiden Curven gemeinschaftliche Punkte kennen *); desswegen muss C_3 einen Theil von C_{2n} ausmachen. Je

*) Dieser Schluss wird dadurch, dass $A'B'C'\ldots$ die betrachtete specielle Lage hat, nicht aufgehoben. In dem für $n = 3$ näher untersuchten Falle z. B. hat C_{2n} in

zwei Strahlen von P und Q, welche sich auf C_3 treffen, entsprechen einander in den Involutionen J_n und J'_n. Gesetzt nun, man construire auf C_3 der früheren Angabe gemäss eine neue Folge von Punkten $A''B''C''\ldots$, wobei der erste A'' willkürlich ist, so kann man dies in der Weise auffassen, dass man zu $\overline{PA''}$ den entsprechenden Strahl $\overline{QB''}$, zu diesem wieder den zugeordneten $\overline{PC''}$ etc. in den zwei Involutionen J_n und J'_n construirt. Weil aber in J_n und J'_n einander nur Gruppen zu n Elementen entsprechen, man also bei diesem Linienziehen sowohl in P als auch in Q nur auf Strahlen entsprechender Gruppen stösst, so müssen sich auf diese Art in P und Q je n und nur n Strahlen ergeben d. h. der $2n+1^{\text{te}}$ Punkt der Folge $A''B''C''\ldots$ muss mit dem ersten A'' zusammenfallen. Wir ersehen daraus, dass, wenn man zwei *Steiner*sche $2n$-Ecke auf C_3 angeben kann, es ihrer unendlich viele giebt (so dass jeder Punkt A'' von C_3 in einem derselben liegt), und dass es *Steiner*sche Polygone anderer Seitenzahl nicht geben kann. Ganz in derselben Weise kann man diese Behauptung für Curven vierter Ordnung C_4 mit zwei Doppelpunkten P, Q beweisen, was hier der Kürze wegen unterlassen werden soll.

Gesetzt, man habe auf einer Curve C_3 (oder C_4 mit zwei Doppelpunkten P, Q) ein *Steiner*sches $2n$-Eck $ABC\ldots M$ d. h. ein Polygon, dessen Seiten $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \ldots$ abwechselnd durch zwei feste Curvenpunkte P, Q laufen. Jeden Strahl von P oder Q bestimme man durch sein Theilverhältniss x resp. ξ bezüglich je zweier willkürlicher Fundamentalstrahlen, und seien $x_1 x_2 \ldots x_n$ die Theilverhältnisse der durch P gehenden Polygonseiten $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{EF}$ etc., $\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n$ hingegen die Theilverhältnisse der zum Büschel Q gehörigen Seiten $\overline{BC}, \overline{DE}, \overline{FG}$ etc. Zwischen den Theilverhältnissen x, ξ entsprechender Strahlen der Büschel P und Q d. h. solcher Strahlen, welche sich auf C_3 treffen, besteht eine Gleichung von der Form

$$G(x, \xi) = x^2(A\xi^2 + B\xi + C) + x(A'\xi^2 + B'\xi + C') + (A''\xi^2 + B''\xi + C'') = 0,$$

und wir setzen der Kürze halber

$$G(x, \xi) = x^2 \Omega(\xi) + x\Pi(\xi) + \Sigma(\xi) = \xi^2 O(x) + \xi P(x) + S(x).$$

Differentiirt man diese Verwandtschaftsgleichung, so kommt

$$\frac{d\xi}{dx} = -\frac{2x\Omega(\xi) + \Pi(\xi)}{2\xi O(x) + P(x)} = -\frac{A(x, \xi)}{B(x, \xi)},$$

eine Gleichung, welcher die Differentiale dx und $d\xi$ genügen müssen, wenn die Strahlen $x + dx$ und $\xi + d\xi$ einander auf C_3 schneiden und umgekehrt.

C'' F' einen Doppelpunkt und berührt C_3 in $A' = B'$ und $D' = E'$, so dass die Ecken des Sechsecks $A'B'C'D'E'F'$ dennoch $2n = 6$ Schnittpunkte von C_3 und C_{2n} repräsentiren.

Man nehme den A benachbarten Curvenpunkt A', ziehe $\overline{PA'}$, bis C_3 in B' getroffen wird, ziehe $\overline{QB'}$, welche Gerade C_3 in C' schneiden mag, u. s. w., bis man schliesslich zu einem Nachbarpunkte M' von M gelangt; so hat man auf C_3 ein $2n$-Eck $A'B'C'\dots M'$, dessen n Seiten $\overline{A'B'}, \overline{C'D'}, \dots \overline{L'M'}$ durch P gehen, und dessen $n-1$ Seiten $\overline{B'C'}, \overline{D'E'}, \dots \overline{K'L'}$ dem Büschel Q angehören. Seien die Theilverhältnisse der durch P gehenden Seiten x_1+dx_1, $x_2+dx_2, \dots x_n+dx_n$, jene der zum Büschel Q gehörigen dagegen $\xi_1+d\xi_1$, $\xi_2+d\xi_2, \dots \xi_{n-1}+d\xi_{n-1}$. Verbindet man A' mit Q, so erhält man einen Strahl, dessen Theilverhältniss $\xi_n+d\xi_n$ sein möge, dagegen wollen wir das Theilverhältniss von $\overline{M'Q}$ durch $\xi_n+\delta\xi_n$ bezeichnen. $\overline{A'M'}$ würde durch Q gehen, d. h. $A'B'C'\dots M'$ würde wiederum ein *Steiner*sches $2n$-Eck sein, wenn die Differentiale $d\xi_n$ und $\delta\xi_n$ einander gleich wären; dies soll nun bewiesen werden.

Man kann alle angeschriebenen Differentiale aus dx_1 berechnen; namentlich ist $d\xi_n = -\frac{A(x_1, \xi_n)}{B(x_1, \xi_n)} dx_1$ und

$$\delta\xi_n = \frac{d\xi_n}{dx_n} \cdot \frac{dx_n}{d\xi_{n-1}} \cdot \frac{d\xi_{n-1}}{dx_{n-1}} \cdots \frac{dx_2}{d\xi_1} \cdot \frac{d\xi_1}{dx_1} \cdot dx_1,$$

oder aber

$$\delta\xi_n = -\frac{A(x_n, \xi_n)}{B(x_n, \xi_n)} \cdot -\frac{B(x_n, \xi_{n-1})}{A(x_n, \xi_{n-1})} \cdot -\frac{A(x_{n-1}, \xi_{n-1})}{B(x_{n-1}, \xi_{n-1})} \cdots -\frac{A(x_1, \xi_1)}{B(x_1, \xi_1)} \cdot dx_1.$$

Berücksichtigt man wegen des Zeichens, dass die Anzahl der angeschriebenen Brüche (Differentialquotienten) $2n-1$ ist, so verwandelt sich die zu beweisende Gleichung $\delta\xi_n = d\xi_n$ sofort in:

$$(2.)\quad \begin{cases} A(x_1, \xi_1)A(x_2, \xi_2)\dots A(x_n, \xi_n)B(x_1, \xi_n)B(x_2, \xi_1)\dots B(x_n, \xi_{n-1}) \\ = A(x_1, \xi_n)A(x_2, \xi_1)\dots A(x_n, \xi_{n-1})B(x_1, \xi_1)B(x_2, \xi_2)\dots B(x_n, \xi_n). \end{cases}$$

Offenbar entsteht die eine Seite der Gleichung aus der andern, wenn man auf die unter dem Functionszeichen A stehenden Buchstaben $x_1, \dots x_n$ die Substitution $x_2 x_3 \dots x_n x_1$ und auf die unter dem Zeichen B befindlichen Grössen $\xi_1 \dots \xi_n$ die cyclische Substitution $\xi_2 \xi_3 \dots \xi_n \xi_1$ anwendet. Um den Beweis der Richtigkeit der vorstehenden Gleichung nicht unnütz zu compliciren, nehmen wir einen besonderen Fall, etwa $n = 3$. Wir setzen also auf C_3 ein *Steiner*sches Sechseck $ABCDEF$ voraus und construiren das unendlich nahe Sechseck $A'B'C'D'E'F'$. Die zu beweisende Gleichung lautet dann

$$\begin{aligned} &A(x_1, \xi_1)A(x_2, \xi_2)A(x_3, \xi_3)B(x_1, \xi_3)B(x_2, \xi_1)B(x_3, \xi_2) \\ &= A(x_1, \xi_3)A(x_2, \xi_1)A(x_3, \xi_2)B(x_1, \xi_1)B(x_2, \xi_2)B(x_3, \xi_3); \end{aligned}$$

wir wollen je drei Factoren durch einen Buchstaben bezeichnen und schreiben die Gleichung in der Form

$$L.K = L'.K'.$$

Nun soll gezeigt werden, dass $L = -L'$ und $K = -K'$ ist.

Da je zwei Werthe x, ξ, welche beisammen unter dem Functionszeichen A oder B sich vorfinden, die Verwandtschaftsgleichung $G(x, \xi) = 0$ befriedigen, weil sie ja Theilverhältnisse von Strahlen sind, welche sich auf C_3 treffen, so hat man für dieselben

$$A(x, \xi) = \frac{G(x, \xi) - \Sigma(\xi)}{x} + x\Omega(\xi) = -\frac{\Sigma(\xi)}{x} + x\Omega(\xi).$$

Daher ergiebt sich das Product

$$\begin{aligned} L = &-\frac{\Sigma(\xi_1)\Sigma(\xi_2)\Sigma(\xi_3)}{x_1 x_2 x_3} + \frac{x_1}{x_2 x_3}\Omega(\xi_1)\Sigma(\xi_2)\Sigma(\xi_3) + \frac{x_2}{x_3 x_1}\Omega(\xi_2)\Sigma(\xi_3)\Sigma(\xi_1) \\ &+ \frac{x_3}{x_1 x_2}\Omega(\xi_3)\Sigma(\xi_1)\Sigma(\xi_2) - \frac{x_2 x_3}{x_1}\Omega(\xi_2)\Omega(\xi_3)\Sigma(\xi_1) - \frac{x_3 x_1}{x_2}\Omega(\xi_3)\Omega(\xi_1)\Sigma(\xi_2) \\ &- \frac{x_1 x_2}{x_3}\Omega(\xi_1)\Omega(\xi_2)\Sigma(\xi_3) + x_1 x_2 x_3 \Omega(\xi_1)\Omega(\xi_2)\Omega(\xi_3). \end{aligned}$$

Den Ausdruck für L' erhalten wir — wie schon bemerkt wurde — indem wir $x_1 x_2 x_3$ in diesem Ausdrucke cyclisch permutiren, d. h. es ist

$$\begin{aligned} L' = &-\frac{\Sigma(\xi_1)\Sigma(\xi_2)\Sigma(\xi_3)}{x_2 x_3 x_1} + \frac{x_2}{x_3 x_1}\Omega(\xi_1)\Sigma(\xi_2)\Sigma(\xi_3) + \frac{x_3}{x_1 x_2}\Omega(\xi_2)\Sigma(\xi_3)\Sigma(\xi_1) \\ &+ \frac{x_1}{x_2 x_3}\Omega(\xi_3)\Sigma(\xi_1)\Sigma(\xi_2) - \frac{x_3 x_1}{x_2}\Omega(\xi_2)\Omega(\xi_3)\Sigma(\xi_1) - \frac{x_1 x_2}{x_3}\Omega(\xi_3)\Omega(\xi_1)\Sigma(\xi_2) \\ &- \frac{x_2 x_3}{x_1}\Omega(\xi_1)\Omega(\xi_2)\Sigma(\xi_3) + x_2 x_3 x_1 \Omega(\xi_1)\Omega(\xi_2)\Omega(\xi_3). \end{aligned}$$

Sowohl L als auch L' dividiren wir durch das Product $\Omega(\xi_1)\Omega(\xi_2)\Omega(\xi_3)$ und bemerken hierbei, dass allgemein der Quotient $\frac{\Sigma(\xi)}{\Omega(\xi)}$ gleich ist dem Producte der beiden Wurzeln x der Gleichung $G(x, \xi) = 0$ d. h. gleich dem Producte der Theilverhältnisse x jener Strahlen von P, welche dem Strahle ξ zugeordnet sind. Nun ergiebt sich, weil sich das erste mit dem letzten Gliede tilgt:

$$\frac{L}{\Omega(\xi_1)\Omega(\xi_2)\Omega(\xi_3)} = x_1^2 x_3 + x_2^2 x_1 + x_3^2 x_2 - x_2^2 x_3 - x_3^2 x_1 - x_1^2 x_2,$$

$$\frac{L'}{\Omega(\xi_1)\Omega(\xi_2)\Omega(\xi_3)} = x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 + x_1^2 x_2 - x_1^2 x_3 - x_2^2 x_1 - x_3^2 x_2;$$

somit ist wirklich $L = -L'$. Die Gleichung $K = -K'$ könnte in gleicher Weise erwiesen werden, denn K' geht aus K durch eine cyclische Vertauschung der Grössen $\xi_1 \xi_2 \xi_3$ hervor, gerade so wie L' aus L durch eine solche Vertauschung der Werthe $x_1 x_2 x_3$ entstand; man hätte bloss für $B(x, \xi)$ einzuführen

$$\frac{G(x, \xi) - S(x)}{\xi} + \xi O(x) = -\frac{S(x)}{\xi} + \xi O(x).$$

Es ist also $LK = L'K'$, d. h. $\delta\xi_3 = d\xi_3$ oder mit anderen Worten, das Sechseck $A'B'C'D'E'F'$ muss ebenfalls ein *Steiner*sches Polygon sein.

Die Gleichung (2.) könnte genau so wie es für $n = 3$ geschehen ist, für jedes beliebige n erwiesen werden. Schreibt man die Gleichung (2.) in der Form $LK = L'K'$, wobei jeder dieser vier Buchstaben je n unmittelbar aufeinanderfolgende Factoren bedeutet, so ergiebt sich — falls man die Rechnung genau so wie für $n = 3$ durchführt — für ein gerades n $L = L'$ und $K = K'$, für ein ungerades n jedoch $L = -L'$ und $K = -K'$. Demgemäss ist immer $LK = L'K'$. Wenn somit $ABC\ldots M$ ein *Steiner*sches $2n$-Eck auf C_3 ist, so ist das unendlich nahe Polygon $A'B'C'\ldots M'$ ein ebensolches, und falls man dieses Resultat beliebig oft anwendet, folgt, dass jedes auf C_3 construirte Polygon, dessen Seiten abwechselnd durch P und Q gehen, sich schliessen und zwar $2n$-Seiten haben muss. Zum Ueberflusse folgt dies auch schon aus der Existenz zweier derartigen $2n$-Ecke und es ergiebt sich überdies, dass die durch P resp. durch Q gehenden Seiten der unendlich vielen Polygone in diesen Büscheln Strahleninvolutionen n^{ten} Grades bilden. Wir erhalten somit den folgenden Satz: „Kann man in zwei zwei und zweigliedrig verwandten Gebilden zwei beigeordnete Gruppen zu je n Elementen angeben d. h. zwei solche Gruppen, dass die jedem Elemente der einen Gruppe zugeordneten Elemente sich in der anderen vorfinden, so giebt es unendlich viele solcher beigeordneten Gruppen, und zwar ist jedes Element der Gebilde in einer derselben enthalten. *Die Gruppen bilden in jedem Gebilde eine Involution n^{ten} Grades, und die beiden Involutionen sind vermöge der zwei und zweigliedrigen Verwandtschaft projectivisch.* Beigeordnete Gruppen von anderer Elementenzahl giebt es dann nicht.“

Hiedurch ist der in dem früheren Aufsatze ausgesprochene Satz nicht nur allgemein erwiesen, sondern auch erweitert, so dass alles andere in dem Aufsatze Gesagte vollkommen richtig bleibt.

Der ausgesprochene Satz bleibt auch dann wahr, wenn die beigeordneten Gruppen aus imaginären Elementen bestehen und zwar aus dem einfachen Grunde, weil der Beweis die Realität der Elemente $x_1 x_2 \ldots x_n$, $\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n$ nicht verlangt. Auch ergiebt sich eine allgemeinere geometrische Deutung des ausgesprochenen Satzes, wenn man die unbeschränkt veränderlichen Grössen x und ξ — die man also im Allgemeinen als complex voraussetzen muss — auf die bekannte Art durch Punkte zweier Ebenen darstellt.

Prag, im Februar 1870.

Ueber den Ausdruck des Tetraeders durch die Coordinaten der Eckpunkte.

(Von Herrn *R. Baltzer* in Giessen.)

(Aus den Berichten der mathem.-phys. Classe der Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften vom 4. Mai 1870.)

Der Ausdruck des Tetraeder-Volums durch die Coordinaten der Eckpunkte wurde zuerst von *Lagrange* in der Abhandlung über die Pyramiden durch eine Rechnung gefunden, welche ausserhalb ihres Zusammenhanges etwas umständlich ist. Man gelangt zu demselben Ausdruck mittelst der Gleichung für die Ebene, welche 3 gegebene Punkte enthält, wie *Salmon* Geom. of 3 dimensions 31 gezeigt hat. Derselbe Ausdruck wurde von *Monge* (J. de l'école polyt. Cah. 15 p. 68) durch Berechnung von prismatischen Segmenten abgeleitet, eine Betrachtung, die in *Magnus* Sammlung (anal. Geometrie des Raumes § 14) wiedergegeben worden ist. Eine rein geometrische Ableitung der entsprechenden Formel findet man in *Möbius* Statik § 64; eine algebraische Ableitung, die auf Multiplication von Determinanten beruht, habe ich (Determ. §. 15) gegeben; eine andere Ableitung enthält *Hesse*s anal. Geometrie des Raumes (1. Vorlesung). Eine einfache und für die Präliminarien der Raumgeometrie geeignete Ableitung ergiebt sich durch die folgende Betrachtung.

Auch dem Zeichen nach ist $3\, OABC = OAB . NC$, wenn NC den Abstand des Punktes C von der Ebene OAB bedeutet. In Bezug auf 3 durch O beliebig gezogene Axen habe A die Coordinaten x_1, y_1, z_1, u. s. w. Durch Projection der aus den Coordinaten von C bestehenden gebrochenen Linie auf die Normale n der Ebene OAB findet man

$$NC = x_3 \cos xn + y_3 \cos yn + z_3 \cos zn.$$

Ferner werden die Fläche OAB und ihre Projectionen parallel mit x, y, z auf die Ebenen yz, zx, xy durch p, p_x, p_y, p_z bezeichnet, die Normalen der Ebenen yz, zx, xy durch x', y', z'. Dann hat der Normalschnitt des Prisma, welches die Fläche OAB parallel mit x auf die Ebene yz projicirt, die Werthe

$$p \cos xn = p_x \cos xx'$$

u. s. w. Nun hat das Parallelepiped, dessen Kanten auf x, y, z positive Einheiten sind, die Werthe

$$\sin yz \cos xx' = \sin zx \cos yy' = \sin xy \cos zz' = \sin xyz;$$

folglich ist

$$2p\cos xn = \frac{2p_x}{\sin yz}\sin xyz = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}\sin xyz$$

u. s. w. Durch Vereinigung der 3 Determinanten findet man

$$6\,OABC = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}\sin xyz.$$

Wenn man die Geraden, auf denen die Kanten OA, OB, OC liegen, durch f, g, h bezeichnet, so ist

$$6\,OABC = OA.OB.OC\sin fgh.$$

Demnach erhält man unter Voraussetzung eines orthogonalen Systems, bei dem $\sin xyz = 1$, $x_1 = OA\cos xf$, u. s. w. ist, die *Gauss*sche Gleichung

$$\sin fgh = \begin{vmatrix} \cos xf & \cos xg & \cos xh \\ \cos yf & \cos yg & \cos yh \\ \cos zf & \cos zg & \cos zh \end{vmatrix},$$

ferner durch Multiplication die *Staudt*sche Gleichung

$$\sin fgh\sin f'g'h' = \begin{vmatrix} \cos xf & \cos xg & \cos xh \\ \cos yf & \cos yg & \cos yh \\ \cos zf & \cos zg & \cos zh \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \cos xf' & \cos xg' & \cos xh' \\ \cos yf' & \cos yg' & \cos yh' \\ \cos zf' & \cos zg' & \cos zh' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos ff' & \cos fg' & \cos fh' \\ \cos gf' & \cos gg' & \cos gh' \\ \cos hf' & \cos hg' & \cos hh' \end{vmatrix}$$

und durch Vereinigung der beiden Systeme

$$\sin^2 fgh = \begin{vmatrix} 1 & \cos fg & \cos fh \\ \cos fg & 1 & \cos gh \\ \cos fh & \cos gh & 1 \end{vmatrix}.$$

Auszug aus einem Schreiben an den Herausgeber.

(Von Herrn *H. Schubert* in Potsdam.)

. . . . . . Herr *Zeuthen* in Copenhagen hat die Güte gehabt, einige von ihm verfasste, die Bestimmungen von Charakteristiken betreffende Abhandlungen durch Ihre Vermittelung in meine Hände gelangen zu lassen. Unter denselben befindet sich eine mir bisher unbekannt gebliebene in dänischer Sprache geschriebene Arbeit „Bestemmelse af Charakteristikerne i de elementaere Systemer af Flader af anden Orden", deren Inhalt mich zur Berichtigung einer Annahme veranlasst, die ich bei der Abfassung meiner im 71ten Bande Ihres Journals veröffentlichten, „Zur Theorie der Charakteristiken" betitelten Arbeit gemacht habe. In meiner aus dem Studium der Abhandlungen des Herrn *Chasles* in den Comptes rendus der Pariser Akademie über diesen Gegenstand hervorgegangenen Arbeit ist nämlich der von Herrn *Chasles* ausgesprochene Gedanke ausgeführt, die Elementarcharakteristiken der Flächen zweiter Ordnung aus den Zahlen zu bestimmen, welche angeben, wieviel degenerirte Flächen in einem Elementarsysteme vorkommen. Diese von mir mit σ, ε, $\varkappa$ bezeichneten Zahlen sind in meiner Arbeit unter der Voraussetzung behandelt, dass bis dahin weder eine Werthangabe noch eine ausführliche Begründung derselben publicirt worden sei. In dem ersten Theile dieser Annahme habe ich mich aber, wie ich jetzt sehe, getäuscht. Denn der oben erwähnten Abhandlung des Herrn *Zeuthen* ist eine „Oversigt" beigefügt, in welcher nicht bloss die auch von Herrn *Chasles* angegebenen Elementarcharakteristiken μ, ν, ϱ, sondern auch Gleichungen angeführt werden, aus denen die Werthe der Zahlen σ, ε, $\varkappa$ ersichtlich sind. Ich will nicht unterlassen, die für diesen Punkt Herrn *Zeuthen* gebührende Priorität hiermit anzuerkennen.

Potsdam, den 3. December 1870.

Ueber diejenigen rationalen Substitutionen, welche eine rationale Umkehrung zulassen.

(Von Herrn *Rosanes* in Breslau.)

Es ist in neuerer Zeit ein überaus wichtiges Hilfsmittel der reinen Analysis sowohl, als auch derjenigen Theile der Geometrie, welche mit ihr zusammenhängen, geworden, statt der bei einer Untersuchung auftretenden Grössen neue einzuführen, welche zu ihnen in einfacher Beziehung stehen. Unter den rationalen Substitutionen sind insbesondere diejenigen von Wichtigkeit, welche sich eindeutig umkehren lassen, d. h. auch eine rationale Darstellung der neuen Variablen durch die ursprünglichen gestatten. Die linearen Substitutionen, als welche dies in ihrer allgemeinsten Form ohne Hinzutreten einschränkender Bedingungen zulassen, haben auch seit langer Zeit die besondere Aufmerksamkeit der Mathematiker auf sich gezogen und eine vorzügliche Ausbildung erfahren. Umkehrbare Beziehungen von höheren Graden traten dagegen nur vereinzelt auf und jedesmal in sehr specieller, direct sich darbietender Form. Die Eintheilung der *Abel*schen Integrale nach der Classe der zu Grunde liegenden algebraischen Function führte zuerst auf ein ganz allgemeines Problem, welches mit dem hier zu behandelnden zusammenhängt. Die allgemeine Frage nach umkehrbaren rationalen Substitutionen soll in der vorliegenden Arbeit mit der Beschränkung auf zwei Variable, oder auf drei homogene, behandelt werden, wobei die geometrische Interpretation des kürzern Ausdruckes wegen zum grossen Theil benutzt wurde. Es kam mir hierbei im Wesentlichen darauf an, die charakteristischen Eigenschaften anzugeben, welche auch leicht eine Erweiterung für mehr Variable in gewissem Sinne zulassen.

Wiewohl dieser Aufsatz seit Februar vollendet ist, wurde seine Veröffentlichung durch verschiedene Hindernisse verzögert. Unterdessen ist mir vor wenigen Wochen bekannt geworden, dass Herr *Cremona* demselben Gegenstande eine Arbeit gewidmet hat*), in welcher auf rein geometrischem Wege etwa diejenigen Sätze abgeleitet sind, welche ich hier in den §§. 1, 2 algebraisch erlangt habe. Ich lege daher bei gegenwärtiger Ver-

---

*) *Cremona,* Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane, Accademia di Bologna, 1865.

öffentlichung das Hauptgewicht auf den Satz des §. 4, durch welchen es möglich ist, die allgemeine umkehrbare Substitution n^{ter} Ordnung auf eine gewisse Anzahl quadratischer zurückzuführen. Diese, als die einfachsten nichtlinearen, sind wohl zuerst von *Steiner* (Systematische Entwicklung etc. p. 251 ff.) eingeführt und als Instrument zur Auffindung geometrischer Sätze benutzt worden. — Die Fortführung des Gegenstandes für mehr als 3 Variable, sowie für den Fall der Umkehrbarkeit in Bezug auf zu Grunde liegende Gleichungen, mag vorbehalten bleiben.

§. 1.

Es sei die rationale Substitution, durch welche die Variablen $x_1 x_2 x_3$ in die anderen $y_1 y_2 y_3$ übergeführt werden, von der Form

$$\varrho x_i = f_i(y_1 y_2 y_3), \qquad i = 1, 2, 3$$

und deren rationale Umkehrung

$$\sigma y_i = \varphi_i(x_1 x_2 x_3);$$

f_i und φ_i bedeuten hierin ganze homogene Functionen von den Graden resp. n und p, und es folgt durch Einsetzung identisch

$$f_i(\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3) = x_i . X(x_1 x_2 x_3),$$
$$\varphi_i(f_1 f_2 f_3) = y_i . Y(y_1 y_2 y_3),$$

wo unter X, Y ganze homogene Functionen zu verstehen sind. Bezeichnen wir durch $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ drei willkürliche Constanten, so ist

$$(1.) \quad \begin{cases} \Sigma \lambda_i f_i(\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3) = X(x_1 x_2 x_3) . \Sigma \lambda_i x_i, \\ \Sigma \lambda_i \varphi_i(f_1 f_2 f_3) = Y(y_1 y_2 y_3) . \Sigma \lambda_i y_i . \end{cases}$$

Wir dürfen für die Folge voraussetzen, dass $\Sigma \lambda_i f_i(y_1 y_2 y_3)$ im Allgemeinen eine irreductible Form sei. Denn wäre

$$\Sigma \lambda_i f_i(y_1 y_2 y_3) = \psi(y_1 y_2 y_3) . \chi(y_1 y_2 y_3),$$

so müsste entweder, in Folge der Relationen (1.), $\psi(\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3)$ oder $\chi(\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3)$ durch $\Sigma \lambda_i x_i$ theilbar sein. Es sei dies bei $\psi(\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3)$ der Fall, so ist $\chi(\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3)$ von den Grössen λ frei, und $\chi(y_1 y_2 y_3)$ alsdann ein Factor für $f_1(y_1 y_2 y_3)$, $f_2(y_1 y_2 y_3)$, $f_3(y_1 y_2 y_3)$, was gegen die Voraussetzung streitet. Hiernach ist es klar, dass $\Sigma \lambda_i f_i(y_1 y_2 y_3) = 0$ eine Curve ist, welche nach der Bezeichnung von *Riemann* zur Zahl $p = 0$ gehört, da die Coordinaten ihrer Punkte sich als homogene Functionen zweier Grössen durch die Gleichungen

$$\sigma y_i = \varphi_i(x_1 x_2 x_3), \qquad \sum_{k=1,2,3} \lambda_k x_k = 0$$

darstellen lassen. Da diese Ausdrücke vom Grade p sind, so ist nothwendigerweise

$$n \leqq p.$$

Es liefert aber ebenso das umgekehrte Verfahren die Ungleichung

$$p \leqq n,$$

folglich ist

$$n = p;$$

d. h. „*die Substitutionen, welche eine unbedingte Umkehrung gestatten, sind von demselben Grade, wie ihre inversen.*"

Die bis jetzt erhaltene Eigenschaft reicht natürlich noch nicht hin, um das Netz von Curven $\Sigma\lambda_i f_i(y_1 y_2 y_3) = 0$ vollständig zu charakterisiren.

Es sei $\eta_1\eta_2\eta_3$ ein Werthsystem y, welches die beiden Gleichungen

$$\Sigma\lambda_i f_i(y_1 y_2 y_3) = 0, \qquad \Sigma\mu_i f_i(y_1 y_2 y_3) = 0$$

befriedigt; dann ist, wenn wir $\xi_1\xi_2\xi_3$ durch die Gleichungen

$$\varphi_i(\xi_1\xi_2\xi_3) = \sigma\eta_i$$

definiren, nach den Gleichungen (1.)

$$\Sigma\lambda_i f_i(\varphi_1\varphi_2\varphi_3) = X(\xi_1\xi_2\xi_3).\Sigma\lambda_i\xi_i = 0,$$
$$\Sigma\mu_i f_i(\varphi_1\varphi_2\varphi_3) = X(\xi_1\xi_2\xi_3).\Sigma\mu_i\xi_i = 0,$$
$$\Sigma\nu_i f_i(\varphi_1\varphi_2\varphi_3) = X(\xi_1\xi_2\xi_3).\Sigma\nu_i\xi_i,$$

$\lambda_1\lambda_2\lambda_3\ \mu_1\mu_2\mu_3\ \nu_1\nu_2\nu_3$ sind willkürliche Constanten. Sobald nun nicht gleichzeitig die beiden Gleichungen $\Sigma\lambda_i\xi_i = 0$, $\Sigma\mu_i\xi_i = 0$ erfüllt sind, müssen $\xi_1\xi_2\xi_3$ die Function X annulliren, folglich auch $\Sigma\nu_i f_i(\varphi_1\varphi_2\varphi_3) = 0$ befriedigen; d. h. alle Werthsysteme η, welche irgend zwei Formen $\Sigma\lambda_i f_i$, $\Sigma\mu_i f_i$ annulliren, bewirken dasselbe für jede andere Form $\Sigma\nu_i f_i$; ausgenommen ist das eine, dessen entsprechende Werthe ξ die beiden Gleichungen $\Sigma\lambda_i\xi_i = 0$, $\Sigma\mu_i\xi_i = 0$ liefern. Da die Grössen λ, μ ganz willkürlich geblieben sind, so entspricht den Werthen von $\xi_1\xi_2\xi_3$ in der That nur ein System $\eta_1\eta_2\eta_3$.

Irgend zwei Curven des Netzes schneiden sich somit in Punkten, die bis auf einen für das ganze Netz fest bleiben. Dieser eine variirt von Curve zu Curve.

Die festen Punkte werden wir im Folgenden die Fundamental-Punkte des Systems y nennen. — Das Gesagte gilt ebenso für das dem System x entsprechende Netz $\Sigma\lambda_i\varphi_i = 0$. Das bis jetzt Gefundene reicht vollkommen hin, um die unbedingte Umkehrbarkeit der Substitution $\varrho x_i = f_i(y_1 y_2 y_3)$ zu bewirken. In der That haben vermöge dessen zwei Curven von der Form $x_1 f_2(y_1 y_2 y_3) - x_2 f_1(y_1 y_2 y_3) = 0$,

$x_2 f_3(y_1 y_2 y_3) - x_3 f_2(y_1 y_2 y_3) = 0$ alle Schnittpunkte y bis auf einen mit der dritten $x_3 f_1(y_1 y_2 y_3) - x_1 f_3(y_1 y_2 y_3) = 0$ gemeinschaftlich. Die Coordinaten dieses einen Schnittpunktes sind somit rational durch die Coefficienten, d. h. durch die Grössen $x_1 x_2 x_3$ darstellbar.

Die allen Curven des Netzes gemeinsamen Fundamental-Punkte werden nicht durchweg die Geltung einfacher Schnittpunkte haben. Durch eine lineare Zusammenstellung können wir es als bewirkt voraussetzen, dass jeder der Fundamental-Punkte den gleichen Grad der Vielfachheit für die drei Linien $f_i = 0$ besitzt.

Ich behaupte nun, dass sämmtliche vielfachen Punkte, welche erforderlich sind, um die Curven des Netzes zu Curven vom Geschlechte $p=0$ zu machen, in den Fundamental-Punkten liegen. Denn wäre in diesen die hinreichende Anzahl noch nicht vereinigt, so müsste jede Curve $\Sigma\lambda_i f_i = 0$ ausser den festen wenigstens noch einen Doppelpunkt besitzen; d. h. es müssten für jedes Werthsystem λ die Gleichungen

$$\Sigma\lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial y_1} = 0, \quad \Sigma\lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial y_2} = 0, \quad \Sigma\lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial y_3} = 0$$

erfüllbar sein. Die Elimination der λ giebt für die y die Bedingung $\Delta(f_1 f_2 f_3) = 0$, wo $\Delta(f_1 f_2 f_3)$ die Functional-Determinante der Functionen $f_1 f_2 f_3$ bedeutet. Allein jedem Punkte von $\Delta = 0$ entspricht alsdann nur ein Werthsystem λ, und man würde also nur eine einfache Unendlichkeit von solchen erhalten. Soll aber jedes beliebige System $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ erhalten werden, so müssen die drei Gleichungen sich auf eine reduciren; d. h. es muss sein

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1} : \frac{\partial f_1}{\partial y_2} : \frac{\partial f_1}{\partial y_3} = \frac{\partial f_2}{\partial y_1} : \frac{\partial f_2}{\partial y_2} : \frac{\partial f_2}{\partial y_3} = \frac{\partial f_3}{\partial y_1} : \frac{\partial f_3}{\partial y_2} : \frac{\partial f_3}{\partial y_3},$$

was gegen die Voraussetzung ist, dass f_1, f_2, f_3 keinen gemeinschaftlichen Factor besitzen. Daraus folgt, dass es Curven im Netze $\Sigma\lambda_i f_i = 0$ giebt, die ausser den in den Fundamental-Punkten gelegenen keine mehrfachen Punkte besitzen, dass somit die für das Geschlecht Null nothwendige Zahl derselben für alle gemeinsam ist.

Bezeichnet man die Fundamental-Punkte des Systems y durch $p_1, p_2, \ldots p_r$, wo p_k zugleich diejenige Zahl vorstelle, welche die Vielfachheit des ihr zugehörigen Punktes angiebt, so bestehen, da der variable Schnittpunkt im Allgemeinen ein einfacher ist, die beiden charakteristischen Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{k=r} p_k^2 = n^2 - 1, \quad \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=r} p_k(p_k - 1) = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

oder hieraus

$$(2.) \qquad \sum_{k=1}^{k=r} p_k^2 = n^2-1, \quad \sum_{k=1}^{k=r} p_k = 3(n-1).$$

Diese beiden Gleichungen, welche noch eine grosse Willkür in der Wahl der nicht einmal ihrer Anzahl nach bestimmten Zahlen p_k zulassen, gestatten doch einen Schluss, der die Zurückführung der umkehrbaren Substitution n^{ter} Ordnung auf gewisse elementare ermöglicht.

§. 2.

Der wesentliche Unterschied zwischen einer eindeutigen (umkehrbaren) Beziehung höhern Grades und der gewöhnlichen linearen besteht darin, dass in vollem Umfange nur diese letzteren eindeutig sind. Bei den nichtlinearen erleidet die Eindeutigkeit stets Ausnahmen, indem es in jedem der beiden Systeme Punkte giebt, denen im andern ganze Linien, d. h. unendlich viele Punkte entsprechen.

Nach unserer Bezeichnung können in dieser Hinsicht nur solche Werthe y_i von der allgemeinen Regel abweichen, welche f_1, f_2, f_3 zugleich annulliren; d. h. die Fundamental-Punkte des Systems y.

Nach bekannten Methoden, wie sie auch schon bei Betrachtung eindeutiger Transformationen in Bezug auf eine zu Grunde liegende algebraische Gleichung in der Theorie der *Abel*schen Integrale benutzt werden, beweist man, dass *jedem einfachen Fundamental-Punkte eine Gerade, jedem kfachen eine Curve k^{ter} Ordnung vom Geschlecht Null entspricht.* Ist nämlich $\eta_1\eta_2\eta_3$ ein einfacher Punkt, in welchem f_1, f_2, f_3 gleichzeitig Null werden, $\zeta_1\zeta_2\zeta_3$ ein variabler Punkt irgend einer Geraden der Ebene, so sind $\eta_1+\alpha\zeta_1$, $\eta_2+\alpha\zeta_2$, $\eta_3+\alpha\zeta_3$ die Coordinaten eines Punktes der Geraden (η, ζ), welcher mit α variirt. Einem solchen Punkte entspricht im System x der Punkt

$$\varrho x_i = f_i(\eta_1+\alpha\zeta_1, \eta_2+\alpha\zeta_2, \eta_3+\alpha\zeta_3) = \alpha \sum_{\lambda=1}^{\lambda=3} \zeta_\lambda \frac{\partial f_i}{\partial \eta_\lambda} + \frac{\alpha^2}{2} \sum_{\lambda,\mu} \zeta_\lambda \zeta_\mu \frac{\partial^2 f_i}{\partial \eta_\lambda \partial \eta_\mu} + \cdots.$$

Lassen wir den Factor α fort und alsdann α Null werden, d. h. den Punkt auf der Geraden (η, ζ) sich immer mehr η nähern, so entspricht ihm schliesslich der Punkt

$$\varrho x_i = \sum_\lambda \zeta_\lambda \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \eta_\lambda},$$

also ein solcher, der von ζ, d. h. von der Geraden abhängt, auf welcher der variable Punkt sich η genähert hat. Variirt ζ auf der beliebigen Geraden

$$\beta_1\zeta_1+\beta_2\zeta_2+\beta_3\zeta_3 = 0,$$

so liegen alle entsprechenden Punkte x auf einer Geraden, deren Gleichung

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \frac{\partial f_1}{\partial \eta_\varkappa} & \frac{\partial f_2}{\partial \eta_\varkappa} & \frac{\partial f_3}{\partial \eta_\varkappa} \\ \frac{\partial f_1}{\partial \eta_\lambda} & \frac{\partial f_2}{\partial \eta_\lambda} & \frac{\partial f_3}{\partial \eta_\lambda} \end{vmatrix} = 0$$

ist, worin $\varkappa$, λ irgend zwei unter den Zahlen 1, 2, 3 bedeuten.

Es sei jetzt allgemein $\eta_1\eta_2\eta_3$ ein $l$facher Punkt von $f_1=0$, $f_2=0$, $f_3=0$, so verschwinden in der *Taylor*schen Entwicklung sämmtliche Ableitungen von f_i nach η bis zur l^{ten}, und wir können, unter Beibehaltung der eingeführten Bezeichnung, nach Weglassung von α^l als Factor, setzen

$$\varrho x_i = \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=l} \zeta_1^{\alpha_1}\zeta_2^{\alpha_2}\zeta_3^{\alpha_3}\frac{\partial^l f_i}{\partial\eta_1^{\alpha_1}\partial\eta_2^{\alpha_2}\partial\eta_3^{\alpha_3}} + \alpha\Sigma\ldots.$$

Dem Punkte, der längs der Linie (η, ζ) mit η zusammenfällt, entspricht also der Punkt

$$\varrho x_i = \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=l} \zeta_1^{\alpha_1}\zeta_2^{\alpha_2}\zeta_3^{\alpha_3}\frac{\partial^l f_i}{\partial\eta_1^{\alpha_1}\partial\eta_2^{\alpha_2}\partial\eta_3^{\alpha_3}}.$$

Lässt man ζ auf in er Geraden variiren, so beschreibt x eine Curve l^{ter} Ordnung vom Geschlecht Null.

In gleicher Weise entspricht einem $k$fachen Fundamentalpunkte des Systems x eine Linie k^{ter} Ordnung vom Geschlecht Null im System y. Diese Linien, welche Punkten entsprechen, haben eine einfache Bedeutung, welche hier in Kürze angedeutet werden mag.

Es war

$$f_i(\varphi_1\varphi_2\varphi_3) = x_i \,.\, X(x_1x_2x_3).$$

Jedem Punkte x der Linie $X=0$ entspricht ein Punkt $y_1y_2y_3$ vermöge der Gleichungen

$$\sigma y_i = \varphi_i(x_1x_2x_3),$$

welcher zugleich auf $f_1(y_1y_2y_3)=0$, $f_2(y_1y_2y_3)=0$, $f_3(y_1y_2y_3)=0$ liegt. Die Curve

$$X(x_1, x_2, x_3) = 0$$

repräsentirt somit in ihren irreductibeln Factoren diejenigen Linien im System x, welche den Fundamentalpunkten des Systems y entsprechen. Da jedoch die Zahl der Schnittpunkte von $f_1=f_2=f_3=0$ endlich ist, so folgt aus obigen Gleichungen, dass für sämmtliche Punkte von $X=0$ die Functionen φ_1, φ_2, φ_3 einer endlichen Anzahl von Werthen $y_1y_2y_3$ proportional bleiben. Ist also

$P(x_1 x_2 x_3)$ irgend ein irreductibler Factor von X, so darf man setzen

$$y_2\varphi_3 - y_3\varphi_2 = P.Q_1(x_1x_2x_3),\quad y_3\varphi_1 - y_1\varphi_3 = P.Q_2(x_1x_2x_3),$$
$$y_1\varphi_2 - y_2\varphi_1 = P.Q_3(x_1x_2x_3),$$

oder wenn wir allgemein die Ausdrücke

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \end{vmatrix}$$

resp. durch $\varLambda$, M bezeichnen,

$$\varLambda = P.\Sigma\lambda_i Q_i,\qquad M = P.\Sigma\mu_i Q_i.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} \varLambda_1 & \varLambda_2 & \varLambda_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 \\ \sum\limits_i p_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_1} & \sum\limits_i p_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_2} & \sum\limits_i p_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_3} \end{vmatrix}$$

durch P theilbar ist, sobald wir unter $\varLambda_1, \ldots, M_1, \ldots$ resp. $\frac{\partial\varLambda}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial M}{\partial x_1}, \ldots$, unter $p_1 p_2 p_3$ willkürliche Constanten verstehen. Nun ist aber identisch

$$\begin{vmatrix} \varLambda_1 & \varLambda_2 & \varLambda_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 \\ \sum\limits_i p_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_1} & \sum\limits_i p_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_2} & \sum\limits_i p_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_3} \end{vmatrix} = \varDelta(\varphi_1\varphi_2\varphi_3).(p_1y_1+p_2y_2+p_3y_3)\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix},$$

folglich ist die Functionaldeterminante der $\varphi : \varDelta(\varphi_1\varphi_2\varphi_3)$ durch jeden irreductibeln Factor P von $X(x_1x_2x_3)$, somit auch durch das Product aller theilbar. Da aber $X(x_1x_2x_3) = 0$, wie oben bemerkt wurde, sich aus sämmtlichen Linien zusammensetzt, welche den Fundamentalpunkten des Systems y entsprechen, so folgt aus der Gleichung $\sum\limits_{k=1}^{k=r} p_k = 3(n-1)$, *dass das Product der irreductibeln Factoren von X vom Grade $3(n-1)$, und folglich mit $\varDelta(\varphi_1\varphi_2\varphi_3)$ bis auf einen constanten Factor identisch ist.* —

§. 3.

Bevor ich dazu übergehe, die allgemeinen Beziehungen anzugeben, welche zwischen einander entsprechenden Formen in x und y bei der eindeutigen Transformation n^{ter} Ordnung statthaben, will ich in diesem Paragraphen die charakteristischen Eigenschaften der sogenannten *quadratischen Transformation*

voraufschicken, insoweit sie für die Folge, insbesondere für die Herleitung des Hauptsatzes in §. 4 erforderlich sind.

Man nennt eine eindeutige Transformation quadratisch, sobald $f_i(y_1 y_2 y_3)$ Functionen zweiten Grades sind. Aus den im ersten Paragraphen gefundenen Gleichungen (2.) ersieht man, dass für $n=2$ nur der eine Fall möglich ist, dass die Curven $f_1=0$, $f_2=0$, $f_3=0$ drei einfache Punkte gemeinschaftlich haben. Solche drei Formen lassen sich auf zwei wesentlich verschiedene Arten mit linearen Factoren so multipliciren, dass die Summe identisch verschwindet. Bezeichnen wir zwei solche Systeme linearer Formen durch A_i, B_i, so dass

$$A_i = \sum_{k=1,2,3} a_{ki} y_k, \qquad B_i = \sum_{k=1,2,3} b_{ki} y_k, \qquad i = 1, 2, 3,$$

so ist identisch $\sum_i A_i f_i = 0$, $\sum_i B_i f_i = 0$.

Die Beziehung zwischen x und y lässt sich somit auch durch die beiden Gleichungen darstellen:

$$(3.) \qquad \sum_i x_i A_i = 0, \quad \sum_i x_i B_i = 0.$$

Zwei solche in Bezug auf x_i und y_i bilineare Gleichungen geben also die einfachste nichtlineare Beziehung. Sie ist diejenige, welche sich beim Aufsuchen eindeutiger Relationen naturgemäss zuerst darbietet und auch lange Zeit als die einzige eindeutige gegolten hat. Nach *Steiner*, den ich in der Einleitung erwähnt habe, ist hauptsächlich die interessante Abhandlung von *Seidewitz*: „Darstellung der geometrischen Verwandtschaften mittelst projectivischer Gebilde" (*Grunerts* Arch. Th. VII.) zu nennen.

Ebenso wie im System y, ist auch im System x die Zahl der Fundamentalpunkte gleich 3. Wir bezeichnen diese durch die Buchstaben α_1, α_2, α_3, jene durch $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, so dass den Punkten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ resp. die Geraden $\beta_2\beta_3, \beta_3\beta_1$, $\beta_1\beta_2$ in y, und folglich den Punkten $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ die Geraden $\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_3\alpha_1$, $\alpha_1\alpha_2$ in x entsprechen. Jeder Geraden in x entspricht ein Kegelschnitt in y, welcher durch β_1, β_2, β_3 geht, und umgekehrt. Die Eindeutigkeit der Beziehung erleidet nur Ausnahmen in den Fundamentalpunkten. Da dem Punkte α_1 die Gerade $\beta_2\beta_3$ in y entspricht, so entspricht dieser Geraden nur ein Punkt (α_1) in x. Da aber $\beta_2\beta_3$ die Punkte β_2, β_3 enthält, denen die ganzen Geraden $\alpha_3\alpha_1$, $\alpha_1\alpha_2$ entsprechen, so hat der Satz, dass *jeder* Geraden in dem einen System ein Kegelschnitt in dem andern entspricht, welcher durch die drei Fundamentalpunkte geht, keine Ausnahme in diesem besonderen Falle. So aufgefasst, ist auch das Resultat in dem allgemeinen Falle leicht zu erkennen. Einer Curve C von der n^{ten}



Ordnung im System x entspricht in y eine Curve C' von der Ordnung $2n$. Da C die Geraden $\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_3\alpha_1$, $\alpha_1\alpha_2$ in je n Punkten schneidet, denen immer nur ein Punkt (resp. $\beta_1, \beta_2, \beta_3$) in y entspricht, so geht C' durch die Punkte β_1, β_2, β_3 je n mal. Geht allgemein C durch die Punkte α_1, α_2, α_3 resp. k_1, k_2, k_3 mal, so ändert auch dies am Grade von C' nur insofern, als gewisse feste Theile abgesondert werden, nämlich die Geraden $\beta_2\beta_3$, $\beta_3\beta_1$, $\beta_1\beta_2$ resp. k_1, k_2, k_3 fach. Ausserdem bleibt also noch eine Curve vom Grade $2n-(k_1+k_2+k_3)$ zurück, welche durch die Punkte β_1, β_2, β_3 resp. $n-(k_2+k_3)$, $n-(k_3+k_1)$, $n-(k_1+k_2)$ mal hindurchgeht.

In dem besonderen Falle, wo die linken Seiten der beiden Gleichungen (3.) in Bezug auf die Grössen x und y symmetrisch sind, d. h. wenn $a_{ik} = a_{ki}$, $b_{ik} = b_{ki}$, ist die geometrische Repräsentation des Entsprechens bekanntlich eine sehr einfache, sobald wir die Ebene der x und y zusammenfallen lassen. Es lassen sich alsdann in dieser Ebene zwei Kegelschnitte S_1, S_2 finden, derart dass je zwei einander entsprechende Punkte x, y in Bezug auf S_1 und S_2 einander conjugirt sind. Die Punkte β_1, β_2, β_3 fallen resp. mit α_1, α_2, α_3 zusammen und bilden das den Kegelschnitten S_1, S_2 gemeinschaftliche Tripel conjugirter Punkte. Für die Folge bemerke ich, dass zu beliebig gewählten Fundamentalpunkten sich stets unendlich viele symmetrische quadratische Substitutionen aufstellen lassen.

Zum Schlusse führe ich noch specielle Fälle an, die bisher nicht beachtet worden zu sein scheinen, für unsere Zwecke jedoch unter Umständen von Wichtigkeit sind.

Wenn nämlich die beiden Kegelschnitte S_1, S_2 eine einfache Berührung haben, dann fallen für unsere Aufgabe zwei der Punkte α_1, α_2, α_3 (etwa α_2 und α_3) zusammen. Allen Geraden entsprechen alsdann Kegelschnitte, welche einen einfachen Punkt (α_1) und zwei unendlich nahe ($\alpha_2\alpha_3$) gemeinschaftlich haben. Bezeichnet man den Berührungspunkt von S_1 und S_2 durch P, die beiden noch übrigen Schnittpunkte durch P_1, P_2, den Schnittpunkt von P_1P_2 mit der Tangente in P durch P_3, so gehen die allen Geraden der Ebene entsprechenden Kegelschnitte durch P_3 und berühren sich in P längs der Geraden PP_4, welche mit PP_1, PP_2, PP_3 vier harmonische Strahlen bildet. Einer Curve n^{ter} Ordnung entspricht eine Curve $2n^{\text{ter}}$ Ordnung, welche in P_3 einen $n$fachen, in P längs der Geraden PP_4 zwei unendlich nahe $n$fache Punkte besitzt. Umgekehrt, so oft eine Curve durch P_3 und P geht, fallen bei der transformirten Linie resp. die Geraden PP_4, PP_3 heraus. Geht jedoch die

Curve in P auch noch durch den unendlich nahen Punkt von PP_4, so fällt PP_3 doppelt heraus.

Haben die allen Geraden entsprechenden Kegelschnitte $\Sigma\lambda_i f_i = 0$ eine Berührung zweiter Ordnung, also 3 unendlich nahe Punkte gemein, so bilden diese unsere 3 Fundamentalpunkte; die beiden zu Grunde liegenden Kegelschnitte S_1, S_2 haben gleichfalls eine Berührung zweiter Ordnung. Einer Curve n^{ter} Ordnung entspricht in diesem Falle eine Curve $2n^{\text{ter}}$ Ordnung mit 3 zusammengefallenen $n$fachen Punkten, u. s. f.

§. 4.

Zu einer eindeutigen Transformation n^{ter} Ordnung übergehend, können wir dieselben einfachen Principien anwenden. Einer beliebigen Geraden in x entspricht in y eine Curve n^{ter} Ordnung, welche durch sämmtliche Fundamentalpunkte geht, und zwar $p_k$mal durch einen Punkt p_k. Einer Curve C von l^{ter} Ordnung in x entspricht in y eine Curve C' $n.l^{\text{ter}}$ Ordnung, welche $l.p_k$mal durch jeden Fundamentalpunkt p_k hindurchgeht.

In der That entspricht dem Punkte p_k eine Curve p_k^{ter} Ordnung in x, und so oft diese von der Curve C getroffen wird, entsteht ein Punkt im System x, dessen entsprechender p_k ist. — Einem Fundamentalpunkte von der Ordnung q_k in x entspricht eine Linie A q_k^{ten} Grades in y; die Ordnungen der Fundamentalpunkte, durch welche diese geht, haben zur Summe $n.q_k$. Denn der Linie A entspricht in x eine andere vom Grade $n.q_k$, die jedoch nur aus solchen zusammengesetzt sein kann, welche Fundamentalpunkten in y entsprechen. Eine Erniedrigung des Grades der transformirten Curve kann nur dadurch stattfinden, dass gewisse Linien fortgelassen werden, welche für die Transformation fest sind.

Um nun eine Transformation n^{ter} Ordnung in quadratische aufzulösen, bedenken wir, dass bei einer symmetrischen quadratischen Transformation einer Curve C vom Grade n, welche durch die 3 Fundamentalpunkte resp. k_1, k_2, $k_3$mal hindurchgeht, eine Curve C' vom Grade $2n-(k_1+k_2+k_3)$ entspricht, und wählen drei Fundamentalpunkte p_1, p_2, p_3 des Systems y als ebensolche einer quadratischen symmetrsichen Transformation, durch welche y_i mit neu einzuführenden Grössen y'_i zusammenhängen soll. Es sei diese $\varrho'.y_i = f'_i(y'_1 y'_2 y'_3)$, $\sigma'.y'_i = \varphi'_i(y_1 y_2 y_3)$. Hierdurch ist ein Zusammenhang zwischen den Grössen $x_1 x_2 x_3$ und $y'_1 y'_2 y'_3$ hervorgebracht, der offenbar eindeutig ist, der Natur seiner

Entstehung nach. Es ist nämlich

$$\tau . x_i = f_i(f_1' f_2' f_3'), \quad \omega . y_i' = \varphi_i'(\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3).$$

Nun ist $f_i(f_1' f_2' f_3') = 0$ nichts als diejenige Curve, welche der Curve $f_i(y_1 y_2 y_3) = 0$ vermöge der quadratischen Substitution im Systeme y' entspricht. Sämmtliche $f_i(y_1 y_2 y_3) = 0$ gehen aber durch die Fundamentalpunkte resp. p_1, p_2, p_3 mal, wie aus der getroffenen Wahl unmittelbar hervorgeht. Es werden somit die 3 Curven $f_1(f_1' f_2' f_3') = 0$, $f_2(f_1' f_2' f_3') = 0$, $f_3(f_1' f_2' f_3') = 0$ die Geraden $(p_2 p_3)$, $(p_3 p_1)$, $(p_1 p_2)$ resp. p_1, p_2, p_3 mal enthalten. Nach Fortlassung dieser überflüssigen Factoren bleibt eine Relation von der Form:

$$\theta . x_i = \psi_i(y_1' y_2' y_3'),$$

wo ψ_i nur noch eine Function vom Grade $2n - (p_1 + p_2 + p_3)$ darstellt.

Durch dieses Mittel ist die allgemeine Beziehung n^{ten} Grades in zwei andere zerlegt, von denen die eine eine quadratische $\sigma' . y_i' = \varphi_i'(y_1 y_2 y_3)$, die andere vom Grade $2n - (p_1 + p_2 + p_3)$ ist. Beide zusammen repräsentiren die ursprüngliche.

Eine wesentliche Vereinfachung ist hierdurch nur dann eingetreten, sobald die Zahlen p_1, p_2, p_3 so gewählt sind, dass $p_1 + p_2 + p_3 > n$, in welchem Falle $2n - (p_1 + p_2 + p_3) < n$, d. h. ψ_i von niederem als n^{ten} Grade ist. Im Folgenden soll dargethan werden, dass eine solche Wahl immer möglich ist, d. h. *wenn $p_1, p_2, \dots p_k, \dots p_r$ positive ganze Zahlen sind, welche den Bedingungen*

$$\sum_{k=1}^{k=r} p_k^2 = n^2 - 1, \quad \sum_{k=1}^{k=r} p_k = 3(n-1)$$

genügen, auch immer

$$p_1 + p_2 + p_3 > n$$

ist, sobald die Grössen so geordnet sind, dass $p_1 \geqq p_2 \geqq p_3 \dots \geqq p_r$.

Um die Richtigkeit dieses Satzes einzusehen, schicke ich folgenden Hilfssatz voraus.

Wenn für jedes System ganzer, positiver Zahlen p_1, p_2, $\dots$ p_k, $\dots$, welches die Bedingungen

$$\sum_k p_k = 3(n-1), \quad \sum_k p_k^2 \geqq n^2 - 1, \quad p_1 \geqq p_2 \geqq p_3 \dots$$

erfüllt, die Ungleichung stattfindet

$$p_1 + p_2 + p_3 > n,$$

so findet dasselbe auch für $n+1$ statt; d. h. aus den Relationen

$$q_1 + q_2 + q_3 + \dots = 3n, \quad q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + \dots \geqq (n+1)^2 - 1$$

folgt auch nothwendigerweise

$$q_1 + q_2 + q_3 > (n+1), \quad \text{wo} \quad q_1 \geqq q_2 \geqq q_3 \geqq \dots.$$

Beweis. Gesetzt, es fände dies nicht statt, sondern $q_1+q_2+q_3=n+1-\alpha$, $\alpha\geqq 0$. Dann liefern die Zahlen q_1-1, q_2-1, q_3-1, q_4, q_5, ... ein System von Zahlen r_k, welche den obigen Bedingungen für die Zahlen p_k genügen. Ordnen wir so, dass $r_1\geqq r_2\geqq r_3\geqq\dots$, so ist $\Sigma r_k=3(n-1)$, $\Sigma r_k^2=\Sigma q_k^2-2(q_1+q_2+q_3)+3$, also $\Sigma r_k^2>n^2+2\alpha+1>n^2-1$. Gemäss der Voraussetzung des Satzes muss $r_1+r_2+r_3>n$ stattfinden. Nun ist es aber klar, dass, der Definition der Grössen r zufolge, die Summe der drei grössten unter ihnen zwischen zwei Grenzen eingeschlossen bleibt. Es ist nämlich $q_1+q_2+q_3\geqq r_1+r_2+r_3\geqq(q_1-1)+(q_2-1)+(q_3-1)$, oder $r_1+r_2+r_3=(q_1+q_2+q_3)-3+\varepsilon$, wo ε einen der Werthe 0, 1, 2, 3 haben kann, und nach Einsetzung des Werthes für $(q_1+q_2+q_3)$ wird $r_1+r_2+r_3=n-2+\varepsilon-\alpha$. Da aber andererseits, wie wir gesehen haben, $r_1+r_2+r_3>n$ sein muss, so stellt sich die supponirte Gleichung: $q_1+q_2+q_3=n+1-\alpha$ als unzulässig heraus, mit alleiniger Ausnahme des Falles, wo $\alpha=0$, $\varepsilon=3$ ist. Dies kommt darauf hinaus, dass $q_1+q_2+q_3=n+1$ und $q_1=q_2=q_3=q_4=q_5=q_6$ ist. Eine einfache Ueberlegung beweist in der That, dass $\varepsilon=3$ die Gleichheit der drei ersten Grössen q nach sich zieht. Bilden wir sodann aus den Grössen q_1, q_1, q_1, q_4, q_5, q_6, ... die Zahlenreihe der r, so sind dieselben repraesentirt durch: $q_1-1, q_1-1, q_1-1, q_4, q_5, q_6, \dots$. Soll nun die Summe der drei grössten unter ihnen $r_1+r_2+r_3$ gleich $q_1+q_2+q_3$, d. h. $=3q_1$ werden, so kann dies nur dadurch erzielt werden, dass $q_4=q_5=q_6=q_1$ ist. In diesem besondern Falle setzen wir $q_1=m$, dann ist unter Berücksichtigung, dass $n+1=3m$:

$$\left.\begin{array}{l} q_7+q_8+\dots=3n-6m=3(m-1), \\ q_7^2+q_8^2+\dots\geqq n^2+2n-6m^2, \text{ d. h. } \geqq 3m^2-1. \end{array}\right\} m\geqq q_7\geqq q_8\geqq\dots.$$

Nun geht aus der Identität

$$(a-1)^2+(b+1)^2 = (a^2+b^2)+2(b-a+1)$$

hervor, dass die Summe der Quadrate eines Systems von Zahlen sicher dadurch nicht verkleinert wird, dass wir von den kleineren unter ihnen Einheiten fortnehmen und sie den grösseren zulegen. Wir operiren nun in der Weise, dass wir von dem kleinsten der q solange Einheiten zu q_7 legen, bis dieses $=m$ wird. Reicht das letzte q hierfür nicht, so ziehen wir nach Erschöpfung desselben auch das vorletzte hinzu. Ist dies geschehen, so verfahren wir ebenso mit q_8, bis dieses $=m$ wird; endlich mit q_9, bis es $=m-3$ wird. Hierdurch sind alle späteren q vernichtet, und wir haben Alles auf die 3 Grössen reducirt m, m, $m-3$. Die Summe ist unverändert, die

Summe der Quadrate aber ist grösser geworden. Sie ist aber jetzt $= m^2+m^2+(m-3)^2$, d. h. kleiner als $3m^2-1$. (Der noch mögliche Fall $m=1$ schliesst sich leicht aus.) Hiermit ist die Richtigkeit des Satzes für $n+1$ erwiesen, sobald er für n gilt. Für $n=2$ sind aber die Bedingungen $\Sigma p_k = 3(n-1)$, $\Sigma p_k^2 \geqq n^2-1$ nur durch die Zahlensysteme 1, 1, 1; 2, 1; 3 erfüllbar, und somit $p_1+p_2+p_3 > 2$.

Auf diese Weise ist die Möglichkeit dargethan, durch Einführung neuer Grössen mittelst quadratischer Substitutionen den Grad der Transformation mindestens je um eine Einheit zu erniedrigen. *Ist also die ursprüngliche Beziehung n^{ten} Grades von der Form*

$$\varrho x_i = f_i(y_1, y_2, y_3),$$

so kann man eine gewisse Anzahl neuer Grössensysteme

$$y_1' y_2' y_3', \quad y_1'' y_2'' y_3'', \quad \ldots, \quad y_1^{(p)} y_2^{(p)} y_3^{(p)},$$

so einführen, dass je zwei aufeinanderfolgende $(y_1^{(k)} y_2^{(k)} y_3^{(k)})$ und $(y_1^{(k+1)} y_2^{(k+1)} y_3^{(k+1)})$ durch eine eindeutige quadratische Substitution mit einander zusammenhängen, und dass eine ebensolche Beziehung zwischen y_i und y_i', $y_i^{(p)}$ und x_i stattfindet. Dadurch ist die allgemeine eindeutige Transformation in eine Anzahl quadratischer aufgelöst. Sobald die zu Grunde liegende Transformation zusammengefallene Fundamentalpunkte besitzt, ist man unter Umständen genöthigt, auch solche quadratische Transformationen zu wählen, wie sie am Schlusse des §. 3 angeführt sind. —

Von den vielen Fragen, welche sich an diesen Gegenstand schliessen lassen, will ich nur zwei erwähnen: die Frage nach sich selbst entsprechenden Punkten und nach sich selbst entsprechenden Linien.

Die erstere kommt nach den letzten Ausführungen auf folgende zurück: Es hängen y_i' mit y_i'', y_i'' mit y_i''', ... $y_i^{(p-1)}$ mit $y_i^{(p)}$ durch je eine quadratische Substitution zusammen; wie oft geschieht es, dass y_i' mit $y_i^{(p)}$ zusammenfällt? Allgemein gehalten, ist die Frage leicht zu beantworten, doch können in besonderen Fällen beträchtliche Ausnahmen vorkommen. Ist $p=3$, so geschieht es im Allgemeinen sechsmal. Für den Fall symmetrischer Transformationen bedeutet dies geometrisch: Wenn vier Kegelschnitte in einer Ebene liegen, so giebt es sechs Punkte von der Eigenschaft, dass die vier Polaren sich in einem Punkte treffen. Man kann zeigen, dass diese sechs Punkte die Ecken eines vollständigen Vierseits bilden, d. h. viermal zu dreien auf Geraden liegen. Sind die Gleichungen der 4 Kegelschnitte $S_1=0$, $S_2=0$, $S_3=0$, $S_4=0$, die

der 4 Geraden $L_1=0$, $L_2=0$, $L_3=0$, $L_4=0$, so kann man setzen $S_i=\sum_{k=1}^{k=4}\alpha_k^i L_k^2$, $i=1, 2, 3, 4$; d. h.

„*Vier quadratische ternäre Formen lassen sich im Allgemeinen gleichzeitig linear durch die Quadrate von vier linearen Formen darstellen.*“

Was die zweite Frage betrifft, so ist es klar, dass es bei einer allgemeinen Transformation keine Curve giebt, die sich selber entspricht. Bei der symmetrischen quadratischen, welche wir auf die einfache Form

$$\varrho x_1 = y_2 y_3, \quad \varrho x_2 = y_3 y_1, \quad \varrho x_3 = y_1 y_2$$

reducirt annehmen, ist es leicht, Curven von beliebig hohem Grade zu construiren, die sich selbst wiedererzeugen. Behalten wir die alte Bezeichnung der Fundamentalpunkte durch α_1, α_2, α_3, durch welche die Curve C resp. k_1, k_2, k_3 mal geht, bei, so ist die erste Forderung, damit die transformirte Curve C' von demselben Grade n wird, wie C: $k_1+k_2+k_3=n$. Es sei nun

$$\sum_{i_1+i_2+i_3=n} a_{i_1 i_2 i_3} x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3} = 0$$

die Gleichung von C, dann gehen zwei Glieder von der Form

$$a_{i_1 i_2 i_3} x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3} + a_{n-k_1-i_1,\, n-k_2-i_2,\, n-k_3-i_3} x_1^{n-k_1-i_1} x_2^{n-k_2-i_2} x_3^{n-k_3-i_3}$$

nach der Transformation unter Fortlassung des Factors $y_1^{k_1} y_2^{k_2} y_3^{k_3}$ über in:

$$a_{i_1 i_2 i_3} y_1^{n-k_1-i_1} y_2^{n-k_2-i_2} y_3^{n-k_3-i_3} + a_{n-k_1-i_1,\, n-k_2-i_2,\, n-k_3-i_3} y_1^{i_1} y_2^{i_2} y_3^{i_3}.$$

Es wird somit C' mit C identisch sein, sobald die Beziehung stattfindet:

$$a_{n-k_1-i_1,\, n-k_2-i_2,\, n-k_3-i_3} = \pm a_{i_1 i_2 i_3}.$$

Hierdurch ist die Möglichkeit gegeben, Curven von jedem Grade herzustellen, welche sich selbst wieder erzeugen. —

Breslau, im Juni 1870.

Ueber die Druckkräfte, welche auf Ringe wirksam sind, die in bewegte Flüssigkeit tauchen.

(Von Herrn *Ludwig Boltzmann* in Graz.)

Herr *Kirchhoff* hat in einer Abhandlung im 71ten Bande dieses Journals nachgewiesen, dass auf zwei unendlich dünne in einer bewegten Flüssigkeit, die in der Unendlichkeit ruht, befindliche Ringe von der Flüssigkeit Druckkräfte ausgeübt werden, deren Moment für irgend eine Verrückung gleich dem Moment der Kräfte ist, mit welchen die Ringe auf einander wirken würden, wenn gewisse elektrische Ströme in ihnen flössen. Er knüpft daran die Bemerkung, dass demzufolge die Ringe scheinbar dieselben Kräfte auf einander ausüben, wie diese elektrischen Ströme. Diese Bemerkung hat aber nicht allgemeine Gültigkeit *); wenn die Ringe in Bewegung sind, so können die mit einander verglichenen Kräfte sich noch durch Kräfte unterscheiden, die von der Bewegung der Ringe abhängen, und deren Moment für jede Verrückung gleich Null ist. In der That zeigt die Rechnung, dass dies der Fall ist.

Da Herr *Kirchhoff* den Beweis für die Richtigkeit des von ihm gefundenen Werthes der in der Flüssigkeit enthaltenen lebendigen Kraft nur für den Fall eines kreisförmigen Querschnitts der Ringe geliefert hat, so will ich mit der allgemeinen Berechnung der in der Flüssigkeit enthaltenen lebendigen Kraft für nicht kreisförmige Ringquerschnitte den Anfang machen; hierauf soll gezeigt werden, wie dieselbe vermittelst des sogenannten *Hamilton*schen Principes zur Berechnung der auf die Ringe wirksamen Kraft angewendet werden kann, wobei sich zeigen wird, dass die Art und Weise, wie zuerst die Herren *Thomson* und *Tait* dieses Princip auf Probleme der Hydrodynamik angewendet haben, im Allgemeinen eine unerlaubte ist, in den von diesen Herren betrachteten Fällen aber in Folge des Verschwindens gewisser Glieder zu keinem fehlerhaften Resultate führt. Zum Schlusse endlich will ich die directe Bestimmung der

---

*) Als ich Herrn *Kirchhoff* in einem Gespräche auf diesen Umstand aufmerksam machte, theilte er mir mit, dass auch er ihn bereits bemerkt habe.

auf jedes Oberflächenelement der Ringe wirksamen Druckkräfte in einer etwas allgemeineren Weise ausführen, was auch der einfachste Weg zu sein scheint, um zu dem für unendlich dünne Ringe geltenden Resultate zu gelangen. Es sei eine reibungslose Flüssigkeit von einer allseitig geschlossenen Fläche 0 umgrenzt. In derselben seien beliebig viele Körper eingetaucht, von denen alle oder doch einige einen mehrfach zusammenhängenden Raum erfüllen. An jedem Punkte der Flüssigkeit soll ein im Allgemeinen mehrdeutiges Geschwindigkeitspotential existiren. Ausser dem in der Flüssigkeit herrschenden Drucke sollen keine Kräfte auf die Flüssigkeitstheilchen wirken. Setzen wir zuerst voraus, sämmtliche eingetauchte Körper befinden sich in Ruhe; wir können uns einen für die folgenden Untersuchungen sehr brauchbaren Ausdruck für das Geschwindigkeitspotential auf folgende Art verschaffen. Bezeichnen wir die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes der Flüssigkeit mit x, y, z, die Componenten der daselbst herrschenden Geschwindigkeit c mit u, v, w; ferner dieselben Grössen für einen anderen Punkt mit x', y', z', u', v', w'; endlich mit r die Entfernung beider Punkte und definiren drei Grössen A, B, C durch folgende über den ganzen von der Flüssigkeit erfüllten Raum auszudehnende Integrale:

$$A = -\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{u'}{r}\,dx'dy'dz', \qquad B = -\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{v'}{r}\,dx'dy'dz',$$

$$C = -\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{w'}{r}\,dx'dy'dz',$$

so ist:

$$(1.)\quad u = \frac{d^2A}{dx^2}+\frac{d^2A}{dy^2}+\frac{d^2A}{dz^2}, \qquad v = \frac{d^2B}{dx^2}+\frac{d^2B}{dy^2}+\frac{d^2B}{dz^2}, \qquad w = \frac{d^2C}{dx^2}+\frac{d^2C}{dy^2}+\frac{d^2C}{dz^2};$$

ferner

$$(2.)\quad \frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dy}+\frac{dC}{dz} = 0.$$

Von der Richtigkeit der letzten Gleichung überzeugt man sich, indem man jeden dieser Ausdrücke in folgender Weise transformirt:

$$\frac{dA}{dx} = \frac{1}{4\pi}\iiint \frac{u'(x-x')}{r^3}\,dx'dy'dz' = \frac{1}{4\pi}\iint \left|\frac{u'}{r}\right| dy'dz' - \frac{1}{4\pi}\iiint \frac{1}{r}\cdot\frac{du'}{dx'}\,dx'dy'dz'$$

und bedenkt, dass im ganzen von der Flüssigkeit erfüllten Raume

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz} = 0$$

und an seiner Oberfläche $\lambda u+\mu v+\nu w=0$ ist, wenn λ, μ, ν die Richtungscosinus des betreffenden Oberflächenelementes sind. Der Umstand, dass der

von der Flüssigkeit erfüllte Raum ein mehrfach zusammenhängender ist, stört die Richtigkeit dieser Transformationen nicht, da ja u, v, w überall eindeutig sind. Setzt man ferner:

$$L = \frac{dB}{dz} - \frac{dC}{dy}, \quad M = \frac{dC}{dx} - \frac{dA}{dz}, \quad N = \frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}$$

und transformirt die Differentialquotienten von A, B, C in derselben Weise wie früher, so erhält man mit Rücksicht auf die Gleichungen: $\frac{dv}{dz} = \frac{dw}{dy}$, $\frac{dw}{dx} = \frac{du}{dz}$, $\frac{du}{dy} = \frac{dv}{dx}$ folgendes:

$$L = \frac{1}{4\pi}\int do \frac{\mu w_a - \nu v_a}{r}, \quad M = \frac{1}{4\pi}\int do \frac{\nu u_a - \lambda w_a}{r}, \quad N = \frac{1}{4\pi}\int do \frac{\lambda v_a - \mu u_a}{r},$$

wobei do ein Element der Flüssigkeitsoberfläche, u_a, v_a, w_a die daselbst herrschenden Geschwindigkeitscomponenten und λ, μ, ν die Cosinus der Winkel sind, welche die ins Innere der Flüssigkeit hinein auf do errichtete Normale mit den positiven Coordinatenaxen bildet. Die Integration ist über die gesammte Flüssigkeitsoberfläche, also sowohl die Oberfläche der eingetauchten Körper als auch die Begrenzungsfläche O zu erstrecken. Nun ist aber

$$\frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dz} = \frac{d^2A}{dx^2} + \frac{d^2A}{dy^2} + \frac{d^2A}{dz^2} - \frac{d}{dx}\left(\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz}\right) = u$$

in Folge der Gleichungen (1.) und (2.). Wir erhalten daher:

$$(3.) \quad u = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{do}{r^3}[(y-y')(\lambda v_a - \mu u_a) - (z-z')(\nu u_a - \lambda w_a)].$$

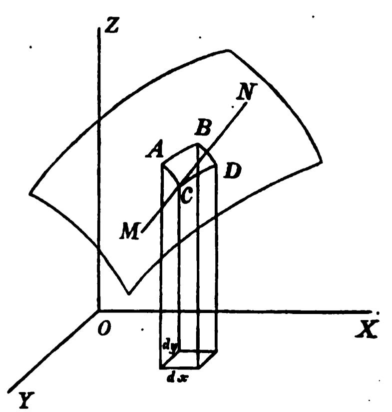
Entsprechende Ausdrücke ergeben sich für v und w. Man sieht die Identität dieser Rechnung mit der von Herrn *Helmholtz* in seiner Theorie der Wirbelbewegung ausgeführten. Ich wiederholte sie hier bloss, um die Anwendbarkeit der Formeln des Herrn *Helmholtz* für den Fall eingetauchter Körper analytisch zu beweisen. Wir können uns von derselben übrigens auch durch folgendes Räsonnement überzeugen. Wir denken uns die Fläche O plötzlich hinweggenommen und unsere Flüssigkeit rings mit ruhender gleichartiger Flüssigkeit umgeben. Gleichzeitig nehmen wir auch sämmtliche in die Flüssigkeit tauchende Körper hinweg und erfüllen ihren Platz mit ruhender Flüssigkeit. Es soll nun während eines Momentes Reibung zwischen der neuhinzugekommenen und der ursprünglich vorhandenen Flüssigkeit stattfinden, die jedoch augenblicklich wieder aufhört. Es werden sich in Folge dessen sämmtliche Begrenzungsflächen der ursprünglich vorhandenen Flüssigkeit mit einer unendlich dünnen Schicht rotirender Flüssigkeitstheilchen überziehen, sie werden das, was Herr *Helmholtz* Wirbel-

flächen genannt hat. Der Druck der Flüssigkeit wird zu beiden Seiten irgend eines Elementes dieser Wirbelflächen im allgemeinen verschieden sein, dieselben würden sich also sogleich zu bewegen und zu deformiren anfangen. Wir können dies jedoch verhindern, wenn wir auf jedes Flächenelement von Aussen eine Kraft wirken lassen, welche den auf dasselbe wirkenden Druckkräften das Gleichgewicht hält. Dann bleiben sämmtliche Wirbelflächen in Ruhe und die Bewegung der Flüssigkeit ist also dieselbe wie im Falle, wo ihr Inneres durch die festen Körper ersetzt war. Jene Druckkräfte, welche auf die Aussenseite der Wirbelflächen wirken, sind dieselben, denen im ersten Falle die Oberflächen der festen Körper ausgesetzt waren. Auf das letztere Problem aber sind die Formeln des Herrn *Helmholtz* unmittelbar anwendbar. Die für u, v, w gefundenen Ausdrücke sind die Componenten der Kraft, welche gewisse die Oberfläche durchfliessende elektrische Ströme auf einen im Punkte x, y, z befindlichen Magnetpol mit der Einheit magnetischen Fluidums ausüben. Setzen wir nämlich:

$$(4.)\qquad g=\mu w_a-\nu v_a,\quad h=\nu u_a-\lambda w_a,\quad k=\lambda v_a-\mu u_a,\quad i=\sqrt{g^2+h^2+k^2},$$

so erfüllen diese Grössen die Bedingung: $g\lambda+h\mu+k\nu=0$; eine durch einen Punkt P der Oberfläche gezogene Gerade G, deren Richtungscosinus den daselbst herrschenden Werthen von g, h, k proportional sind, tangirt also die Oberfläche und steht zugleich senkrecht auf der Geschwindigkeitsrichtung H der Flüssigkeit im Punkte P. Sehen wir die Fläche als Wirbelfläche an, so ist i die Intensität und G die Richtung der durch P gehenden Wirbelfäden. Wir wollen nun die gesammte Oberfläche aller Körper sowie die Fläche O derart mit elektrischen Strömen bedeckt denken, dass die Richtung der Ströme in jedem Punkte P der Fläche parallel G ist, also mit den Coordinatenaxen Winkel macht, deren Cosinus $\frac{g}{i}, \frac{h}{i}, \frac{k}{i}$ sind. Die Intensität derselben aber soll so gewählt werden, dass, wenn wir eine unendlich kleine gerade Linie dq parallel der Richtung H, also senkrecht auf der Richtung der Ströme durch P ziehen, die Gesammtintensität der durch dq gehenden Ströme gleich idq ist. Es erleichtert die Vorstellung, wenn wir uns sämmtliche Oberflächen mit unendlich vielen elektrischen Strömen, die unendlich dicht gelagert sind, und deren jeder eine constante (für alle gleiche) unendlich kleine Intensität ε besitzt, bedeckt denken. Die Anzahl der Ströme, welche dann durch unser Linienelement dq gehen, ist $\frac{idq}{\varepsilon}$. Schon aus dem Umstande, dass Wirbelfäden nirgends abbrechen können, folgt, dass alsdann sämmtliche, die Oberflächen bedeckende elektrische Ströme geschlossen sein werden; dass nirgends

welche beginnen oder plötzlich enden können. Man kann sich hiervon übrigens auch in folgender Weise überzeugen. Wir betrachten ein Element der xy-Ebene $dx.dy$ und legen durch dasselbe ein Prisma, dessen Seiten der z-Axe parallel sind. Dasselbe schneide aus irgend einer der Oberflächen das Element $ABCD$ aus (siehe nebensteh. Figur); die Richtung der Ströme in diesem Elemente sei MN; dann ist die Zahl der Ströme, welche durch AB gehen:



$$Z_1 = \frac{i.AB\sin(MN, AB)}{\varepsilon}.$$

Die Richtungscosinus der Geraden MN sind $\frac{g}{i}$, $\frac{h}{i}$, $\frac{k}{i}$; die der Geraden AB, welche auf der y-Axe und der Normalen zur Oberfläche senkrecht steht, sind: $\frac{\nu}{\sqrt{\lambda^2+\nu^2}}$, 0, $-\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\nu^2}}$, woraus man ohne Schwierigkeit findet:

$$\sin(MN, AB) = \frac{h}{i\sqrt{\lambda^2+\nu^2}}.$$

Ferner ist dx die Projection von AB auf die x-Axe, daher $AB = dx\frac{\sqrt{\lambda^2+\nu^2}}{\nu}$. Wir erhalten somit:

$$Z_1 = \frac{h\,dx}{\nu\varepsilon}.$$

Ebenso erhalten wir für die Zahl der durch AC gehenden Ströme den Werth: $Z_2 = \frac{g\,dy}{\nu\varepsilon}$. Die Zahl der elektrischen Ströme, welche durch CD austreten, ist $Z_1 + \frac{dZ_1}{dy}dy$, ebenso die Zahl der Ströme, welche durch BD austreten, $Z_2 + \frac{dZ_2}{dx}dx$. Der Ueberschuss der aus dem Flächenelemente $ABCD$ austretenden über die in dasselbe eintretenden, also die Zahl der in jenem Flächenelemente anfangenden Ströme, ist somit:

$$\frac{dZ_1}{dy}dy + \frac{dZ_2}{dx}dx = \left[\frac{d\left(\frac{g}{\nu}\right)}{dx} + \frac{d\left(\frac{h}{\nu}\right)}{dy}\right]\frac{dx\,dy}{\varepsilon}.$$

Es ist aber in Folge der Gleichungen (4.) $\frac{g}{\nu} = \frac{\mu}{\nu}w_a - v_a$, $\frac{h}{\nu} = u_a - \frac{\lambda}{\nu}w_a$. Stellen wir die Gleichung der betrachteten Fläche durch $z = f(x, y)$ dar, so ist:

$\frac{\lambda}{\nu} = -\frac{df}{dx}$, $\frac{\mu}{\nu} = -\frac{df}{dy}$, folglich: $\frac{d\left(\frac{g}{\nu}\right)}{dx} + \frac{d\left(\frac{h}{\nu}\right)}{dy} = \frac{du_a}{dy} - \frac{dv_a}{dx} + \frac{df}{dx} \cdot \frac{dw_a}{dy} - \frac{df}{dy} \cdot \frac{dw_a}{dx}$.

Bei Bildung der partiellen Differentialquotienten ist hier z in Folge der Gleichung $z = f(x, y)$ als Function von x und y zu betrachten, daher

$$\frac{du_a}{dy} = \frac{\partial u_a}{\partial y} + \frac{\partial u_a}{\partial z} \cdot \frac{df}{dy};$$

und ähnliche Ausdrücke ergeben sich für die anderen partiellen Differentialquotienten. Die geschlungenen ∂ bedeuten eine Differentiation, wobei x, y und z als unabhängig betrachtet werden. Berücksichtigen wir noch, dass allgemein, folglich auch für die Oberfläche die Gleichungen gelten:

$$\frac{\partial v_a}{\partial z} = \frac{\partial w_a}{\partial y}, \quad \frac{\partial w_a}{\partial x} = \frac{\partial u_a}{\partial z}, \quad \frac{du_a}{\partial y} = \frac{\partial v_a}{\partial x},$$

so erhalten wir:

$$\frac{d\left(\frac{g}{\nu}\right)}{dx} + \frac{d\left(\frac{h}{\nu}\right)}{dy} = 0.$$

Es nehmen also in unserem Oberflächenelemente keine neuen Ströme ihren Ursprung, und da dies von jedem Elemente gilt, so werden nirgends auf den Flächen Ströme plötzlich anfangen oder enden, sondern alle Ströme werden geschlossen sein. Betrachten wir irgend ein Oberflächenelement do, bilden für jedes darin enthaltene Stromelement das Product aus seiner Länge in seine Intensität und addiren alle diese Producte, so ist die so gebildete Summe, die wir mit $\Sigma \varepsilon ds$ bezeichnen wollen, gleich $i do$; ferner ist, wenn wir die Richtungscosinus der durch do fliessenden Ströme, also die Grössen $\frac{g}{i}$, $\frac{h}{i}$, $\frac{k}{i}$ mit a, b, c bezeichnen:

$$\Sigma a \varepsilon ds = g do, \quad \Sigma b \varepsilon ds = h do, \quad \Sigma c \varepsilon ds = k do,$$

und man überzeugt sich leicht, dass die in Gleichung (3.) für u, v, w gefundenen Werthe nichts anders als die durch -4π dividirten Componenten der elektromagnetischen Wirkung aller jener Ströme auf einen im Punkte x, y, z befindlichen Magnetpol mit der Einheit magnetischen Fluidums sind. Das Geschwindigkeitspotential im Punkte x, y, z ist daher das Potential der elektrischen Ströme auf jenen Magnetpol dividirt durch -4π. (Das Zeichen des Potentials ist so gewählt, dass die positiven Ableitungen gleich den Kräften sind).

Die betrachtete Vertheilungsweise elektrischer Ströme auf Oberflächen, welche wir kurz als die Minimumanordnung bezeichnen wollen, besitzt eine erwähnenswerthe Eigenschaft, nämlich dass für dieselbe der Ausdruck

$$P = \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma\int\int\frac{\varepsilon^2\cos\vartheta\, ds\, ds'}{r},$$

also das Potential sämmtlicher Ströme aufeinander ein Minimum wird. Hierbei sind ds und ds' zwei Elemente der Ströme, r ihre Entfernung, ϑ ihr Winkel, die beiden Integrationen sind über sämmtliche Elemente irgend eines Stromes, die Summationen über alle auf den Oberflächen befindlichen Ströme auszudehnen. Bezeichnen wir die Projectionen des Elementes ds auf die Coordinatenaxen mit dx, dy, dz seine Richtungscosinus mit a, b, c; dieselben Grössen für ds' mit dx', dy', dz', a', b', c', so wird:

$$P = \frac{\varepsilon^2}{2}\Sigma\Sigma\int\int\frac{dx\,dx' + dy\,dy' + dz\,dz'}{r}.$$

Wir lassen nun die Lage sämmtlicher Ströme auf den Oberflächen unendlich wenig variiren; die Länge der einzelnen Ströme kann sich dabei ändern, jedoch müssen dieselben dann durch Einschaltung neuer Stromelemente geschlossen erhalten werden. Die Gesammtintensität aller Ströme, welche den Querschnitt irgend eines Rings durchfliessen, ist dabei invariabel; sie ist nämlich durch den Zuwachs k bestimmt, den das Geschwindigkeitspotential bei Umkreisung des Ringes erhält. Ist diese Gesammtintensität nämlich gleich $\mathfrak{J}$, so wächst ihr Potential auf einen Magnetpol mit der Einheit magnetischen Fluidums bei Umkreisung des Ringes um $-4\pi\mathfrak{J}$, und da das Geschwindigkeitspotential gleich dem durch -4π dividirten Potentiale der Ströme ist, so muss $\mathfrak{J}$ gleich k sein. Die Umkreisung ist positiv gerechnet, wenn sie bezüglich einer im Strome schwimmenden Figur von links über vorne nach rechts geschieht. Weil die Variation von P in Folge der Lagenänderung sämmtlicher ds gleich sein muss der Variation in Folge der Lagenänderung sämmtlicher ds', so erhält man:

$$\delta P =$$

$$\varepsilon^2\Sigma\Sigma\int\int\left\{\frac{dx'd\delta x+dy'd\delta y+dz'd\delta z}{r} - \frac{(dx\,dx'+dy\,dy'+dz\,dz')\left[(x-x')\delta x+(y-y')\delta y+(z-z')\delta z\right]}{r^3}\right\}.$$

Um die Differentiale der Variationen wegzuschaffen, integriren wir den ersten Theil partiell; es ergiebt sich, wenn man berücksichtigt, dass sämmtliche Ströme geschlossen bleiben, daher die Variationen an der oberen und unteren Grenze gleich sind:

$$\begin{aligned}\delta P = \varepsilon^2\Sigma\Sigma\int\int\frac{ds\,ds'}{r^3}\{&\delta x\left[(y-y')a'b+(z-z')a'c-(x-x')(bb'+cc')\right]\\ &+\delta y\left[(z-z')cb'+(x-x')ab'-(y-y')(aa'+cc')\right]\\ &+\delta z\left[(x-x')ac'+(y-y')bc'-(z-z')(aa'+bb')\right]\}\\ = \Sigma\int\varepsilon\, ds\{&\delta x(cH-bK)+\delta y(aK-cG)+\delta z(bH-aG)\},\end{aligned}$$

wenn

$$G = \Sigma\int \varepsilon\, ds' \frac{(y-y')c'-(z-z')b'}{r^3} = \int do \frac{(y-y')k'-(z-z')h'}{r^3},$$
$$H = \Sigma\int \varepsilon\, ds' \frac{(z-z')a'-(x-x')c'}{r^3} = \int do \frac{(z-z')g'-(x-x')k'}{r^3},$$
$$K = \Sigma\int \varepsilon\, ds' \frac{(x-x')b'-(y-y')a'}{r^3} = \int do \frac{(x-x')h'-(y-y')g'}{r^3}$$

gesetzt wird. G, H, K sind also nichts anderes als die Componenten der Wirkung sämmtlicher Ströme auf einen Magnetpol mit der Einheit magnetischen Fluidums. Dieselben werden auf den Oberflächen unbestimmt. Wir sahen nämlich, dass sie auf ihrer Aussenseite gleich $-4\pi u_a$, $-4\pi v_a$, $-4\pi w_a$ sind; auf der Innenseite dagegen sind sie gleich Null, weil im ganzen Innern der Körper das Potential der Ströme auf einen Magnetpol eindeutig und an ihrer Oberfläche seine Ableitung normal zur Oberfläche gleich Null ist. Um diese Zweideutigkeit zu vermeiden, denken wir uns die Ströme in einer gleichförmigen Schicht von unendlich kleiner Dicke auf den Oberflächen verbreitet. Der Werth der Grössen G, H, K ist dann an der Innenseite der Schicht gleich Null und nimmt gegen die Aussenseite hin gleichförmig bis $-4\pi u_a$, $-4\pi v_a$, $-4\pi w_a$ zu. Die Verschiebungen δx, δy, δz sollen für sämmtliche in einer Schicht über einander liegende Stromelemente gleich angenommen werden. Wir müssen dann, wie sich leicht ausführlicher beweisen lässt, für G, H, K ihre Mittelwerthe $-2\pi u_a$, $-2\pi v_a$, $-2\pi w_a$ setzen. Die Variationen δx, δy, δz sind dabei der Bedingung $\lambda\delta x + \mu\delta y + \nu\delta z = 0$ unterworfen, da die Ströme die Oberflächen nicht verlassen sollen. Die Bedingung, dass δP verschwinde, reducirt sich daher auf:

$$\frac{cH-bK}{\lambda} = \frac{aK-cG}{\mu} = \frac{bG-aH}{\nu}.$$

Diese Bedingung ist in der That bei der von uns als Minimumanordnung bezeichneten Vertheilungsweise der Ströme erfüllt, wie man sieht, wenn man für G, H, K die Werthe $-2\pi u_a$, $-2\pi v_a$, $-2\pi w_a$ substituirt und bedenkt, dass $a = \frac{g}{i}$, $b = \frac{h}{i}$, $c = \frac{k}{i}$ ist. Wenn Ströme von constanter Intensität, aber veränderlicher Länge auf der Oberfläche (oder auch im Innern) ringförmiger Körper, längs der Mittellinie laufend, diese zu umkreisen gezwungen sind, so werden sie dann unter dem Einflusse ihrer elektrodynamischen Wechselwirkung im (allerdings labilen) Gleichgewichte sein, wenn ihr Potential aufeinander ein Minimum ist; also wenn sie sich in der Minimumanordnung befinden; die-

selbe hat also Analogie mit der Vertheilung statischer Elektricität auf der Oberfläche eines Leiters. In speciellen Fällen aber könnte die Theilung eines Stromes von der Intensität Null in zwei entgegengesetzte diese Veranschaulichung stören, während das Analogon bei der statischen Elektricität immer möglich ist. Es ist unmittelbar klar, dass, wenn eine solche Gleichgewichtsposition von Strömen möglich ist, ihr Potential die an das Geschwindigkeitspotential gestellten Forderungen erfüllt. Man könnte hierauf auch den Beweis unserer Sätze gründen. Die Wirkung der Ströme auf einen Magnetpol im Innern der Körper oder ausserhalb der Fläche O ist dabei Null.

Wir wollen nun die ganze in der Flüssigkeit enthaltene lebendige Kraft berechnen. Dieselbe ist, wenn ϱ die Dichte der Flüssigkeit vorstellt:

$$T=\varrho\iiint dx\,dy\,dz\,\tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right];$$

φ ist das Geschwindigkeitspotential, also das durch -4π dividirte Potential aller elektrischen Ströme auf einen Magnetpol mit der Einheit magnetischen Fluidums. Bezeichnen wir nun das durch -4π dividirte Potential eines einzigen der Ströme auf einen derartigen Magnetpol mit $\delta\varphi$ und eine Summation über alle Ströme auf allen Flächen mit Σ, so ist:

$$\frac{d\varphi}{dx}=\Sigma\frac{d\delta\varphi}{dx};\quad\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2=\Sigma\frac{d\delta\varphi}{dx}\cdot\Sigma\frac{d\delta'\varphi}{dx}=\Sigma\Sigma\frac{d\delta\varphi}{dx}\cdot\frac{d\delta'\varphi}{dx}.$$

In der letzten Formel ist sowohl $\delta\varphi$, als auch $\delta'\varphi$ das durch -4π dividirte Potential eines einzelnen Stromes ($\delta\varphi$ etwa des Stromes S, $\delta'\varphi$ des Stromes S'), und beide Summationen sind über alle Ströme zu erstrecken. Es ist folglich:

$$T=\frac{\varrho}{2}\,\Sigma\Sigma\iiint dx\,dy\,dz\left[\frac{d\delta\varphi}{dx}\cdot\frac{d\delta'\varphi}{dx}+\frac{d\delta\varphi}{dy}\cdot\frac{d\delta'\varphi}{dy}+\frac{d\delta\varphi}{dz}\cdot\frac{d\delta'\varphi}{dz}\right].$$

Nun ist aber nach dem *Green*schen Satze:

$$(6.)\quad\left\{\begin{aligned}&\iiint dx\,dy\,dz\left(\frac{d\delta\varphi}{dx}\cdot\frac{d\delta'\varphi}{dx}+\frac{d\delta\varphi}{dy}\cdot\frac{d\delta'\varphi}{dy}+\frac{d\delta\varphi}{dz}\cdot\frac{d\delta'\varphi}{dz}\right)\\&\qquad=-\int do\,\delta\varphi\frac{d\delta'\varphi}{dn}-\int d\omega\,\delta\varphi\frac{d\delta'\varphi}{dn},\end{aligned}\right.$$

wobei do ein Oberflächenelement der festen Körper, $d\omega$ aber ein Oberflächenelement der Querschnitte ist, durch die man den von der Flüssigkeit erfüllten Raum zu einem einfach zusammenhängenden machen kann. $\frac{d}{dn}$ bedeutet eine Differentiation in der Richtung der nach der Seite der Flüssigkeit hin gezogenen Normale. $\delta\varphi$ wird zu beiden Seiten jedes Querschnitts mit Ausnahme eines einzigen denselben Werth haben. Es ist dies der Querschnitt, dessen

Begrenzungslinie auf der Oberfläche desselben Ringes wie der Strom S liegt. Wir können als Begrenzungslinie jenes Querschnitts diesen Strom selbst wählen. Die Werthe von $\delta\varphi$ zu beiden Seiten dieses Querschnitts unterscheiden sich um ε, da dies die gemeinsame Intensität aller Ströme ist. Es ist somit

$$\int d\omega\,\delta\varphi\,\frac{d\,\delta'\varphi}{dn} = \varepsilon\int d\omega\,\frac{d\,\delta'\varphi}{dn},$$

also gleich dem durch -4π dividirten Potentiale der Ströme S und S' aufeinander. Es ist dabei vorausgesetzt, dass das Potential zweier Ströme von den Intensitäten J und J' aufeinander $JJ'\int\int\frac{ds\,ds'\cos\vartheta}{r}$ ist; dass also die Intensitäten in sogenanntem elektromagnetischen Masse gemessen sind. Wir erhalten, indem wir die Gleichung (6.) bezüglich δ und δ' summiren und mit $\frac{\varrho}{2}$ multipliciren:

$$T = -\frac{\varrho}{2}\,\Sigma\Sigma\int do\,\delta\varphi\,\frac{d\,\delta'\varphi}{dn} - \frac{\varrho}{2}\,\Sigma\Sigma\int d\omega\,\delta\varphi\,\frac{d\,\delta'\varphi}{dn};$$

hier ist der zweite Theil rechts das mit $\frac{\varrho}{4\pi}$ multiplicirte Potential aller Ströme aufeinander, indem, wie man leicht sieht, die Summe der Potentiale jedes einzelnen auf sich selbst zu demselben nur verschwindend wenig beträgt. Der erste Theil des Ausdrucks rechts aber ist gleich:

$$-\frac{\varrho}{2}\int do\,\Sigma\delta\varphi\,\Sigma\frac{d\,\delta'\varphi}{dn} = -\frac{\varrho}{2}\int do\,\varphi\,\frac{d\varphi}{dn} = 0,$$

weil $\frac{d\varphi}{dn}$ für alle Oberflächenelemente verschwindet. Es ist die gesammte in der Flüssigkeit enthaltene lebendige Kraft gleich dem mit $\frac{\varrho}{4\pi}$ multiplicirten Potentiale aller jener Ströme S aufeinander. Die Gesammtintensität der irgend einen Ring durchfliessenden Ströme muss dabei gleich dem Zuwachs k sein, den das Geschwindigkeitspotential bei Umkreisung des Rings erleidet, ihre Richtung ist positiv zu zählen, wenn die Umkreisung bezüglich einer schwimmenden Figur von links über vorne nach rechts geschieht; die Vertheilung der Ströme ist dadurch bestimmt, dass, wenn die Oberflächen fix sind, δP verschwindet. Verschieben wir sämmtliche Körper unendlich wenig und denken uns die Ströme in die ihrer neuen Position entsprechende Minimumanordnung gebracht, so besteht der Zuwachs von P aus zwei Theilen, jenem, welcher von der Verschiebung der Ströme mit den Körpern bei unveränderter Anordnung auf ihrer Oberfläche herrührt, und jenem, der von der Veränderung der Anordnung der Ströme herstammt, welche nothwendig ist, damit diese in

die der neuen Position der Ringe entsprechende Minimumanordnung kommen. Letzterer ist aber gleich Null; denn wir wissen, dass für eine Variation der Vertheilung der Ströme ohne Aenderung der Lage der Fläche δP gleich Null ist. Die Variation, die das Gesammtpotential der Ströme erleidet, ist daher gleich derjenigen, die es erleiden würde, wenn sich die Vertheilung der Ströme auf der Oberfläche der Körper nicht ändern würde.

Wir wollen jetzt zu dem Falle übergehen, dass die Körper in der Flüssigkeit nicht ruhen, und zwar wollen wir, da die Rechnung hierdurch nicht schwieriger wird, annehmen, dass sie zugleich ihre Gestalt, nicht aber ihr Volumen verändern. Die Oberfläche O dagegen soll ruhen, obwohl auch ihre Bewegung den Gang der Rechnung nicht wesentlich modificiren würde. Die Componenten der Geschwindigkeit irgend eines Oberflächenelementes do der Körper sollen α, β, γ heissen. Wir wollen uns für einen Augenblick bloss die Oberflächen der Körper aus einer von der Flüssigkeit verschiedenen Substanz gebildet, ihr Inneres aber wieder mit ursprünglich ruhender Flüssigkeit ausgefüllt denken, welche natürlich, sobald sich die Oberflächen der Körper bewegen, ebenfalls in Bewegung geräth und zwar unter Existenz eines eindeutigen Geschwindigkeitspotentials. Wir setzen wieder:

$$A = -\frac{1}{4\pi}\iiint\frac{u'}{r}dx'dy'dz', \quad B = -\frac{1}{4\pi}\iiint\frac{v'}{r}dx'dy'dz',$$
$$C = -\frac{1}{4\pi}\iiint\frac{w'}{r}dx'dy'dz',$$

wobei die Integration über die ganze in der Fläche O befindliche Flüssigkeit ausserhalb und innerhalb der Körper zu erstrecken ist. Es ist dann in der ganzen Flüssigkeit wieder:

$$u = \frac{d^2A}{dx^2}+\frac{d^2A}{dy^2}+\frac{d^2A}{dz^2}, \quad v = \frac{d^2B}{dx^2}+\frac{d^2B}{dy^2}+\frac{d^2B}{dz^2}, \quad w = \frac{d^2C}{dx^2}+\frac{d^2C}{dy^2}+\frac{d^2C}{dz^2},$$
$$\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dy}+\frac{dC}{dz} = 0.$$

Um die letzte dieser Gleichungen zu beweisen, transformiren wir die Ableitungen von A, B, C wie früher, sowohl für die Flüssigkeit innerhalb als auch ausserhalb der Körper. Es ist nun zwar nicht mehr an der Oberfläche derselben $\lambda u+\mu v+\nu w$ gleich Null; aber diese Grösse besitzt zu beiden Seiten der Oberfläche denselben Werth, wesshalb sich die auf die Grenzen bezüglichen Glieder im Ausdrucke für $\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dy}+\frac{dC}{dz}$ doch wieder aufheben. Transformiren wir unter Berücksichtigung desselben Umstandes die 3 Grössen

$$L = \frac{dB}{dz} - \frac{dC}{dy}, \quad M = \frac{dC}{dx} - \frac{dA}{dz}, \quad N = \frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx},$$

so erhalten wir:

$$L = \frac{1}{4\pi}\int do \frac{\mu(w_a - w_i) - \nu(v_a - v_i)}{r}, \quad M = \frac{1}{4\pi}\int do \frac{\nu(u_a - u_i) - \lambda(w_a - w_i)}{r},$$

$$N = \frac{1}{4\pi}\int do \frac{\lambda(v_a - v_i) - \mu(u_a - u_i)}{r},$$

wobei u_a, v_a, w_a die Geschwindigkeitscomponenten der Flüssigkeit an der Aussenseite, u_i, v_i, w_i an der Innenseite von do sind. Da wir die Fläche O als ruhend voraussetzten, so ist für dieselben $u_i = v_i = w_i = 0$, u_a, v_a, w_a aber sind einfach die an ihren Elementen stattfindenden Geschwindigkeitscomponenten. Es ergiebt sich hieraus, wie früher:

$$u = \frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dz} = -\frac{1}{4\pi}\int do \left[\frac{\lambda(v_a - v_i) - \mu(u_a - u_i)}{r^3}(y - y') - \frac{\nu(u_a - u_i) - \lambda(w_a - w_i)}{r^3}(z - z')\right].$$

Entsprechende Ausdrücke erhält man für v und w. Es sind u, v, w wieder die Kraftcomponenten geschlossener längs der Oberflächen hinfliessender elektrischer Ströme auf einen Magnetpol mit der Einheit magnetischen Fluidums. Stromintensität und Richtung ist wie früher bestimmt; nur treten an die Stelle von u_a, v_a, w_a jetzt die Differenzen $u_a - u_i$, $v_a - v_i$, $w_a - w_i$. Legen wir irgendwo eine unendlich kleine Gerade dq senkrecht gegen die Richtung der Ströme, so ist die Intensität der durch dq gehenden Ströme idq. Die Cosinus der Winkel aber, welche die Richtung der Ströme mit den Coordinatenaxen bildet, sind $\frac{g}{i}$, $\frac{h}{i}$, $\frac{k}{i}$ wobei jetzt:

$$g = \mu(w_a - w_i) - \nu(v_a - v_i), \quad h = \nu(u_a - u_i) - \lambda(w_a - w_i), \quad k = \lambda(v_a - v_i) - \mu(u_a - u_i),$$
$$i = \sqrt{g^2 + h^2 + k^2}$$

ist. Denken wir uns die Oberflächen mit unendlich vielen Strömen von constanter unendlich kleiner Intensität ε überzogen, so ist $\frac{idq}{\varepsilon}$ die Zahl der durch dq gehenden Ströme. Das durch -4π dividirte Potential dieser Ströme auf einen Magnetpol mit der Einheit magnetischen Fluidums ist dann sowohl ausserhalb, als auch innerhalb der Körper Geschwindigkeitspotential. Ausserhalb O ist dasselbe constant. Dem Potential aller Ströme aufeinander, also dem Ausdrucke $P = \frac{\varepsilon^2}{2}\Sigma\Sigma\int\int\frac{ds\,ds'\cos\vartheta}{r}$ kommt wieder eine Minimumeigenschaft zu. Transformiren wir nämlich seine Variation wie früher, so ergiebt sich:

$$\delta P = \varepsilon\Sigma\int ds[\delta x(cH - bK) + \delta y(aK - cG) + \delta z(bG - aH)],$$

wobei:

$$G=\int do\,\frac{k'(y-y')-h'(z-z')}{r},\quad H=\int do\,\frac{g'(z-z')-k'(x-x')}{r},$$
$$K=\int do\,\frac{h'(x-x')-g'(y-y')}{r}$$

ist. Die Grössen G, H, K nehmen wieder, wenn sämmtliche Flächen mit einer unendlich dünnen Stromschicht überzogen gedacht werden, von der Innenseite derselben bis zur Aussenseite gleichmässig zu. Ihre Mittelwerthe, welche hier zu nehmen sind, sind: $-2\pi(u_a+u_i)$, $-2\pi(v_a+v_i)$, $-2\pi(w_a+w_i)$. Wir wählen nun die 3 Functionen α, β, γ von x, y, z so, dass sie an der Oberfläche irgend eines der Körper gleich den Geschwindigkeitscomponenten des entsprechenden Oberflächenelementes des Körpers sind, und im Innern die Gleichung: $\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}=0$ erfüllen, und bestimmen 3 andere Functionen l, m, n von x, y, z durch die Gleichungen:

$$\frac{dn}{dy}-\frac{dm}{dz}=\alpha,\qquad \frac{dl}{dz}-\frac{dn}{dx}=\beta,\qquad \frac{dm}{dx}-\frac{dl}{dy}=\gamma.$$

Bezeichnen wir nun den Ausdruck:

$$(5.)\qquad \Sigma\int\varepsilon\,ds\,(al+bm+cn)=\Sigma\int\varepsilon\,(l\,dx+m\,dy+n\,dz)$$

mit Q, wobei die Integration über alle Längenelemente eines Stromes, die Summation über alle Ströme auf allen Flächen zu erstrecken ist (für jeden Körper sind l, m, n im Allgemeinen andere), so ist nach Wegschaffung der Differentiale der Variationen:

$$(6.)\quad \begin{cases} \delta Q=\Sigma\int\varepsilon\,ds\Big[\delta x\Big(b\frac{dm}{dx}+c\frac{dn}{dx}-b\frac{dl}{dy}-c\frac{dl}{dz}\Big) \\ \qquad +\delta y\Big(c\frac{dn}{dy}+a\frac{dl}{dy}-c\frac{dm}{dz}-a\frac{dm}{dx}\Big) \\ \qquad +\delta z\Big(a\frac{dl}{dz}+b\frac{dm}{dz}-a\frac{dn}{dx}-b\frac{dn}{dy}\Big)\Big] \\ \quad =\Sigma\int\varepsilon\,ds[\delta x(b\gamma-c\beta)+\delta y(c\alpha-a\gamma)+\delta z(a\beta-b\alpha)]. \end{cases}$$

Man erhält somit:

$$\delta(P-4\pi Q)=2\pi\varepsilon\Sigma\int ds\{\delta x[b(w_a+w_i-2\gamma)-c(v_a+v_i-2\beta)$$
$$+\delta y[c(u_a+u_i-2\alpha)-a(w_a+w_i-2\gamma)]+\delta z[a(v_a+v_i-2\beta)-b(u_a+u_i-2\alpha)]\}.$$

Da nun die Geschwindigkeitscomponente der Flüssigkeit sowohl innerhalb als auch ausserhalb der Körper in der Richtung der Normalen zu ihrer Oberfläche

gleich der Geschwindigkeitscomponente des entsprechenden Oberflächenelementes in derselben Richtung sein muss, so hat man:

$$\lambda(u_a+u_i-2\alpha)+\mu(v_a+v_i-2\beta)+\nu(w_a+w_i-2\gamma) = 0.$$

Aus dieser und der Gleichung $a\lambda+b\mu+c\nu=0$ aber folgt:

$$\frac{b(w_a+w_i-2\gamma)-c(v_a+v_i-2\beta)}{\lambda}=\frac{c(u_a+u_i-2\alpha)-a(w_a+w_i-2\gamma)}{\mu}=\frac{a(v_a+v_i-2\beta)-b(u_a+u_i-2\alpha)}{\nu}.$$

Es verschwindet also $\delta(P-4\pi Q)$ für alle δx, δy, δz, welche der Bedingung $\lambda\delta x+\mu\delta y+\nu\delta z=0$ genügen, also bei jeder Variation der Lage der Ströme, wenn sie die Oberflächen nicht verlassen und bei ungeänderter Intensität geschlossen bleiben. In dem speciellen Falle, dass die Körper ihre Gestalt nicht ändern, wird, wenn ξ, η, ζ die Componenten der progressiven Geschwindigkeit, p, q, r die der momentanen Winkelgeschwindigkeit sind,

$$Q=\varepsilon\Sigma\int\left(\eta z dx+\zeta x dy+\xi y dz-p\frac{y^2+z^2}{2}dx-q\frac{z^2+x^2}{2}dy-r\frac{x^2+y^2}{2}dz\right).$$

Wir wollen die Ausdrücke, mit denen in der Formel (6.) δx, δy und δz unter dem Integralzeichen multiplicirt sind, also die drei Grössen $(b\gamma-c\beta)\varepsilon ds$, $(c\alpha-a\gamma)\varepsilon ds$, $(a\beta-b\alpha)\varepsilon ds$ als die Componenten jener auf das Stromelement ds wirksamen Kraft bezeichnen, deren Kräftepotential Q ist. Es ist dies die Kraft, welche solche magnetische Massen auf das Stromelement ausüben würden, die auf einen Magnetpol eine Kraft mit den Componenten α, β, γ ausüben würden. Dieselbe steht senkrecht auf dem Stromelemente ds und seiner Bewegungsrichtung, ihre Intensität ist εds multiplicirt mit der Componente der Geschwindigkeit von ds, welche senkrecht auf ds steht. Da sie immer normal gegen die Bewegungsrichtung ist, so leistet sie keine Arbeit. Die betrachtete Vertheilung elektrischer Ströme auf den Körpern ist also diejenige, in welcher sie unter dem Einflusse ihrer elektrodynamischen Wechselwirkung und der mit -4π multiplicirten Kraft, die auf jedes Stromelement in Folge des Kräftepotentials Q wirkt, im Gleichgewichte sind.

In dem speciellen Falle, dass sich sämmtliche Punkte der Fläche O in einer mindestens von der Ordnung R unendlichen Entfernung befinden, und der von ihr umschlossene Raum einfach zusammenhängt, ist das Potential der auf der Oberfläche der Körper befindlichen Ströme auf jeden Punkt von O mindestens unendlich klein wie $\frac{1}{R^2}$, also seine Ableitungen wie $\frac{1}{R^3}$; von dieser Ordnung ist daher auch die Geschwindigkeit an der Oberfläche O, daher auch die auf die Flächeneinheit bezogene Intensität der sie durchfliessenden

elektrischen Ströme. Die auf der Flächeneinheit befindlichen elektrischen Ströme werden daher ein Potential liefern, das im Endlichen mindestens unendlich klein von der Ordnung $\frac{1}{R^4}$ ist. Das Potential aller auf O befindlichen Ströme ist also im Endlichen mindestens unendlich klein wie $\frac{1}{R^4}$, verschwindet also sammt seinen Ableitungen mit wachsendem R. Die Körper sind dabei alle als im Endlichen befindlich vorausgesetzt. Setzen wir noch voraus, dieselben seien lauter Ringe, deren zur Mittellinie senkrechter Querschnitt verschwindet, so muss, wenn die Constante k endlich sein soll, die Geschwindigkeit an der Oberfläche der Ringe unendlich sein und nahe senkrecht auf der Mittellinie stehen; die auf der Ringoberfläche fingirten elektrischen Ströme werden daher längs der Mittellinie hinfliessen müssen, und man kann sich selbe, da die Ringe unendlich dünn sind, mit Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen als die Mittellinie durchfliessend denken. Es ist zunächst wichtig, zu bemerken, dass in diesem Falle das Geschwindigkeitspotential selbst unendlich nahe an der Ringoberfläche doch endlich ist. In der That kann das Potential eines elektrischen Stromes auf einen Magnetpol mit der Einheit magnetischen Fluidums abgesehen von einer Constanten höchstens gleich der 4π fachen Intensität des Stromes werden, und da die Gesammtintensität der die Ringe durchfliessenden Ströme endlich ist, so ist es auch ihr Potential. Seine Ableitungen dagegen werden auf der Ringoberfläche unendlich. Eine passende Form für das Geschwindigkeitspotential φ in diesem Falle finden wir in folgender Weise. Ist φ_1 das Geschwindigkeitspotential, welches herrschen würde, wenn die Ringe in ihrer augenblicklichen Position in Ruhe wären, φ_2 dasjenige, welches herrschen würde, wenn sich dieselben Ringe in derselben Weise unter Existenz eines eindeutigen Geschwindigkeitspotentials bewegten, so erfüllt $\varphi_1+\varphi_2$ alle an φ gestellten Bedingungen. Es ist also $\varphi=\varphi_1+\varphi_2$. Da φ_2 eindeutig ist, $\frac{d\varphi_1}{dn}$ aber auf der Ringoberfläche verschwindet, so wird die lebendige Kraft T der Flüssigkeit, welche die Ringe umgiebt:

$$T = -\frac{\varrho}{2}\int d\omega\,\varphi_1\frac{d\varphi_1}{dn}-\frac{\varrho}{2}\int d\omega\,\varphi_1\frac{d\varphi_2}{dn}-\frac{\varrho}{2}\int do\,\varphi\frac{d\varphi_2}{dn}.$$

do ist wieder ein Element der Ringoberfläche, $d\omega$ eines Querschnitts. Wenn die Geschwindigkeit der Ringe endlich ist, so ist es auch die auf die Flächeneinheit bezogene Intensität der Ströme, von denen das Potential φ_2 herstammt, und da die von jenen Strömen durchflossene Fläche unendlich klein ist, so ist φ_2 selbst unendlich klein; seine Ableitungen sind nur in einem unendlich

kleinen Theil des Raumes endlich, sonst unendlich klein; φ ist überall endlich. Es verschwinden daher die beiden letzten Glieder im Ausdrucke für T. Das erste Glied $-\frac{\varrho}{2}\int d\omega\,\varphi_1\frac{d\varphi_1}{dn}$ aber ist, wie wir sahen, das mit $\frac{\varrho}{4\pi}$ multiplicirte Potential aller Ströme aufeinander, mit denen wir uns die ruhenden Ringe überzogen denken müssten, also der in der Minimumanordnung auf denselben vertheilten Ströme. Es ist also auch die Variation der lebendigen Kraft gleich der Variation dieses Potentiales. Nun fanden wir aber erstens, dass für die Minimumvertheilung die Variation dieses Potentiales gerade so gross ist, wie sie wäre, wenn die Ströme ihre Position auf den Ringen und der Fläche O nicht änderten, zweitens dass das Potential der auf O befindlichen Ströme auf die auf den Ringoberflächen befindlichen verschwindet, drittens, dass wir uns sämmtliche Ströme als die Mittellinie durchfliessend denken können, wobei dann ihre Intensität gleich dem Werthe des k für den betreffenden Ring ist. Der Zuwachs der lebendigen Kraft der Flüssigkeit ist somit bis auf unendlich kleines gleich dem mit $\frac{\varrho}{4\pi}$ multiplicirten Zuwachse des Potentials von Strömen aufeinander, welche die Mittellinien mit der Intensität k durchfliessen. Es ist somit der Beweis des *Kirchhoff*schen Satzes auch für Ringe von nicht kreisförmigem Querschnitte geliefert. Es mag noch bemerkt werden, dass Ströme, die die Ringe nicht längs der Mittellinie, sondern so durchfliessen, dass sie die Mittellinie solenoidartig umschlingen, ein Geschwindigkeitspotential liefern würden, das im Innern der Ringe mehrdeutig ist. Aus der Gleichheit der lebendigen Kraft mit der bei Bewegung jener Ströme geleisteten Arbeit folgt unmittelbar die Gleichheit der in die Bewegungsrichtung fallenden Kraftcomponente. Um auch die Kraft senkrecht auf die Bewegungsrichtung zu finden, muss jedoch ein anderer Weg eingeschlagen werden. Wollte man von der lebendigen Kraft ausgehen, so könnte hierzu das sogenannte *Hamilton*sche Princip dienen. Bilden wir nämlich die Variation der Grösse

$$\Omega = \varrho\int_0^\tau dt\iiint dx\,dy\,dz\,\frac{u^2+v^2+w^2}{2}$$

so, dass der gesammte Bewegungszustand der Körper zu jeder beliebigen Zeit t unendlich wenig geändert wird, die Lage der Körper zu Anfang und Ende aber, sowie das Zeitintervall τ, constant bleibt. Das 3fache Integral in Ω ist für jede Zeit über den ganzen von der Flüssigkeit erfüllten Raum, also den Raum ausserhalb der Körper zu erstrecken. Es ist also Ω die sogenannte Wirkung der Flüssigkeit während der Zeit τ. Wir bezeichnen mit

$\delta x, \delta y, \delta z, \delta u = \frac{d\delta x}{dt}, \delta v = \frac{d\delta y}{dt}, \delta w = \frac{d\delta z}{dt}$ die Variationen, welche die Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten des Flüssigkeitstheilchens, das zur Zeit t die Coordinaten x, y, z hatte, zur selben Zeit durch die Aenderung des Bewegungszustandes der Körper erlitten haben. $\delta u, \delta v, \delta w$ sind also nicht Variationen der an einem constanten Raumpunkte herrschenden Geschwindigkeitscomponenten. Dann ist:

$$\delta\Omega = \varrho\int_0^\tau dt\iiint dx\,dy\,dz\,(u\,\delta u + v\,\delta v + w\,\delta w)$$
$$= \varrho\int_0^\tau dt\iiint dx\,dy\,dz\left(u\frac{d\delta x}{dt} + v\frac{d\delta y}{dt} + w\frac{d\delta z}{dt}\right).$$

Integriren wir hier bezüglich t per partes und beachten, dass u, v und w sowohl explicit t enthalten, als auch in sofern x, y, z Functionen von t sind, so ergiebt sich:

$$\delta\Omega = \varrho\iiint dx\,dy\,dz\,|u\,\delta x + v\,\delta y + w\,\delta z|_0^\tau$$
$$-\varrho\int_0^\tau dt\iiint dx\,dy\,dz\left[\delta x\left(\frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz}\right)\right.$$
$$\left.+\delta y\left(\frac{dv}{dt} + u\frac{dv}{dx} + v\frac{dv}{dy} + w\frac{dv}{dz}\right) + \delta z\left(\frac{dw}{dt} + u\frac{dw}{dx} + v\frac{dw}{dy} + w\frac{dw}{dz}\right)\right].$$

Wenn keine Kräfte von Aussen auf die Flüssigkeit wirken, so sind die mit $\delta x, \delta y, \delta z$ multiplicirten Glieder im Integrale rechts gleich $-\frac{dp}{dx}, -\frac{dp}{dy}, -\frac{dp}{dz}$; berücksichtigen wir, dass die Verschiebungen $\delta x, \delta y, \delta z$ die Continuität der Flüssigkeit nicht stören dürfen, daher $\frac{d\delta x}{dx} + \frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz} = 0$ sein muss, und integriren das mit δx multiplicirte Glied bezüglich x, das mit δy multiplicirte bezüglich y und das mit δz multiplicirte bezüglich z partiell, so wird

$$\delta\Omega = \varrho\iiint dx\,dy\,dz\,|u\,\delta x + v\,\delta y + w\,\delta z|_0^\tau - \int_0^\tau dt\int do\,p\,\delta q\cos\eta,$$

wobei δq die gesammte Verschiebung der dem Oberflächenelement do anliegenden Flüssigkeitstheilchen, η der Winkel zwischen ihrer Richtung und der auf do nach der Seite der Flüssigkeit errichteten Normalen ist. Das letzte Glied im Ausdrucke für $\delta\Omega$ erhält das entgegengesetzte Zeichen, wenn p nicht den auf die Flüssigkeit, sondern den auf das Oberflächenelement do des Körpers lastenden Druck vorstellt. Es ist also, wenn $X\,do$, $Y\,do$, $Z\,do$ die Componenten dieses Drucks sind, auch gleich $\int_0^\tau dt\int do\,(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$. Sehen wir von

dem ersten Gliede in dem Ausdrucke für $\delta\Omega$ ab, so giebt uns das mit δx multiplicirte Glied die auf do in der Richtung der x-Axe wirkende Kraft; ebenso das mit δy und δz multiplicirte Glied die in der Richtung der y- und z-Axe wirkende Kraft, woran man sogleich das *Hamilton*sche Princip in der Form erkennt, wie es zuerst von *Thomson* und *Tait* auf Probleme der Hydrodynamik angewendet wurde. Das erste Glied dagegen zeigt, dass diese Anwendung im allgemeinen eine unrichtige ist. Es rührt dies daher, dass die Ableitung des *Hamilton*schen Princips voraussetzt, dass die Anfangs- und Endposition sämmtlicher materieller Punkte keine Variation erleide; in unserem Falle aber gilt dies bloss von den Punkten der festen Körper, wogegen die Endpositionen der Flüssigkeitstheilchen im Allgemeinen variiren werden; daher jenes erste Glied. Wir können in demselben wieder den mit δx multiplicirten Theil bezüglich x u. s. w. partiell integriren. Es geht dann über in $-\varrho\int do\,|\varphi\,\delta q\cos\eta|_0^\tau$, wobei jedoch die Integration nicht nur über die Oberfläche der Körper, sondern auch über alle Querschnitte zu erstrecken ist, durch welche der von der Flüssigkeit erfüllte Raum zu einem einfach zusammenhängenden gemacht werden kann. Da wir angenommen haben, dass die Anfangs- und Schlussposition der Körper keine Variation erfährt, so verschwindet $\cos\eta$ für die ganze Oberfläche der Körper; das von der Variation an den Grenzen stammende Glied verschwindet also, sobald das Geschwindigkeitspotential eindeutig ist. Unter dieser Bedingung ist also die Anwendung des *Hamilton*schen Princips, wie sie die Herren *Thomson* und *Tait* machten, in der That gestattet; nur darf das Verschwinden der von der Variation an den Grenzen herstammenden Glieder nicht als selbstverständlich vorausgesetzt werden, sondern bedarf erst des Beweises. Auf ein unrichtiges Resultat aber würde man im Falle der Existenz eines mehrdeutigen oder gar keines Geschwindigkeitspotentials geführt. Im ersten Falle verwandelt sich das von der Variation an den Grenzen herstammende Glied in $\Sigma k\int do\,\varrho\,|\delta q\cos\eta|_0^\tau$, wobei k die vorige Bedeutung hat. Die Integration ist über alle Elemente eines Querschnitts auszudehnen, das Zeichen Σ bedeutet eine Summation bezüglich aller Querschnitte. $\int do\,\varrho\,\delta q\cos\eta$ ist die Masse der durch einen Querschnitt gegangenen Flüssigkeit. Das von der Variation an den Grenzen stammende Glied ist also, wenn die Anfangsposition der Flüssigkeitstheilchen nicht variirt wird, die Summe der Producte der durch alle Querschnitte in der Richtung, in der φ wächst, gegangenen Flüssigkeitsmassen in die Constante k für den betreffenden Quer-

schnitt. Um also nach dieser Methode die auf die Körper wirksamen Kräfte zu finden, müsste man dieses Glied in jedem speciellen Falle in ein nach t zwischen Null und τ genommenes Integral verwandeln, welches unter dem Integralzeichen nur noch δx, δy, und δz enthielte. Ich will mich jedoch hierauf nicht weiter einlassen, sondern werde die auf die Körper wirkenden Kräfte in der einfachsten Weise, nämlich durch directe Auswerthung der auf irgend ein Oberflächenelement wirksamen Kraft berechnen. Ich beginne wieder mit dem einfachern Falle, dass die Oberflächen aller Körper ruhen. φ enthält dann die Zeit nicht, und der Druck p, welcher auf irgend ein Oberflächenelement do wirkt, ist gleich einer Constanten weniger $\varrho\frac{u_a^2+v_a^2+w_a^2}{2}$. Wir wollen nun die elektrodynamische Kraft berechnen, welche auf die das Element do bedeckenden Stromelemente von allen übrigen ausgeübt wird. Ihre Componenten in der Richtung der drei Coordinatenaxen sind nach den bekannten Formeln für die Wirkung geschlossener Ströme auf ein Stromelement

$$X = do(kH-hK),\quad Y = do(gK-kG),\quad Z = do(hG-gH).$$

Es ist hier nach der bereits früher angewandten Bezeichnung:

$$G=\int do\frac{k'(y-y')-h'(z-z')}{r^3},\quad H=\int do\frac{g'(z-z')-k'(x-x')}{r^3},$$
$$K=\int do\frac{h'(x-x')-g'(y-y')}{r^3}.$$

Die Werthe G, H, K sind, wie wir gesehen haben, unbestimmt, sobald die Ströme auf einer absoluten Fläche fliessen. Substituiren wir dagegen statt der Fläche eine Schicht von unendlich kleiner Dicke, in der jedes Flächenelement gleichförmig von den Strömen erfüllt ist, so nehmen sie von der Innenseite gegen die Aussenseite gleichförmig von Null bis $-4\pi u_a$, $-4\pi v_a$, $-4\pi w_a$ zu. Es nehmen daher auch die Kräfte, welche auf ein Stromelement wirken, und die ja den Grössen G, H, K proportional sind, gleichförmig von der Innenseite gegen die Aussenseite zu, und um die Gesammtkraft zu finden, welche auf die das Oberflächenelement do bedeckende Stromschicht wirkt, haben wir statt G, H, K ihre Mittelwerthe, $-2\pi u_a$, $-2\pi v_a$, $-2\pi w_a$ einzusetzen. Wir erhalten daher, indem wir auch für g, h, k ihre Werthe einsetzen und die Gleichung $\lambda u_a+\mu v_a+\nu w_a=0$ berücksichtigen:

$$X=-2\pi\lambda(u_a^2+v_a^2+w_a^2)do,\quad Y=-2\pi\mu(u_a^2+v_a^2+w_a^2)do,\quad Z=-2\pi\nu(u_a^2+v_a^2+w_a^2)do.$$

Die elektrodynamische Wirkung steht also wie der hydrodynamische Druck

derselben,
ausgeschlossen ist.
... geschwindigkeitscom-
... Differentiales
... ebenso der
... wird daher eben-

$$= E.$$

... Ringoberfläche wirkenden
... ngirten Flüssigkeit auf
... Dann ...

$$p_a - p_i = \varrho\frac{d\varphi_i}{dt} + \frac{\varrho}{2}\left[\left(\frac{d\varphi_i}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_i}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_i}{dz}\right)^2\right]$$
$$-\varrho\frac{d\varphi_a}{dt} - \frac{\varrho}{2}\left[\left(\frac{d\varphi_a}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_a}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_a}{dz}\right)^2\right];$$

führt man hier statt $\frac{d\varphi_a}{dt} - \frac{d\varphi_i}{dt}$ die Grössen E ein, so erhält man:

$$p_a - p_i = \frac{\varrho}{2}\left[\left(\frac{d\varphi_i}{dx} - \alpha\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_i}{dy} - \beta\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_i}{dz} - \gamma\right)^2\right]$$
$$-\frac{\varrho}{2}\left[\left(\frac{d\varphi_a}{dx} - \alpha\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_a}{dy} - \beta\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_a}{dz} - \gamma\right)^2\right] - \varrho E.$$

Wir wollen nun wieder die elektrodynamische Wirkung berechnen, welche sämmtliche das Oberflächenelement do bedeckenden Stromelemente von den übrigen und ausserdem von den mit -4π multiplicirten Kräften erleiden, deren Geschwindigkeitspotential die durch die Formel (5.) bestimmte Grösse Q ist. Die Definition dieser Kräfte gaben wir dort. Die 3 Componenten der Kräfte, welche dann auf do wirken, lassen sich gerade wie im Falle ruhender Körper berechnen. Dieselben wären, wenn alle das Element do bedeckenden Ströme auf seiner Aussenseite lägen:

$$X_a = 4\pi i do[b(w_a - \gamma) - c(v_a - \beta)], \qquad Y_a = 4\pi i do[c(u_a - \alpha) - a(w_a - \gamma)],$$
$$Z_a = 4\pi i do[a(v_a - \beta) - b(u_a - \alpha)],$$

wobei wieder a, b, c die Richtungscosinus der Ströme in do sind. Ebenso erhalten wir für die Innenseite:

$$X_i = 4\pi i do[b(w_i - \gamma) - c(v_i - \beta)], \qquad Y_i = 4\pi i do[c(u_i - \alpha) - a(w_i - \gamma)],$$
$$Z_i = 4\pi i do[a(v_i - \beta) - b(u_i - \alpha)].$$

Sind die Ströme im Innern der do bedeckenden Schicht, so sind sie bezüglich eines Theils der Ströme als innerhalb, bezüglich des andern als ausserhalb liegend zu rechnen, und man muss daher, um die Componenten sämmtlicher Kräfte zu finden, welche auf die do bedeckenden Stromelemente wirken, das arithmetische Mittel der obigen Werthe nehmen. Sie besitzen daher die Werthe:

$$X = 2\pi i do[b(w_a + w_i - 2\gamma) - c(v_a + v_i - 2\beta)], \quad Y = 2\pi[c(u_a + u_i - 2\alpha) - a(w_a + w_i - 2\gamma)] i do,$$
$$Z = 2\pi i do[a(v_a + v_i - 2\beta) - b(u_a + u_i - 2\alpha)].$$

Ihre Resultante steht senkrecht auf do. Wir wollen sie mit R bezeichnen. Setzen wir, um Platz zu ersparen:

$$u_i - \alpha = \xi, \quad v_i - \beta = \eta, \quad w_i - \gamma = \zeta, \quad u_a - \alpha = \mathfrak{x}, \quad v_a - \beta = \mathfrak{y}, \quad w_a - \gamma = \mathfrak{z},$$
$$\mathfrak{y}\zeta - \mathfrak{z}\eta = \varrho, \quad \mathfrak{z}\xi - \mathfrak{x}\zeta = \sigma, \quad \mathfrak{x}\eta - \mathfrak{y}\xi = \tau,$$

so erhalten wir:

$$\frac{R}{2\pi\, do} = i\sqrt{(\mathfrak{x}+\xi)^2+(\mathfrak{y}+\eta)^2+(\mathfrak{z}+\zeta)^2-[a(\mathfrak{x}+\xi)+b(\mathfrak{y}+\eta)+c(\mathfrak{z}+\zeta)]^2}.$$

Wir wollen nun in die Gleichung $i = \sqrt{g^2+h^2+k^2}$ für g, h, k ihre Werthe substituiren, es ergiebt sich:

$$i = \sqrt{(\mathfrak{x}-\xi)^2+(\mathfrak{y}-\eta)^2+(\mathfrak{z}-\zeta)^2-[a(\mathfrak{x}-\xi)+b(\mathfrak{y}-\eta)+c(\mathfrak{z}-\zeta)]^2}.$$

Nun ist aber, weil die Ableitung von φ in der Richtung der durch do fliessenden Ströme keinen Sprung machen darf,

$$(7.) \qquad a(\mathfrak{x}-\xi)+b(\mathfrak{y}-\eta)+c(\mathfrak{z}-\zeta) = 0,$$

daher

$$i = \sqrt{(\mathfrak{x}-\xi)^2+(\mathfrak{y}-\eta)^2+(\mathfrak{z}-\zeta)^2}.$$

Da die Projection sowohl der Geschwindigkeit der innern als auch der äussern Flüssigkeit in der Richtung der Normalen auf do gleich der Projection der Geschwindigkeit von do in derselben Richtung sein muss, so haben wir:

$$\lambda\mathfrak{x}+\mu\mathfrak{y}+\nu\mathfrak{z} = 0, \quad \lambda\xi+\mu\eta+\nu\zeta = 0.$$

Aus diesen beiden und der Gleichung $\lambda a+\mu b+\nu c = 0$ folgt: $a\varrho+b\sigma+c\tau = 0$. Combiniren wir diese Gleichung mit der Gleichung (7.), so erhalten wir:

$$a = \frac{\sigma(\mathfrak{z}-\zeta)-\tau(\mathfrak{y}-\eta)}{n}, \quad b = \frac{\tau(\mathfrak{x}-\xi)-\varrho(\mathfrak{z}-\zeta)}{n}, \quad c = \frac{\varrho(\mathfrak{y}-\eta)-\sigma(\mathfrak{x}-\xi)}{n},$$

wobei

$$n^2 = [\sigma(\mathfrak{z}-\zeta)-\tau(\mathfrak{y}-\eta)]^2+[\tau(\mathfrak{x}-\xi)-\varrho(\mathfrak{z}-\zeta)]^2+[\varrho(\mathfrak{y}-\eta)-\sigma(\mathfrak{x}-\xi)]^2$$
$$= (\varrho^2+\sigma^2+\tau^2)[(\mathfrak{x}-\xi)^2+(\mathfrak{y}-\eta)^2+(\mathfrak{z}-\zeta)^2].$$

Die Substitution dieser Werthe ergiebt zunächst:

$$a(\mathfrak{x}+\xi)+b(\mathfrak{y}+\eta)+c(\mathfrak{z}+\zeta) = \frac{2(\varrho^2+\sigma^2+\tau^2)}{n} = \frac{2\sqrt{\varrho^2+\sigma^2+\tau^2}}{i}$$

Es wird also, wenn man auch für i seinen Werth substituirt:

$$\frac{R}{2\pi\, do} = \sqrt{[(\mathfrak{x}+\xi)^2+(\mathfrak{y}+\eta)^2+(\mathfrak{z}+\zeta)^2][(\mathfrak{x}-\xi)^2+(\mathfrak{y}-\eta)^2+(\mathfrak{z}-\zeta)^2]-4(\varrho^2+\sigma^2+\tau^2)}$$

und nach einigen Reductionen:

$$\frac{R}{2\pi\, do} = \mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2-\xi^2-\eta^2-\zeta^2,$$

daher:

$$R = 2\pi\, do\Big[\Big(\frac{d\varphi_a}{dx}-\alpha\Big)^2+\Big(\frac{d\varphi_a}{dy}-\beta\Big)^2+\Big(\frac{d\varphi_a}{dz}-\gamma\Big)^2 -\Big(\frac{d\varphi_i}{dx}-\alpha\Big)^2-\Big(\frac{d\varphi_i}{dy}-\beta\Big)^2-\Big(\frac{d\varphi_i}{dz}-\gamma\Big)^2\Big],$$

folglich:

$$(8.)\qquad p_a do = p_i do - \frac{\varrho R}{4\pi} - \varrho E do.$$

Wenn Geschwindigkeit und Beschleunigung der Ringe endlich sind, so ist es auch p_i; ebenso wissen wir, dass E endlich ist. Wollen wir nun aus dem Ausdrucke für $p_a do$ die Kräfte und Kräftepaare finden, die einen der Ringe afficiren, so müssen wir ihn mit gewissen endlichen Grössen multiplicirt über die unendlich kleine Ringoberfläche integriren. Es wird daher sowohl $p_i do$ als auch $\varrho E do$ nur unendlich kleines liefern. Die Kräfte und Kräftepaare, welche den Ring afficiren, sind also mit Vernachlässigung von unendlich kleinem gerade so gross, als wenn auf jedes Flächenelement desselben nur die Kraft $-\frac{\varrho R}{4\pi}$ wirken würde. Es ist dies die mit $-\frac{\varrho}{4\pi}$ multiplicirte Kraft, welche von allen Strömen und in Folge des Potentials Q auf die das Oberflächenelement do bedeckenden Stromelemente ausgeübt wird. Nun können aber bei unendlich dünnen Ringen nicht nur alle Ströme in der Mittellinie concentrirt gedacht werden, sondern man kann auch Geschwindigkeit und Bewegungsrichtung innerhalb eines sehr kurzen Stücks des Ringes als constant ansehen. Für den Fall bewegter unendlich dünner fester Ringe ist also die auf jeden Ring ausgeübte Wirkung gleich aber entgegengesetzt gerichtet, wie die mit $\frac{\varrho}{4\pi}$ multiplicirte elektrodynamische Wirkung, welche auf den mit der Intensität k diesen Ring durchfliessenden Strom von den die übrigen Ringe in gleicher Weise durchfliessenden ausgeübt würde. Dazu kommt aber noch die Kraft mit dem Potential ϱQ. Wären die Ringe nicht fest, sondern wie biegsame Fäden ohne Längen- und Querschnittänderung deformirbar, so würden, wenn man aus dem Ausdrucke (8.) für $p_a do$ wieder die Kraft sucht, die ein unendlich kleines, aber gegen die Dimensionen des Querschnitts unendliches Längenelement $d\sigma$ eines Rings afficirt, die beiden Glieder $p_i do$ und $-\varrho E do$ wieder nur Verschwindendes liefern. Es ist also diese Kraft (abgesehen von solchen, die sich an jedem biegsamen Ringe das Gleichgewicht halten) gleich der mit $-\frac{\varrho}{4\pi}$ multiplicirten Wirkung aller andern Ströme auf das Stromelement $d\sigma$

mehr der Kraft mit dem Potential ϱQ. Letztere ist nach dem früher gefundenen senkrecht auf $d\sigma$ und seiner Bewegungsrichtung. Ihre Intensität ist gleich $\varrho k d\sigma$ multiplicirt mit der auf $d\sigma$ senkrechten Componente seiner Geschwindigkeit. Sie wirkt nach jener Seite zu, wo Bewegungsrichtung des Elementes und der Flüssigkeit entgegengesetzt sind. Zum Schlusse füge ich noch bei, dass hierbei vorausgesetzt ist, dass der in unendlicher Entfernung auf die Flüssigkeit wirkende Druck an der Ringoberfläche nicht negativ wird; sonst würde eine Trennungsfläche entstehen. Sind die Ringe unendlich dünn, so wird die Geschwindigkeit an ihrer Oberfläche unendlich; es ist daher auch der Druck, der auf der Flüssigkeit lasten muss, damit keine Trennungsfläche entstehe, unendlich.

Graz, den 5. November 1870.

Ueber Relationen zwischen hypergeometrischen Integralen n^{ter} Ordnung.

(Von Herrn *L. Pochhammer*.)

Die im 71ten Bande dieses Journals von mir betrachteten hypergeometrischen Functionen n^{ter} Ordnung, welche sowohl in der Bestimmung durch die Unstetigkeits- und Verzweigungs-Bedingungen und der Darstellung durch bestimmte Integrale, als in den Reihenentwicklungen und dem Verhalten der angrenzenden Functionen die grösste Aehnlichkeit mit der *Gauss*schen hypergeometrischen Reihe zeigen, sind der letzteren auch in sofern analog, als einfache Relationen zwischen Integralen existiren, deren Variable linear mit einander verbunden sind. Bei der *Gauss*schen Reihe sind es die sechs Argumente $x,\ 1-x,\ \frac{1}{x},\ \frac{x-1}{x},\ \frac{-1}{x-1},\ \frac{x}{x-1}$, welche als Variable in den Relationen vorkommen; bei den hypergeometrischen Functionen n^{ter} Ordnung bilden nicht nur x und $x-1$, sondern die n Differenzen $x-a_1,\ x-a_2, \dots x-a_n$ die Nenner der in den Relationen vorkommenden Argumente. Unter den im Allgemeinen drei Functionen enthaltenden Relationen der *Gauss*schen Reihen zeichnen sich einige wenige aus, in denen nur zwei Functionen vorkommen; ebenso existiren bei den hypergeometrischen Functionen n^{ter} Ordnung mehrere Gleichungen zwischen *je zwei* Integralen, auf welche hier besonders eingegangen werden soll. Im allgemeinen Fall sind je $n+1$ Integrale durch eine Relation verbunden, doch kommt auch jede kleinere Zahl vor.

Die verschiedenen particulären Integrale der hypergeometrischen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung wurden als bestimmte Integrale gefunden, deren Grenzen aus den $n+1$ Grössen $a_1,\ a_2, \dots a_n$ und x zu nehmen waren, während die zu integrirende Function dieselbe blieb. Als $n+2^{\text{te}}$ Grenze ist *der Werth* ∞ hinzuzufügen, welcher für die Entwicklung nach fallenden Potenzen das mehrdeutige Hauptintegral, und für die endlichen singulären Punkte je ein eindeutiges Integral liefert. Diese Grenze ∞, auf welche schon *Jacobi* aufmerksam macht*), ist, wie die folgenden Entwicklungen zeigen, für die zwischen

---

*) Dieses Journal Bd. 56. S. 149.

je zwei hypergeometrischen Integralen bestehenden Relationen besonders wichtig. Die eindeutigen particulären Integrale haben immer je zwei der $n+1$ constanten Werthe $a_1, a_2, \dots a_n, \infty$ zu Grenzen, wie unter Berichtigung einer früher von mir gemachten Angabe im Abschnitt II. der folgenden Abhandlung bewiesen wird.

Für diejenige Reihe, welche in unmittelbarster Weise als Verallgemeinerung der *Gauss*schen Reihe erscheint, soll der Name *hypergeometrische Reihe n^{ter} Ordnung* gebraucht werden. Es ist zu bemerken, dass, von $n=3$ an, die hypergeometrische Reihe kein hypergeometrisches Integral ist, sondern erst nach Multiplication mit einer Potenz der unabhängigen Variable zum Integral einer hypergeometrischen Differentialgleichung wird.

In den beiden ersten Abschnitten sind die vorbereitenden Entwicklungen enthalten, welche einerseits die Einführung der Grenze ∞, andererseits den Ausdruck der bestimmten Integrale durch Reihen betreffen. Die gewonnenen Gleichungen werden dann im dritten und vierten Abschnitt zur Herstellung der Relationen zwischen den hypergeometrischen Integralen angewendet.

Für die dritte Ordnung lässt sich ein Theil der hier abgeleiteten Gleichungen in der *Gauss*schen Bezeichnung darstellen. Es sind daher am Schluss der Abhandlung (Abschnitt V.), unter Anwendung dieser Bezeichnung, die Relationen für $n=3$ noch einmal zusammengestellt worden.

I.

Die allgemeine hypergeometrische Function n^{ter} Ordnung

$$H_n\begin{pmatrix} a_1, a_2, \dots a_n, x \\ b_1, b_2, \dots b_n, \lambda \end{pmatrix}$$

ist das vollständige Integral der Differentialgleichung

$$(1.)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi(x)\frac{d^n y}{dx^n}-[(\lambda-n)_1\varphi'(x)+\psi(x)]\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots\\ &+(-1)^{n-k}[(\lambda-k-1)_{n-k}\varphi^{(n-k)}(x)+(\lambda-k-1)_{n-k-1}\psi^{(n-k-1)}(x)]\frac{d^k y}{dx^k}+\cdots\\ &+(-1)^n[(\lambda-1)_n\varphi^{(n)}(x)+(\lambda-1)_{n-1}\psi^{(n-1)}(x)]y \;=\; 0,\end{aligned}\right.$$

in welcher

$$\varphi(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n),$$

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{b_1}{x-a_1}+\frac{b_2}{x-a_2}+\cdots+\frac{b_n}{x-a_n}$$

zu setzen ist *). Particuläre Integrale von (1.) sind die als hypergeometrische Integrale bezeichneten Ausdrücke:

$$y_{\mu,\nu} = \int_{a_\mu}^{a_\nu} (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\dots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x)^{\lambda-1}du,$$

$$y_\nu = \int_{a_\nu}^{x} (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\dots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x)^{\lambda-1}du.$$

Die Functionen $y_{\mu,\nu}$ und y_ν haben für positive Werthe der Exponenten b_1, b_2, ... b_n und λ einen vollständig bestimmten Sinn; sobald dagegen ein Exponent b_k aufhört, in seinem reellen Theil positiv zu sein, werden die Integrale $y_{k,\nu}$ und y_k unendlich oder unbestimmt. Es erscheint deshalb zweckmässig, die bestimmten Integrale durch Reihen zu ersetzen, welche auch für die negativen Werthgebiete von b_1, ... b_n, λ ihre Bedeutung behalten. Es soll für diejenige Reihe, die der *Gauss*schen am ähnlichsten gebildet ist, der Buchstabe F mit dem Index n angewendet werden; die übrigen Reihen, deren Constanten selbst wieder unendliche Reihen sind, werden im Folgenden überall auf diese zurückgeführt werden.

Man nenne *hypergeometrische Reihe n^{ter} Ordnung* und bezeichne durch

$$F_n\begin{pmatrix} 0, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{n-1}, \xi \\ \varepsilon, \beta_1, \beta_2, \dots \beta_{n-1}, \lambda \end{pmatrix}$$

die Reihe

$$(2.)\quad \begin{cases} 1 - \dfrac{(\varepsilon)_1}{(\varepsilon+\lambda)_1} C_1 \xi + \dfrac{(\varepsilon+1)_2}{(\varepsilon+\lambda+1)_2} C_2 \xi^2 - \dfrac{(\varepsilon+2)_3}{(\varepsilon+\lambda+2)_3} C_3 \xi^3 + \cdots \\ \qquad + (-1)^k \dfrac{(\varepsilon+k-1)_k}{(\varepsilon+\lambda+k-1)_k} C_k \xi^k + \cdots \text{ in inf.,} \end{cases}$$

in welcher die Constanten C die folgende Bedeutung haben:

$$C_1 = \frac{(\beta_1-1)_1}{\alpha_1} + \frac{(\beta_2-1)_1}{\alpha_2} + \cdots + \frac{(\beta_{n-1}-1)_1}{\alpha_{n-1}},$$

$$C_2 = \frac{(\beta_1-1)_2}{\alpha_1^2} + \frac{(\beta_2-1)_2}{\alpha_2^2} + \cdots + \frac{(\beta_{n-1}-1)_2}{\alpha_{n-1}^2}$$

$$+ \frac{(\beta_1-1)_1(\beta_2-1)_1}{\alpha_1\alpha_2} + \frac{(\beta_1-1)_1(\beta_3-1)_1}{\alpha_1\alpha_3} + \cdots + \frac{(\beta_{n-2}-1)_1(\beta_{n-1}-1)_1}{\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}},$$

. . . .

$$C_k = \sum_{i_1,i_2,\dots i_{n-1}} \frac{(\beta_1-1)_{i_1}(\beta_2-1)_{i_2}\dots(\beta_{n-1}-1)_{i_{n-1}}}{\alpha_1^{i_1}\alpha_2^{i_2}\dots\alpha_{n-1}^{i_{n-1}}}.$$

$$(i_1+i_2+\cdots+i_{n-1}=k).$$

*) Dieses Journal Bd. 71 S. 316.

Die Summe in dem Ausdruck des C_k ist über alle ganzzahligen positiven Werthe von $i_1, i_2, \dots i_{n-1}$ auszudehnen, welche der Bedingung

$$i_1+i_2+\cdots+i_{n-1} = k$$

genügen; die eingeklammerten, mit Index versehenen Constanten bedeuten Binomialcoefficienten.

In dem Argument der Function F_n gehören je zwei übereinanderstehende Elemente zusammen. Eine bevorzugte Stellung hat nur das erste und das letzte Elementenpaar; alle übrigen, (α_1, β_1), (α_2, β_2), ... $(\alpha_{n-1}, \beta_{n-1})$, können beliebig mit einander vertauscht werden. Wird irgend eines der Elemente $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_{n-1}$ gleich der Zahl 1, so geht die Function in die $n-1^{te}$ Ordnung über.

Die Function F_n bleibt unverändert, wenn man die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{n-1}$ und ξ mit derselben Zahl multiplicirt. Es folgt hieraus, dass eine beliebige der Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{n-1}$ gleich 1 gemacht werden kann. Für die zweite Ordnung zeigt der Vergleich mit der *Gauss*schen Bezeichnung, dass

$$F_2\begin{pmatrix}0, 1, \xi \\ \varepsilon, \beta, \lambda\end{pmatrix} = F(\varepsilon, 1-\beta, \varepsilon+\lambda, \xi)$$

ist. Der Ausdruck der hypergeometrischen Reihe F_n durch ein bestimmtes Integral ist durch die Gleichung

$$(3.)\quad \begin{cases} F_n\begin{pmatrix}0, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{n-1}, \xi \\ \varepsilon, \beta_1, \beta_2, \dots \beta_{n-1}, \lambda\end{pmatrix} = \\ \dfrac{\Gamma(\varepsilon+\lambda)}{\Gamma(\varepsilon)\Gamma(\lambda)}\displaystyle\int_0^1 v^{\varepsilon-1}(1-v)^{\lambda-1}\Big(1-\frac{\xi v}{\alpha_1}\Big)^{\beta_1-1}\Big(1-\frac{\xi v}{\alpha_2}\Big)^{\beta_2-1}\dots\Big(1-\frac{\xi v}{\alpha_{n-1}}\Big)^{\beta_{n-1}-1} dv \end{cases}$$

gegeben, welche aus der Entwicklung des Integrals y_ν (Bd. 71, S. 347) folgt.

Der hypergeometrischen Differentialgleichung (1.) genügt das zum singulären Punkt a_1 gehörige particuläre Integral

$$(x-a_1)^{b_1+\lambda-1} F_n\begin{pmatrix}0, a_2-a_1, a_3-a_1, \dots a_n-a_1, x-a_1 \\ b_1, \quad b_2, \quad b_3, \quad \dots \quad b_n, \quad \lambda\end{pmatrix},$$

welches mit y_1 bis auf einen constanten Factor übereinstimmt. Bei der eingeführten Bezeichnung stellt das Argument der Function F_n,

$$\begin{pmatrix}0, a_2-a_1, a_3-a_1, \dots a_n-a_1, x-a_1 \\ b_1, \quad b_2, \quad b_3, \quad \dots \quad b_n, \quad \lambda\end{pmatrix},$$

auch gleichzeitig das Argument der allgemeinen hypergeometrischen Function H_n dar; denn da die Gleichung (1.) unverändert bleibt, wenn man zu $a_1, a_2, \dots a_n$ und x dieselbe Constante addirt, so ist

$$H_n\begin{pmatrix}a_1, a_2, a_3, \dots a_n, x \\ b_1, b_2, b_3, \dots b_n, \lambda\end{pmatrix} = H_n\begin{pmatrix}0, a_2-a_1, a_3-a_1, \dots a_n-a_1, x-a_1 \\ b_1, \quad b_2, \quad b_3, \quad \dots \quad b_n, \quad \lambda\end{pmatrix}.$$

Die Reihe (2.) ist convergent, sobald der Modul von ξ kleiner als der Modul jeder der Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{n-1}$ ist. Denn es wurde bewiesen, dass die Entwicklung von

$$(x-a_1)^{-(b_1+\lambda-1)}y_1, \text{ gleich Const. } F_n\begin{pmatrix}0, a_2-a_1, a_3-a_1, \dots a_n-a_1, x-a_1\\ b_1, \quad b_2, \quad b_3, \dots \quad b_n, \quad \lambda\end{pmatrix},$$

auf derjenigen Kreisfläche convergent ist, welche a_1 zum Mittelpunkt und die Entfernung des Punktes a_1 vom nächstgelegenen singulären Punkte zum Radius hat. Innerhalb dieser Kreisfläche liegen aber die Punkte, welche der Bedingung genügen, dass $\operatorname{mod}(x-a_1)$ kleiner als $\operatorname{mod}(a_2-a_1)$, $\operatorname{mod}(a_3-a_1), \dots$ $\operatorname{mod}(a_n-a_1)$ ist.

Der genaue Ausdruck der Integrale y_ν durch die Reihen (2.) ist ebenfalls schon in den früheren Rechnungen (Bd. 71) enthalten. Nennt man

$$K_\nu = (a_\nu-a_1)^{b_1-1}(a_\nu-a_2)^{b_2-1}\dots(a_\nu-a_{\nu-1})^{b_{\nu-1}-1}(a_\nu-a_{\nu+1})^{b_{\nu+1}-1}\dots(a_\nu-a_n)^{b_n-1},$$

so ist:

$$(4.)\quad \begin{cases} y_\nu = \\ \dfrac{(-1)^{\lambda-1}K_\nu\Gamma(b_\nu)\Gamma(\lambda)}{\Gamma(b_\nu+\lambda)}(x-a_\nu)^{b_\nu+\lambda-1}F_n\begin{pmatrix}0, a_1-a_\nu, \dots a_{\nu-1}-a_\nu, a_{\nu+1}-a_\nu, \dots a_n-a_\nu, x-a_\nu\\ b_\nu, \quad b_1, \quad \dots \quad b_{\nu-1}, \quad b_{\nu+1}, \quad \dots \quad b_n, \quad \lambda\end{pmatrix}.\end{cases}$$

Hinsichtlich der Integrale $y_{\mu,\nu}$ und y_ν wurde bei der Integration der hypergeometrischen Differentialgleichung vorausgesetzt, dass λ grösser als n, und $b_1, b_2, \dots b_n$ grösser als 1 (im reellen Theile) seien. Die Gültigkeit der Integration lässt sich zunächst auf alle positiven Werthe dieser Constanten ausdehnen. Liegt der reelle Theil von b_k zwischen 0 und 1, so wird zwar der Factor $(u-a_k)^{b_k-1}$ unendlich für $u=a_k$; aber mit Hülfe der bekannten Gleichung

$$\int_p^q f_1(u)f_2(u)\,du = f_1(r)\int_p^q f_2(u)\,du,$$

in welcher r einen zwischen p und q liegenden Werth bedeutet, zeigt man, dass sowohl $y_{k,\nu}$ als y_k einen bestimmten endlichen Werth behalten. Ebenso hat, damit die Integrale y_ν an der oberen Grenze einen Sinn haben, die Constante λ nur der Anforderung zu genügen, dass ihr reeller Theil positiv sei. Es bleibt zu beweisen, dass die Integrale für die angeführten Werthe der Constanten auch die Gleichung (1.) befriedigen. Für die zwischen 0 und 1 liegenden Werthe der Grössen $b_1, \dots b_n$ ergiebt sich dies unmittelbar. Denn durch Einsetzung der bestimmten Integrale geht die Differentialgleichung (1.) in die Gleichung

$$[(u-a_1)^{b_1}(u-a_2)^{b_2}\dots(u-a_n)^{b_n}(u-x)^{\lambda-n}]_{u=g}^{u=h} = 0$$

über, wo für g und h zwei der Werthe $a_1, a_2, \dots a_n, x$ zu nehmen sind. Damit aber die Potenz $(u-a_\nu)^{b_\nu}$ für $u=a_\nu$ verschwinde, ist nur nöthig, dass der reelle Theil von b_ν positiv sei.

Die Zulässigkeit der Werthe von λ, deren reeller Theil zwischen 0 und n liegt, folgt aus dem Verhältniss, in welchem die hypergeometrischen Functionen zu ihren Differentialquotienten stehen. Differentiirt man die Gleichung (1.) nach x, so erhält man eine Differentialgleichung n^{ter} Ordnung für $\frac{dy}{dx}$, welche sich in den Coefficienten nur dadurch von (1.) unterscheidet, dass $\lambda-1$ an Stelle von λ getreten ist. Es ergiebt sich daher die Gleichung

$$(5.)\qquad \frac{d}{dx}H_n\begin{pmatrix}a_1, a_2, \dots a_n, x\\ b_1, b_2, \dots b_n, \lambda\end{pmatrix} = H_n\begin{pmatrix}a_1, a_2, \dots a_n, x\\ b_1, b_2, \dots b_n, \lambda-1\end{pmatrix}.$$

Ist nun der reelle Theil von λ erst nach Addition der ganzen Zahl m grösser als n, so sind die mehrdeutigen Integrale y_ν in dem Ausdrucke

$$\frac{d^m}{dx^m}H_n\begin{pmatrix}a_1, a_2, \dots a_n, x\\ b_1, b_2, \dots b_n, \lambda+m\end{pmatrix}$$

enthalten, welcher einen völlig bestimmten Werth hat. Da aber, sobald nur der reelle Theil von λ positiv ist, die Gleichung besteht

$$\frac{d^m}{dx^m}\int_{a_\nu}^{x}(u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\dots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x)^{\lambda+m-1}du$$
$$= \text{Const.}\int_{a_\nu}^{x}(u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\dots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x)^{\lambda-1}du,$$

so ist bewiesen, dass die Functionen y_ν particuläre Integrale von (1.) sind, so lange als der reelle Theil von λ positiv ist. Wird letzterer dagegen negativ, so haben die bestimmten Integrale y_ν keine Bedeutung mehr für die Gleichung (1.). Die mehrdeutigen Integrale werden alsdann durch den Differentialquotienten

$$\frac{d^m}{dx^m}\int_{a_\nu}^{x}(u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\dots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x)^{\lambda+m-1}du$$

oder

$$\text{Const.}\frac{d^m}{dx^m}\left\{(x-a_\nu)^{b_\nu+\lambda+m-1}F_n\begin{pmatrix}0, & a_1-a_\nu, & \dots & a_n-a_\nu, & x-a_\nu\\ b_\nu, & b_1, & \dots & b_n, & \lambda+m\end{pmatrix}\right\},$$

bei welchem $\lambda+m$ als positiv im reellen Theile vorausgesetzt ist, geliefert. Der letztere Ausdruck ist aber, in Folge von (5.), wieder mit

$$\text{Const.}(x-a_\nu)^{b_\nu+\lambda-1}F_n\begin{pmatrix}0, & a_1-a_\nu, & \dots & a_n-a_\nu, & x-a_\nu\\ b_\nu, & b_1, & \dots & b_n, & \lambda\end{pmatrix}$$

identisch.

Durch diese Betrachtungen wird man direct darauf hingewiesen, nicht die bestimmten Integrale, sondern die Reihen zu Grunde zu legen, da letztere in Bezug auf die Constanten ein grösseres Werthgebiet umfassen. In der That wird die hypergeometrische Reihe (2.) nur dann illusorisch, wenn $\varepsilon+\lambda$ eine negative ganze Zahl oder Null ist. Das Vorzeichen der Constanten β beeinflusst die Convergenz der Reihe nicht, und daher können, den vorerwähnten Fall ausgenommen, die Grössen ε, λ, $\beta_1, \dots \beta_{n-1}$ völlig beliebige Werthe annehmen.

Die erweiterte Gültigkeit der particulären Lösungen macht es möglich, ausser $a_1, a_2, \dots a_n$ und x eine $n+2^{\text{te}}$ Grenze für die bestimmten Integrale zu benutzen, nämlich den Werth ∞. Da der reelle Theil von λ nicht mehr grösser als n zu sein braucht, sondern selbst beliebige negative Werthe annehmen kann, so verschwindet der Ausdruck

$$(u-a_1)^{b_1}(u-a_2)^{b_2}\dots(u-a_n)^{b_n}(u-x)^{\lambda-n}$$

für $u=\infty$, sobald der reelle Theil der Summe $b_1+b_2+\dots+b_n+\lambda$, welche durch s bezeichnet wird, kleiner als n ist. Nimmt man an, dass die letztere Bedingung erfüllt ist, während auch $b_1, b_2, \dots b_n$ und λ in ihrem reellen Theil positiv sind, so sind sämmtliche $n+2$ Grenzen $a_1, \dots a_n, \infty$ und x unmittelbar anwendbar. In Uebereinstimmung mit der früheren Benennung bezeichnet man, da der Werth ∞ der $n+1^{\text{te}}$ singuläre Werth der Differentialgleichung (1.) ist, durch $y_{\nu,n+1}$ und y_{n+1} die particulären Integrale:

$$y_{\nu,n+1} = \int_{a_\nu}^{\infty}(u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\dots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x)^{\lambda-1}du,$$

$$y_{n+1} = \int_{x}^{\infty}(u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\dots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x)^{\lambda-1}du.$$

Ist der reelle Theil von s grösser als n, so erhält man die den Integralen $y_{\nu,n+1}$ und y_{n+1} entsprechenden particulären Lösungen von (1.) mit Hülfe der Gleichung (5.). Man ersetze λ durch $\lambda-m$, wo die ganze Zahl m die Bedingung, dass der reelle Theil von $s-m-n$ negativ sei, zu befriedigen hat. Dann haben die Integrale

$$\int_{a_\nu}^{\infty}(u-a_1)^{b_1-1}\dots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x)^{\lambda-m-1}du \text{ und } \int_{x}^{\infty}(u-a_1)^{b_1-1}\dots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x)^{\lambda-m-1}du$$

einen völlig bestimmten Sinn; indem man ihre Reihenentwicklung m Mal nach x integrirt und die Integrationsconstanten passend wählt, gelangt man zu particulären Lösungen von (1.). Auch hier hat man, wie vorher bei

der Grenze x, das Resultat, dass hinsichtlich des Werthgebietes der Constanten die Reihen allgemeinere Lösungen der Differentialgleichung sind, als die bestimmten Integrale; die Bedeutung der letzteren ist allerdings nicht auf die einzelnen singulären Punkte beschränkt. — Im Folgenden werden auch die übrigen particulären Integrale durch die hypergeometrischen Reihen F ausgedrückt und dadurch von der Bedingung, dass der reelle Theil der Grössen b positiv sei, befreit werden.

In Betreff der Eigenschaften der Integrale $y_{\nu,n+1}$ und y_{n+1} zeigt der Werth ∞ eine vollkommene Analogie mit den endlichen singulären Punkten. Das System der particulären Integrale wird erst durch die Hinzunahme der Grenze ∞ ein vollständiges.

II.

Die Integrale $y_{\nu,n+1}$ haben nur den Werth a_ν und den Werth ∞ zu Verzweigungspunkten; dieselben verhalten sich somit ganz analog den Integralen $y_{\mu,\nu}$, bei denen ebenfalls gerade die Grenzen a_μ und a_ν Verzweigungspunkte sind. Man weiss ferner, dass das Integral, dessen Grenzen a_ν und x sind, das mehrdeutige Hauptintegral des singulären Punktes a_ν darstellt; ebenso ergiebt sich y_{n+1}, welches ∞ und x zu Grenzen hat, als das n^{te} Hauptintegral für den singulären Werth ∞, welches bisher noch nicht in der Form eines bestimmten Integrals ermittelt worden war.

Ich habe bei dieser Gelegenheit eine irrthümliche Angabe zu berichtigen, welche im 3ten Abschnitt meiner Abhandlung über die hypergeometrischen Functionen im 71ten Bande dieses Journals vorkommt. Es wird daselbst ausgeführt, dass ein Integral y_ν endlich und eindeutig in der Umgebung eines singulären Punktes a_k sei, wenn k nicht gleich ν ist. Die Integrale y_ν sind jedoch bei allen singulären Punkten der Differentialgleichung mehrdeutig. Die im 71ten Bande, Seite 342, angestellte Betrachtung, der zufolge das Integral y_ν nach Umkreisung des Punktes a_k in einer unendlich kleinen Curve mit dem Anfangswerth zurückkehrt, enthält zwar nichts Unrichtiges, aber der Schluss ist falsch, dass hierdurch die Eindeutigkeit von y_ν bewiesen werde. Eine derartige Folgerung ist nur erlaubt, wenn die Dimensionen der geschlossenen Curve endlich sind, dagegen nicht, wenn dieselben unendlich klein sind. Als $n-1^{te}$ eindeutige Integrale treten vielmehr, wie gezeigt werden soll, die bestimmten Integrale mit unendlicher Grenze ein. In der erwähnten Abhandlung ist demgemäss der Text von den Worten „Für den Punkt a_k ist schliesslich“

auf Seite 342 bis zu den Worten „während y_k nach Division durch die Potenz $(x-a_k)^{b_k+\lambda-1}$ eindeutig und endlich wird“ auf Seite 343 zu streichen; alles Andere im Abschnitt III., so wie die übrigen Abschnitte I., II., IV., V sind unverändert beizubehalten *).

Um nachzuweisen, dass das Integral $y_{\nu,n+1}$ in der Umgebung eines beliebigen singulären Punktes a_k, ausgenommen für $k=\nu$, eindeutig und endlich ist, theilt man dasselbe in zwei bestimmte Integrale mit den Grenzen a_ν, p und p, ∞, wo p eine endliche grosse Zahl bedeuten möge. Sodann lässt man die Variable x eine geschlossene Curve um den Punkt a_k beschreiben; man setzt $x=a_k+x'$, wo der Modul von x' klein, jedoch eine endliche Grösse sein möge. In dem ersten Integral

$$\int_{a_\nu}^{p}(u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\dots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x)^{\lambda-1}du$$

umschliesst, bei passender Wahl des Integrationsweges, die Curve von $u-x$

---

*) Wie ich inzwischen aus dem im October dieses Jahres ausgegebenen dritten Hefte des 72ten Bandes dieses Journals (S. 260) ersehen habe, macht Herr *L. Fuchs* in dem von ihm veröffentlichten Aufsatz (*L. Fuchs* „Bemerkungen zu der Abhandlung über hypergeometrische Functionen etc.“ Bd. 72, S. 255—262) darauf aufmerksam, dass die Integrale mit der Grenze x an keinem der singulären Punkte eindeutig sein können.

Herr *Fuchs* erörtert ausserdem noch einige andere Punkte, auf die ich näher einzugehen habe. Die Ausführungen desselben auf S. 256—258 beruhen auf einem Missverständniss. Es hat mir durchaus fern gelegen, zu behaupten, dass die angestellten Betrachtungen auch ohne Weiteres auf den Fall, wo die Grössen $b_1+\lambda$, $b_2+\lambda$ etc. ganzzahlig sind, wo also die Mehrdeutigkeit der n^{ten} Integrale verschwinden würde, auszudehnen sind. Es findet hier dasselbe statt, wie bei dem *Gauss*schen Integral für die Gleichung zweiter Ordnung

$$C_1F(\alpha,\beta,\gamma,x)+C_2x^{1-\gamma}F(1+\alpha-\gamma,1+\beta-\gamma,2-\gamma,x),$$

welches illusorisch wird, sobald γ eine positive oder negative ganze Zahl ist. In meiner Abhandlung bedeuten die Summen $b_1+\lambda$, $b_2+\lambda$ etc. überall Zahlen, welche nicht ganzzahlig sind. Es werden daselbst die n^{ten} Integrale durchweg als mehrdeutige bezeichnet (d. Einleitung, S. 325 und a. a. O.) und von den übrigen Integralen, welche ein unter sich gleichartiges Verhalten zeigen, unterschieden (S. 322 und S. 344, wo das n^{te} Integral ausdrücklich als „alleinstehend“ bezeichnet wird); ferner ist die für y_1 gegebene Reihe auf S. 347 illusorisch, sobald $b_1+\lambda$ eine ganze negative Zahl ist, und es wird (S. 336) noch besonders die Analogie mit den Gamma-Functionen erwähnt. — Uebrigens war diese Frage bereits erledigt durch das für den Fall $\alpha=\beta$ existirende logarithmische Integral der hypergeometrischen Differentialgleichung zweiter Ordnung (S. den *Spitzer*schen Aufsatz im 57ten Bande dieses Journals S. 78 und die von Herrn *Borchardt* hinzugefügte Bemerkung ebendaselbst S. 81). Auch kann ich mich auf meine inzwischen in diesem Journal erschienene, der Redaction im Monat August übersandte Abhandlung „Ueber die einfachen singulären Punkte etc.“ beziehen, in welcher gerade auf die logarithmischen Integrale dieser Ausnahmefälle näher eingegangen wird. — Herr *Fuchs* erklärt es sodann auf S. 259 für unzulässig, dass ich

oder $u-a_k-x'$ den Nullpunkt jedenfalls nicht, weil alle Werthe des u zwischen a_ν und p um endliche Grössen von a_k verschieden bleiben. Das zweite Integral verwandelt sich durch die Substitution $u=\frac{1}{v}$ in

$$\int_0^{\frac{1}{p}} v^{n-s-1}(1-a_1v)^{b_1-1}\dots(1-a_nv)^{b_n-1}(1-xv)^{\lambda-1}dv;$$

da aber v hier nur sehr kleine Werthe annimmt, so liegt die ganze Curve von $1-xv$ stets in der Nähe des Punktes 1, so dass der Nullpunkt sich ausserhalb derselben befindet. Aus dem Umstand, dass man eine endliche Function zwischen endlichen Grenzen zu integriren hat — worin, nach der angeführten Reduction, auch der Fall, dass die reellen Theile von b_ν und $n-s$ positive ächte Brüche sind, einzubegreifen ist — ergiebt sich dann der Schluss, dass $y_{\nu,n+1}$ in der Umgebung von a_k eindeutig und endlich ist.

In y_{n+1} setze man $u=\frac{x}{v}$, wodurch man erhält:

$$y_{n+1} = x^{s-n}\int_0^1 v^{n-s-1}(1-v)^{\lambda-1}\left(1-\frac{a_1v}{x}\right)^{b_1-1}\left(1-\frac{a_2v}{x}\right)^{b_2-1}\dots\left(1-\frac{a_nv}{x}\right)^{b_n-1}dv.$$

---

die Eindeutigkeit und Endlichkeit eines bestimmten Integrals mit endlichen Grenzen aus der Eindeutigkeit und Endlichkeit seiner sämmtlichen Elemente auf dem betrachteten Flächengebiet (Bd. 71, S. 341) folgere. Ich glaube indessen diese Methode in jeder Beziehung aufrecht erhalten zu können. Das von Herrn *Fuchs* zum Beweise seiner Ansicht angeführte Beispiel, $\int_0^1 \frac{du}{u-x}$, ist nicht zutreffend, da die Elemente des Integrals, welche den Werthen $u=0$ und $u=1$ entsprechen, auf dem die Punkte $x=0$ und $x=1$ enthaltenden Theile der x-Ebene der Bedingung, überall endlich zu sein, nicht genügen.

In der interessanten Abhandlung des Herrn *Tissot*: Sur un déterminant d'intégrales définies (Journal de M. *Liouville* t. 17, année 1852), die ich erst in Folge der seitens des Herrn *Fuchs* geschehenen Erwähnung kennen gelernt habe, beschäftigt sich Herr *Tissot* mit bestimmten Integralen, welche allerdings mit den von mir behandelten verwandt sind (und zwar in ähnlicher Weise wie die zweite Gattung der *Euler*schen Integrale mit der ersten), welche aber nicht mit denselben zusammenfallen. Hieraus erscheint es schon von vorn herein unwahrscheinlich, dass die von Herrn *Fuchs* behauptete Identität der Differentialgleichung des Herrn *Tissot* mit der meinigen stattfinden sollte. Um die linke Seite der *Tissot*schen in den vollständigen Differentialquotienten der linken Seite meiner Differentialgleichung zu verwandeln, hat in der That Herr *Fuchs* die *Tissot*sche Function $\varphi(u)$ durch $e^{-u}\varphi(u)$ ersetzen müssen. Da aber die Bezeichnung $\varphi(u)$ von Herrn *Tissot* lediglich für das Product

$$(u-a)^m(u-a_1)^{m_1}\dots(u-a_n)^{m_n}$$

eingeführt ist, so widerspricht die *Fuchs*sche Substitution den Voraussetzungen des Herrn *Tissot*, und hat also Herr *Fuchs* zu meiner Differentialgleichung selbst mit Hülfe einer Integration und unter Annullirung der willkürlichen Constante nicht gelangen können, ohne für die *Tissot*sche Differentialgleichung vorher eine wesentlich davon verschiedene gesetzt zu haben.

Beschreibt nun x eine geschlossene Curve von sehr grossem Modul, welche die singulären Punkte $a_1, \dots a_n$ einschliesst, so bleiben die entsprechenden Curven von $1-\frac{a_1 v}{x}, \dots 1-\frac{a_n v}{x}$ sämmtlich in der Nähe des Punktes 1, so dass die Potenzen $\left(1-\frac{a_1 v}{x}\right)^{b_1-1}, \dots \left(1-\frac{a_n v}{x}\right)^{b_n-1}$ einen eindeutigen Werth behalten. Dies zeigt, dass das bestimmte Integral mit den Grenzen 0 und 1 für grosse Werthe von x eindeutig und endlich ist. Das Product $x^{n-s} y_{n+1}$ lässt sich daher in eine convergente, nach fallenden Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickeln, woraus folgt, dass y_{n+1} das n^{te} Hauptintegral für den singulären Werth ∞ ist.

Die Reihenentwicklungen der verschiedenen partikulären Integrale sollen durch hypergeometrische Reihen höherer Ordnung ausgedrückt werden. Für y_{n+1} ergiebt sich unmittelbar ein Ausdruck durch eine hypergeometrische Reihe n^{ter} Ordnung, wenn man

$$u = a_\nu + \frac{x-a_\nu}{v}$$

substituirt; a_ν bezeichnet einen beliebigen der singulären Punkte $a_1, \dots a_n$. Man findet mit Hülfe von (3.) die Gleichung

$$(6.)\quad \begin{cases} y_{n+1} = \\ \frac{\Gamma(\sigma)\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\sigma+\lambda)}(x-a_\nu)^{-\sigma} F_n\begin{pmatrix} 0, & \frac{1}{a_1-a_\nu}, & \dots & \frac{1}{a_{\nu-1}-a_\nu}, & \frac{1}{a_{\nu+1}-a_\nu}, & \dots & \frac{1}{a_n-a_\nu}, & \frac{1}{x-a_\nu} \\ \sigma, & b_1, & \dots & b_{\nu-1}, & b_{\nu+1}, & \dots & b_n, & \lambda \end{pmatrix}, \end{cases}$$

in welcher

$$\sigma = n-s = n-(b_1+b_2+\cdots+b_n+\lambda)$$

gesetzt ist. Die Reihe ist convergent, wenn mod. $\frac{1}{x-a_\nu}$ kleiner als mod. $\frac{1}{a_1-a_\nu}, \dots$ mod. $\frac{1}{a_n-a_\nu}$ ist, wenn also x ausserhalb des um a_ν geschlagenen Kreises liegt, dessen Radius gleich dem Abstande des Punktes a_ν von dem entferntesten der übrigen $n-1$ singulären Punkte ist.

Diejenigen partikulären Integrale, welche zwei constante Grenzen haben, geben, wie gezeigt wurde, Reihenentwicklungen, deren Coefficienten wieder hypergeometrische Integrale der $n-1^{ten}$ Ordnung mit constantem Argument enthalten. Es soll auf die Darstellung dieser letzteren durch die Functionen F_{n-1} näher eingegangen werden. Der Einfachheit halber wähle man das Gebiet des singulären Punktes a_1 aus und entwickle nach Potenzen von $x-a_1$. Dann sind alle Integrale $y_{\mu,\nu}$, bei denen weder μ noch ν gleich 1 ist, nach

steigenden Potenzen von $x-a_1$ entwickelbar. Man hat die Integrale mit unendlicher Grenze von denen, welche zwei endliche constante Grenzen haben, zu unterscheiden. Von den letzteren wird $y_{2,3}$, von den ersteren $y_{n,n+1}$ behandelt werden; die übrigen werden durch Vertauschung von a_2, a_3, a_n mit den andern singulären Punkten erhalten.

Wenn man das Integral $y_{2,3}$ auf die Grenzen 0 und 1 bringt und in der hieraus folgenden Gleichung

$$\frac{y_{2,3}}{(a_2-a_1)^{\lambda-1}(a_3-a_2)^{b_2}K_2} =$$
$$\int_0^1 v^{b_2-1}(1-v)^{b_3-1}\left(1-\frac{a_3-a_2}{a_1-a_2}v\right)^{b_1-1}\left(1-\frac{a_3-a_2}{a_4-a_2}v\right)^{b_4-1}\cdots$$
$$\cdots\left(1-\frac{a_3-a_2}{a_n-a_2}v\right)^{b_n-1}\left(1-\frac{a_3-a_2}{a_1-a_2}v-\frac{x-a_1}{a_2-a_1}\right)^{\lambda-1}dv$$

den binomischen Satz auf den letzten Factor der zwischen 0 und 1 zu integrirenden Function anwendet, so lassen sich die in den Coefficienten der Reihe auftretenden bestimmten Integrale in Folge der Gleichung (3.) durch Functionen F_{n-1} ersetzen. Man gelangt auf diese Weise zu der Gleichung:

$$(7.)\quad \begin{cases} \dfrac{\Gamma(b_2+b_3)}{(a_2-a_1)^{\lambda-1}(a_3-a_2)^{b_2}K_2\,\Gamma(b_2)\Gamma(b_3)}y_{2,3} \\ = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\lambda-1)_k\left(\dfrac{x-a_1}{a_2-a_1}\right)^k F_{n-1}\begin{pmatrix}0, & a_1-a_2, & a_4-a_2, \dots & a_n-a_2, & a_3-a_2 \\ b_2, & b_1+\lambda-k-1, & b_4, \quad \dots & b_n, & b_3\end{pmatrix}. \end{cases}$$

Die in der Summe enthaltenen hypergeometrischen Reihen F_{n-1} sind sämmtlich convergent, sobald mod. (a_3-a_2) kleiner als mod. (a_1-a_2), mod. (a_4-a_2), ... mod. (a_n-a_2) ist, sobald also der Punkt a_3 näher an a_2 liegt, als irgend ein anderer singulärer Punkt. Um die Gleichungen (7.) anwenden zu können, hat man daher zwei benachbarte singuläre Punkte zu Grenzen des bestimmten Integrals zu nehmen.

Hat eine der Differenzen a_1-a_2, a_4-a_2, ... a_n-a_2, z. B. die Differenz a_1-a_2, einen kleineren Modul als a_3-a_2, so ist der binomische Satz zweimal anzuwenden, indem auch die Potenz von

$$1-\frac{a_3-a_2}{a_1-a_2}v \quad \text{oder} \quad \frac{a_4-a_2}{a_1-a_2}\left(1-\frac{a_3-a_2}{a_4-a_2}v-\frac{a_1-a_4}{a_2-a_4}\right)$$

entwickelt werden muss. Dann kommt in dem Coefficienten jeder Potenz von $x-a_1$ eine unendliche Summe von Functionen F_{n-2} vor. Man findet in diesem Fall an Stelle von (7.) die Gleichung

$$(8.)\qquad \frac{\Gamma(b_2+b_3)}{(a_2-a_1)^{\lambda-1}(a_3-a_2)^{b_3}K_2\,\Gamma(b_2)\Gamma(b_3)}\left(\frac{a_1-a_2}{a_4-a_2}\right)^{b_1+\lambda-2} y_{2,3} =$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\begin{array}{l}(-1)^k(\lambda-1)_k\left(\dfrac{x-a_1}{a_2-a_4}\right)^k\times \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i(b_1+\lambda-k-2)_i\left(\frac{a_1-a_4}{a_2-a_4}\right)^i F_{n-2}\begin{pmatrix}0, & a_4-a_2, & a_5-a_2,\dots a_n-a_2, & a_3-a_2\\ b_2, & b_1+b_4+\lambda-k-i-3, & b_5,\ \dots\ b_n, & b_3\end{pmatrix},\end{array}\right.$$

in welcher die Reihen F_{n-2} convergent sind, da in dem Argument derselben die Differenz a_1-a_2, deren Modul kleiner als mod.(a_3-a_2) sein sollte, nicht mehr vorkommt. — Man bemerke, dass für die dritte Ordnung, wo kein Werth a_4 existirt, an Stelle des letzteren eine beliebig bleibende Constante zu setzen ist; es ergiebt sich alsdann eine Doppelsumme von *Gauss*schen Reihen.

Ist a_1-a_2 nicht die einzige der Differenzen $a_1-a_2,\ a_4-a_2,\ \dots\ a_n-a_2$, deren Modul kleiner als mod.(a_3-a_2) ist, so ist eine wiederholte Anwendung des binomischen Satzes erforderlich.

Aehnlich wie $y_{2,3}$ lassen sich die Integrale $y_{\nu,n+1}$ durch hypergeometrische Reihen $n-1^{ter}$ Ordnung ausdrücken. In

$$y_{n,n+1} = \int_{a_n}^{\infty}(u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\dots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x)^{\lambda-1}du$$

setze man $u = a_1+\dfrac{a_n-a_1}{v}$ und entwickele die Potenz, welche x enthält, nach dem binomischen Satz. Nach Einführung der Functionen F_{n-1} vermittelst der Gleichung (3.) und nach einer Reduction der dabei auftretenden Gamma-Functionen ergiebt sich, wenn

$$\sigma = n-(b_1+b_2+\dots+b_n+\lambda)$$

genannt wird, die Gleichung:

$$(9.)\quad\left\{\begin{array}{c}\dfrac{(a_n-a_1)^{\sigma}\Gamma(\sigma+b_n)}{\Gamma(\sigma)\Gamma(b_n)}\,y_{n,n+1} = \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(\lambda-1)_k(\sigma+k-1)_k}{(\sigma+b_n+k-1)_k}\left(\frac{x-a_1}{a_n-a_1}\right)^k F_{n-1}\begin{pmatrix}0, & \dfrac{1}{a_2-a_1}, & \dots & \dfrac{1}{a_{n-1}-a_1}, & \dfrac{1}{a_n-a_1}\\ \sigma+k, & b_2, & \dots & b_{n-1}, & b_n\end{pmatrix}.\end{array}\right.$$

In derselben haben die Functionen F_{n-1} einen völlig bestimmten Sinn, sobald mod. $\dfrac{1}{a_n-a_1}$ kleiner als mod. $\dfrac{1}{a_2-a_1}$, ... mod. $\dfrac{1}{a_{n-1}-a_1}$, oder also, sobald mod.(a_n-a_1) grösser als mod.(a_2-a_1), ... mod.$(a_{n-1}-a_1)$ ist. Dies zeigt, dass die Gleichung (9.) direct anwendbar ist, wenn a_n der von a_1 am entferntesten liegende singuläre Punkt ist. Ist a_n ein anderer Punkt, so hat man, wie bei $y_{2,3}$, den binomischen Satz wiederholt anzuwenden und erhält dann mehrfach unendliche Summen von Functionen F.

Es wurde bewiesen, dass alle Integrale, welche zwei der Constanten $a_1, a_2, \dots a_n$ zu Grenzen haben, nach Division mit $x^{\lambda-1}$ für grosse Werthe des x in eine convergente, nach fallenden Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickelbar sind. Das Gleiche gilt, wenn man x um eine Constante verringert; es sollen hier die Reihenentwicklungen dieser Integrale nach fallenden Potenzen von $x-a_\nu$, als die einfachsten, hergestellt werden. Wählt man das Integral $y_{1,2}$ aus, so ist einerseits die Entwicklung desselben nach fallenden Potenzen von $x-a_1$ oder $x-a_2$, andererseits die nach fallenden Potenzen von $x-a_3$, wo a_3 einen beliebigen der andern singulären Punkte bedeutet, abzuleiten. In ganz analoger Weise wie bei den Formeln (7.) und (9.) gelangt man zu den beiden Gleichungen:

$$(10.)\quad \begin{cases} \dfrac{\Gamma(b_1+b_2)}{(-1)^{\lambda-1}(a_2-a_1)^{b_1}K_1\,\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)}\,\dfrac{y_{1,2}}{(x-a_1)^{\lambda-1}} = \\ \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\dfrac{(\lambda-1)_k(b_1+k-1)_k}{(b_1+b_2+k-1)_k}\left(\dfrac{a_2-a_1}{x-a_1}\right)^k F_{n-1}\begin{pmatrix}0, & a_3-a_1, & \dots & a_n-a_1, & a_2-a_1\\ b_1+k, & b_3, & \dots & b_n, & b_2\end{pmatrix}\end{cases}$$

und:

$$(.11)\quad \begin{cases} \dfrac{\Gamma(b_1+b_2)}{(-1)^{\lambda-1}(a_2-a_1)^{b_1}K_1\,\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)}\,\dfrac{y_{1,2}}{(x-a_3)^{\lambda-1}} = \\ \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\lambda-1)_k\left(\dfrac{a_1-a_3}{x-a_3}\right)^k F_{n-1}\begin{pmatrix}0, & a_3-a_1, & a_4-a_1, & \dots & a_n-a_1, & a_2-a_1\\ b_1, & b_3+k, & b_4, & \dots & b_n, & b_2\end{pmatrix}.\end{cases}$$

Die Functionen F_{n-1} in (10.) und (11.) haben sämmtlich einen vollständig bestimmten Sinn, sobald a_1 näher an a_2 liegt, als irgend ein anderer singulärer Punkt.

III.

Aus der Definition der hypergeometrischen Functionen durch die Unstetigkeits- und Verzweigungs-Bedingungen ergiebt sich unmittelbar, dass gewisse Producte aus einer hypergeometrischen Function und einer Potenz wieder hypergeometrische Functionen sind. Nennt man

$$\frac{px-q}{x-a_\mu} = x', \quad \frac{pa_\nu-q}{a_\nu-a_\mu} = a'_\nu, \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, \dots \mu-1, \mu+1, \dots n,$$

so besteht die Gleichung

$$(12.)\quad \begin{cases} H_n\begin{pmatrix}a_1, & a_2, & \dots & a_{\mu-1}, & a_\mu, & a_{\mu+1}, & \dots & a_n, & x\\ b_1, & b_2, & \dots & b_{\mu-1}, & b_\mu, & b_{\mu+1}, & \dots & b_n, & \lambda\end{pmatrix} = \\ (x-a_\mu)^{\lambda-1}H_n\begin{pmatrix}a'_1, & a'_2, & \dots & a'_{\mu-1}, & p, & a'_{\mu+1}, & \dots & a'_n, & x'\\ b_1, & b_2, & \dots & b_{\mu-1}, & \sigma, & b_{\mu+1}, & \dots & b_n, & \lambda\end{pmatrix},\end{cases}$$

in welcher σ für $n-(b_1+b_2+\cdots+b_n+\lambda)$ gesetzt, und $\frac{q}{p}$ als verschieden von a_μ angenommen ist.

Zum Beweise dieser Gleichung betrachtet man die Verzweigung des auf der rechten Seite stehenden Productes.

Die hypergeometrische Function, welche den zweiten Factor desselben bildet, hat erstens die Punkte $x'=a'_1, a'_2, \ldots a'_{\mu-1}, a'_{\mu+1}, \ldots a'_n$ oder $x=a_1, a_2, \ldots a_{\mu-1}, a_{\mu+1}, \ldots a_n$ zu singulären Punkten, mit den Argumenten der unteren Reihe $b_1, b_2, \ldots b_{\mu-1}, b_{\mu+1}, \ldots b_n$. Der Werth $x'=p$ giebt ferner den Werth $x=\infty$, und $x'=\infty$ den Werth $x=a_\mu$. Da endlich auch $(x-a_\mu)^{\lambda-1}$ sich nur für $x=a_\mu$ und $x=\infty$ verzweigt, so haben die rechte und die linke Seite von (12.) genau dieselben Verzweigungspunkte.

Für $x'=\infty$ hat die zweite hypergeometrische Function $n-1$ particuläre Integrale, welche nach Division mit der $\lambda-1^{\text{ten}}$ Potenz von x', oder also nach Multiplication mit $\left(\frac{x-a_\mu}{px-q}\right)^{\lambda-1}$, in eine convergente, nach fallenden Potenzen von x' fortschreitende Reihe entwickelbar sind. Da nun $(px-q)^{\lambda-1}$ in der Umgebung des Punktes $x=a_\mu$ monodrom ist, und die fallenden Potenzen von x' steigende Potenzen von $x-a_\mu$ sind, so enthält das Product

$$(x-a_\mu)^{\lambda-1}H_n\begin{pmatrix} a'_1, & a'_2, & \ldots & a'_{\mu-1}, & p, & a'_{\mu+1}, & \ldots & a'_n, & x' \\ b_1, & b_2, & \ldots & b_{\mu-1}, & \sigma, & b_{\mu+1}, & \ldots & b_n, & \lambda \end{pmatrix}$$

$n-1$ Functionen, welche in der Umgebung des Punktes $x=a_\mu$ stetig und eindeutig sind. Das n^{te} Integral von $H_n(x')$ für grosse Werthe von x' hat (Bd. 71, S. 344) den Exponenten

$$b_1+b_2+\cdots+b_{\mu-1}+\sigma+b_{\mu+1}+\cdots+b_n+\lambda-n,$$
$$= -b_\mu,$$

in Bezug auf x', oder also den Exponenten $+b_\mu$ in Bezug auf $x-a_\mu$, so dass sich für das Product $(x-a_\mu)^{\lambda-1}H_n(x')$ der Exponent $b_\mu+\lambda-1$ ergiebt. Dies zeigt, dass das Product $(x-a_\mu)^{\lambda-1}H_n(x')$ sich in der Umgebung des Punktes a_μ grade so verhält, wie die Function $H_n(x)$.

Da ferner im Gebiete des Punktes $x'=p$, oder $x=\infty$, die Function $H_n(x')$ $n-1$ eindeutige und endliche Integrale enthält, so kommen in dem Product $(x-a_\mu)^{\lambda-1}H_n(x')$, ebenso wie in $H_n(x)$, $n-1$ Functionen, welche durch Division mit $x^{\lambda-1}$ nach fallenden ganzen Potenzen von x entwickelbar werden, vor, woraus dann auch die Uebereinstimmung des n^{ten} Exponenten für $x=\infty$ folgt.

Es ist somit bewiesen, dass beide Seiten der Gleichung (12.) die gleichen Unstetigkeitspunkte haben, und dass in der Umgebung der letzteren auch die rechte

Seite genau diejenigen Eigenschaften besitzt, durch welche die auf der linken Seite stehende hypergeometrische Function definirt wurde. Hieraus folgt aber die Identität der beiden Ausdrücke. Controllirt man das gewonnene Resultat, indem man in der Gleichung (1.)

$$y = (x-a_\mu)^{\lambda-1}\eta, \quad \frac{px-q}{x-a_\mu} = x' \quad \text{oder} \quad x = \frac{a_\mu x'-q}{x'-p}$$

substituirt, so erhält man als Gleichung zwischen η und x' in der That eine hypergeometrische Differentialgleichung.

Die Betrachtungen, welche die Grenze ∞ als zulässig erwiesen, sind im Grunde gleichbedeutend mit der Gleichung (12.), da die Ausdrücke der rechten Seite von (12.) auf die bestimmten Integrale mit unendlicher Grenze zurückkommen. Man benutzt hier die Gleichung (12.) auch nur, um die Existenz der Relationen allgemein zu beweisen. Zur Herstellung der Relationen selbst wird im Folgenden an die Gleichungen (6.) bis (11.) angeknüpft.

Der Umstand, dass y_{n+1}, das bestimmte Integral mit den Grenzen x und ∞, nach fallenden Potenzen sowohl von $x-a_1$ als von $x-a_2, \ldots x-a_n$ entwickelbar ist, führt unmittelbar zu einer Gleichung zwischen zwei hypergeometrischen Reihen n^{ter} Ordnung. Nimmt man in (6.) für a_ν nacheinander zwei verschiedene Werthe, z. B. a_1 und a_2, so folgt:

$$\frac{\Gamma(\sigma)\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\sigma+\lambda)}(x-a_1)^{-\sigma}F_n\begin{pmatrix}0, & \frac{1}{a_2-a_1}, & \frac{1}{a_3-a_1}, & \ldots & \frac{1}{a_n-a_1}, & \frac{1}{x-a_1} \\ \sigma, & b_2, & b_3, & \ldots & b_n, & \lambda\end{pmatrix} =$$

$$\frac{\Gamma(\sigma)\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\sigma+\lambda)}(x-a_2)^{-\sigma}F_n\begin{pmatrix}0, & \frac{1}{a_1-a_2}, & \frac{1}{a_3-a_2}, & \ldots & \frac{1}{a_n-a_2}, & \frac{1}{x-a_2} \\ \sigma, & b_1, & b_3, & \ldots & b_n, & \lambda\end{pmatrix}.$$

Man wählt für diese Gleichung andere Buchstaben, indem man

$$\frac{1}{x-a_1} = \xi, \quad \frac{1}{a_{\nu+1}-a_1} = \alpha_\nu, \quad b_{\nu+1} = \beta_\nu, \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, \ldots n-1,$$

setzt, und den Satz anwendet, dass die Multiplication der oberen Argumentenreihe mit einer und derselben Grösse den Werth von F_n nicht ändert. Man erhält dann die Gleichung

$$(13.)\quad \begin{cases} F_n\begin{pmatrix}0, & \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots & \alpha_{n-1}, & \xi \\ \varepsilon, & \beta_1, & \beta_2, & \ldots & \beta_{n-1}, & \lambda\end{pmatrix} = \\ \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1-\xi}\right)^{\varepsilon}F_n\begin{pmatrix}0, & 1, & \frac{\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1}, & \frac{\alpha_3}{\alpha_3-\alpha_1}, & \ldots & \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_{n-1}-\alpha_1}, & \frac{\xi}{\xi-\alpha_1} \\ \varepsilon, & \tau, & \beta_2, & \beta_3, & \ldots & \beta_{n-1}, & \lambda\end{pmatrix}, \end{cases}$$

worin

$$\tau = n-(\varepsilon+\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_{n-1}+\lambda)$$

gesetzt ist, die Constanten ε, λ, α_1, β_1, ... α_{n-1}, β_{n-1} aber unbeschränkt bleiben. Wegen der Symmetrie der linken Seite in Bezug auf (α_1, β_1), (α_2, β_2), ... $(\alpha_{n-1}, \beta_{n-1})$ kann auf der rechten Seite an Stelle von α_1 jede der Grössen α_2, ... α_n eingeführt werden. Für $n=2$ ergiebt sich aus (13.) die Gleichung

$$F_2\begin{pmatrix}0, & 1, & \xi\\ \varepsilon, & \beta_1, & \lambda\end{pmatrix} = (1-\xi)^{-\varepsilon}F_2\begin{pmatrix}0, & 1, & \dfrac{\xi}{\xi-1}\\ \varepsilon, & 2-\varepsilon-\beta_1-\lambda, & \lambda\end{pmatrix}$$

oder, wenn die *Gauss*sche Bezeichnung angewendet, und $\varepsilon = p$, $1-\beta_1 = q$, $\varepsilon+\lambda = r$ genommen wird, die folgende

$$F(p, q, r, \xi) = (1-\xi)^{-p}F\left(p, r-q, r, \frac{\xi}{\xi-1}\right),$$

welche als wichtige Relation in der Theorie der *Gauss*schen Reihe bekannt ist*).

An die Gleichung (13.) schliesst sich zunächst eine Relation an, welche sich auf den Fall, dass an Stelle von ξ eine Constante steht, bezieht. Da das Integral

$$\int_{a_1}^{a_{n+1}}(u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\dots(u-a_n)^{b_n-1}(u-a_{n+1})^{b_{n+1}-1}du$$

in doppelter Weise auf die Grenzen 0 und 1 gebracht werden kann, je nachdem man die untere oder die obere Grenze gleich Null macht, so entstehen zwei Entwicklungen für das Integral. Die hieraus folgende Gleichung lautet in den eingeführten Bezeichnungen:

$$(14.)\quad\left\{\begin{aligned}&F_n\begin{pmatrix}0, & \alpha_1, & \alpha_2, & \dots & \alpha_{n-1}, & 1\\ \varepsilon, & \beta_1, & \beta_2, & \dots & \beta_{n-1}, & \lambda\end{pmatrix} =\\ &\left(1-\frac{1}{\alpha_1}\right)^{\beta_1-1}\left(1-\frac{1}{\alpha_2}\right)^{\beta_2-1}\dots\left(1-\frac{1}{\alpha_{n-1}}\right)^{\beta_{n-1}-1}F_n\begin{pmatrix}0, & 1-\alpha_1, & 1-\alpha_2, & \dots & 1-\alpha_{n-1}, & 1\\ \lambda, & \beta_1, & \beta_2, & \dots & \beta_{n-1}, & \varepsilon\end{pmatrix}.\end{aligned}\right.$$

In den Reihenentwicklungen der Integrale $y_{\mu,\nu}$ sind die Coefficienten gleich Integralen der $n-1^{ten}$ Ordnung mit constantem Argument; die Relationen zwischen zwei Integralen $y_{\mu,\nu}$ führen daher stets zu Gleichungen, welche auf beiden Seiten unendliche Summen aus hypergeometrischen Reihen enthalten. Ebenso wie die Gleichung (13.) aus dem Ausdruck von y_{n+1} folgte, gewinnt man eine Anzahl von andern Relationen aus den verschiedenen Entwicklungen,

---

*) Siehe die Abhandlung des Herrn *Kummer* „Ueber die hypergeometrische Reihe", dieses Journal, Bd. 15, S. 54 und 55.

welche sich für ein und dasselbe Integral durch die Gleichungen (7.) bis (11.) ergeben.

In der Gleichung (10.), welche die Entwicklung von $y_{1,2}$ nach fallenden Potenzen von $x-a_1$ angiebt, ändert die Vertauschung von a_1, b_1 mit a_2, b_2 das Integral $y_{1,2}$ nur in Bezug auf das Vorzeichen, da $y_{2,1}=-y_{1,2}$ ist. Man findet somit eine nach fallenden Potenzen von $x-a_1$ fortschreitende Reihe gleich einer andern, welche die fallenden Potenzen von $x-a_2$ enthält. Indem man $\frac{a_1-a_2}{x-a_2}=\xi$ setzt, die andern Benennungen entsprechend wählt und die Relation (14.) benutzt, gelangt man zu der Gleichung:

$$(15.)\left\{\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(\lambda-1)_k(\gamma+k-1)_k}{(\varepsilon+\gamma+k-1)_k}\xi^k F_{n-1}\begin{pmatrix}0, & \alpha_1, & \alpha_2, & \dots & \alpha_{n-2}, & 1\\ \varepsilon, & \beta_1, & \beta_2, & \dots & \beta_{n-2}, & \gamma+k\end{pmatrix} = \\ &(1-\xi)^{\lambda-1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(\lambda-1)_k(\varepsilon+k-1)_k}{(\gamma+\varepsilon+k-1)_k}\left(\frac{\xi}{\xi-1}\right)^k F_{n-1}\begin{pmatrix}0, & \alpha_1, & \alpha_2, & \dots & \alpha_{n-2}, & 1\\ \varepsilon+k, & \beta_1, & \beta_2, & \dots & \beta_{n-2}, & \gamma\end{pmatrix}.\end{aligned}\right.$$

Die Constanten λ, ε, γ, α_1, β_1, $\dots$ α_{n-2}, β_{n-2} sind beliebig, nur dass der Modul der Grössen α_1, $\dots$ α_{n-2} nicht grösser als 1, und $\varepsilon+\gamma$ keine ganze negative Zahl oder Null sein darf, da sonst die Functionen F_{n-1} keinen Sinn haben. — Für $n=2$ wird, da die Reihe F_1 sich auf die Constante 1 reducirt, die Gleichung (15.) ebenfalls mit der vorerwähnten Gleichung

$$F(p,q,r,\xi) = (1-\xi)^{-p}F\left(p,r-q,r,\frac{\xi}{\xi-1}\right)$$

identisch.

In ganz derselben Weise führt die gleichzeitige Benutzung der in (10.) und (11.) dargestellten Entwicklungen von $y_{1,2}$ zu der Gleichung

$$(16.)\left\{\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\lambda-1)_k\xi^k F_{n-1}\begin{pmatrix}0, & 1, & \alpha_1, & \alpha_2, & \dots & \alpha_{n-3}, & \alpha\\ \varepsilon, & \beta+k, & \beta_1, & \beta_2, & \dots & \beta_{n-3}, & \gamma\end{pmatrix} = \\ &(1-\xi)^{\lambda-1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(\lambda-1)_k(\varepsilon+k-1)_k}{(\gamma+\varepsilon+k-1)_k}\left(\frac{\alpha\xi}{\xi-1}\right)^k F_{n-1}\begin{pmatrix}0, & 1, & \alpha_1, & \alpha_2, & \dots & \alpha_{n-3}, & \alpha\\ \varepsilon+k, & \beta, & \beta_1, & \beta_2, & \dots & \beta_{n-3}, & \gamma\end{pmatrix},\end{aligned}\right.$$

in welcher die vorkommenden Constanten λ, ε, γ, α, α_1, $\dots$ α_{n-3}, β, β_1, $\dots$ β_{n-3} wieder nur der einen Bedingung, dass die Functionen F_{n-1} einen Sinn haben, unterworfen sind.

Die Integrale $y_{\nu,n+1}$ lassen sich nach steigenden Potenzen von $x-a_1$, $x-a_2$, $\dots$ $x-a_{\nu-1}$, $x-a_{\nu+1}$, $\dots$ $x-a_n$ entwickeln. Es kann daher, wenn a_n nicht allein für a_1, sondern auch für a_2 etc. der entfernteste singuläre Punkt ist, a_1, b_1 in der Gleichung (9.) mit a_2, b_2 etc. vertauscht werden. Es folgt hieraus die Gleichung:

$$(17.)\quad \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(\lambda-1)_k(\varepsilon+k-1)_k}{(\gamma+\varepsilon+k-1)_k}\xi^k F_{n-1}\begin{pmatrix} 0, & 1, & \alpha_1, & \dots & \alpha_{n-3}, & \alpha \\ \varepsilon+k, & \beta, & \beta_1, & \dots & \beta_{n-3}, & \gamma \end{pmatrix} = \\ (1-\alpha)^{-\varepsilon}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(\lambda-1)_k(\varepsilon+k-1)_k}{(\gamma+\varepsilon+k-1)_k}\left(\frac{\xi-\alpha}{1-\alpha}\right)^k F_{n-1}\begin{pmatrix} 0, & 1, & \frac{\alpha_1}{\alpha_1-1}, & \dots & \frac{\alpha_{n-3}}{\alpha_{n-3}-1}, & \frac{\alpha}{\alpha-1} \\ \varepsilon+k, & \tau, & \beta_1, & \dots & \beta_{n-3}, & \gamma \end{pmatrix}, \end{cases}$$

worin

$$\tau = n-(\varepsilon+\beta+\beta_1+\dots+\beta_{n-3}+\gamma+\lambda)$$

gesetzt ist.

Endlich erhält man, von $n = 4$ an, auch für das Integral $y_{2,3}$ mehrere nach steigenden Potenzen fortschreitende Reihen, da dasselbe nicht allein nach $x-a_1$, sondern auch nach $x-a_4$, ... $x-a_n$ entwickelt werden kann. Vertauscht man in der Gleichung (7.) die Elemente a_1, b_1 mit a_4, b_4 und nennt $\frac{x-a_1}{a_2-a_1} = \xi$, $\frac{a_4-a_2}{a_1-a_2} = \alpha_1$, etc., so ergiebt sich die Gleichung:

$$(18.)\quad \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\lambda-1)_k\xi^k F_{n-1}\begin{pmatrix} 0, & 1, & \alpha_1, & \alpha_2, & \dots & \alpha_{n-3}, & \alpha \\ \varepsilon, & \beta+\lambda-k-1, & \beta_1, & \beta_2, & \dots & \beta_{n-3}, & \gamma \end{pmatrix} = \\ \alpha_1^{\lambda-1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\lambda-1)_k\left(\frac{\xi+\alpha_1-1}{\alpha_1}\right)^k F_{n-1}\begin{pmatrix} 0, & 1, & \alpha_1, & \alpha_2, & \dots & \alpha_{n-3}, & \alpha \\ \varepsilon; & \beta, & \beta_1+\lambda-k-1, & \beta_2, & \dots & \beta_{n-3}, & \gamma \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Bei den Gleichungen (17.) und (18.) besteht, wie bei den früheren, die Voraussetzung, dass in der oberen Argumentenreihe der Functionen F_{n-1} der Modul des letzten Elements kleiner als der aller übrigen Elemente sei, da die Reihen sonst divergiren. Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, so hat man die Gleichung (8.) und die analogen Gleichungen an Stelle der hier angewendeten zu Grunde zu legen; die hieraus folgenden, allerdings weniger einfachen Relationen behalten dann auch für die im Vorhergehenden ausgeschlossenen Fälle ihre vollständige Gültigkeit.

Da die partikulären Lösungen der Differentialgleichung (1.) durch bestimmte Integrale, bei denen die zu integrirende Function dieselbe ist, ausgedrückt sind, so ist eine directe Addition möglich, sobald zwei Integrale in einer Grenze übereinstimmen. Es folgen die Gleichungen:

$$y_{\mu,\nu} = y_{\mu,k}+y_{k,\nu},$$
$$y_{\mu,\nu} = y_{\mu,n+1}-y_{\nu,n+1},$$
$$y_{\mu,\nu} = y_{\mu,i}+y_{i,k}+y_{k,\nu},\ \text{etc.},$$

aus denen sich, mit Hülfe der Gleichungen (7.) bis (11.), Relationen zwischen verschiedenen Reihenentwicklungen ergeben. Es soll auf diese Gleichungen zwischen drei oder mehr partikulären Integralen hier nicht näher eingegangen

werden. [illegible] erforderlichen convergenten Reihenentwickelungen werden im Abschnitt II angegeben. Nur eine der zwischen $n-1$ Integralen bestehenden Relationen, welche für die Verzweigung der hypergeometrischen Function wesentlich ist, wird im Folgenden kurz behandelt werden.

IV

Wenn ein [illegible] hypergeometrisches Integral für einen bestimmten Werth von x gegeben ist, und die Variable x irgend eine zu dem Ausgangspunkt zurückkehrende Curve durchläuft, so entsteht die Frage, welches der schliessliche Werth des Integrals ist, wenn dasselbe längs der gegebenen Curve verfolgt wird. Die geschlossene Curve kann zunächst durch eine Anzahl [illegible] geschlossener Curven ersetzt werden, deren jede nur einen singulären Punkt enthält, so dass die Frage auf die Umkreisung eines einzelnen singulären Punktes zurückgeführt wird.

Die particulären Integrale von [illegible] zerfallen in drei Klassen: die Integrale [illegible], die übrigen Integrale [illegible] und die Integrale y_λ.

Die Integrale [illegible] haben nur je einen endlichen Verzweigungspunkt, nämlich den Punkt [illegible]; im ganzen übrigen endlichen Gebiet sind sie monodrom und stetig. In der Umgebung des betreffenden Punktes a_λ werden sie nicht durch Division mit einer Potenz von $x-a_\lambda$ eindeutig, gehören also nicht zu [illegible] des Punktes, sondern bestehen aus einem eindeutigen und einem mehrdeutigen Summanden. Den gleichen Charakter haben sie für den [illegible] Verzweigungspunkt $x=\infty$.

Die Integrale [illegible], bei denen λ und ν zwei Zahlen aus der Reihe [illegible] sind, haben je drei Verzweigungspunkte, a_λ, a_ν und ∞. Für den Punkt ∞ sind sie [illegible], da sie durch Division mit $x^{\lambda-1}$ eindeutig und endlich werden; im Bereich der beiden endlichen singulären Punkte enthalten sie [illegible] eindeutige als mehrdeutige Bestandtheile.

Die Integrale y_λ haben sämmtliche singuläre Punkte der Differentialgleichung [illegible] zu Verzweigungspunkten, werden aber nur in der Umgebung des einen Punktes a_λ durch Division mit einer Potenz eindeutig und endlich; [illegible] a_λ durch den Werth ∞ zu ersetzen.

Die Aufgabe, ein beliebiges hypergeometrisches Integral längs irgend einer geschlossenen Curve zu verfolgen, reducirt sich auf die Zerlegung der Integrale [illegible] in die eindeutigen und die mehrdeutigen Functionen, aus denen

sie in der Umgebung der einzelnen singulären Punkte bestehen. Denn in Folge der Gleichung

$$y_{\mu,\nu} = y_\mu - y_\nu$$

ergiebt sich das Verhalten von $y_{\mu,\nu}$ bei der Umkreisung von a_μ aus dem Verhalten von y_μ und y_ν; da aber y_μ nach Division mit $(x-a_\mu)^{b_\mu+\lambda-1}$ monodrom ist, so bleibt nur übrig, die Aenderungen zu bestimmen, welche y_ν bei Umkreisung des singulären Punktes a_μ erfährt.

Es soll beispielsweise das Integral y_2 in der Umgebung des Punktes a_1 behandelt werden. Der Einfachheit halber nehme man an, dass a_2 der nächstliegende Punkt an a_1, a_3 der nächstliegende an a_2, etc., a_n der nächstliegende an a_{n-1} sei, und dass a_n sowohl von a_1 als von a_2 entfernter liege, als die andern singulären Punkte. Dann sind im Vorhergehenden convergente, nach steigenden Potenzen von $x-a_1$ fortschreitende Reihenentwicklungen für die Integrale

$$y_1, \quad y_{2,3}, \quad y_{3,4}, \quad \dots \quad y_{n-1,n}, \quad y_{n,n+1}$$

angegeben worden. Diese n Integrale bilden zusammen das vollständige Integral von (1.); man hat also die Gleichung

$$y_2 = c_1 y_1 + c_2 y_{2,3} + c_3 y_{3,4} + \cdots + c_{n-1} y_{n-1,n} + c_n y_{n,n+1},$$

in welcher $c_1, c_2, \dots c_n$ Constanten bedeuten. Die am Eingange des Abschnittes gestellte Aufgabe ist somit auf die Auffindung der Werthe von c_1, $c_2, \dots c_n$ zurückgeführt.

Zur Bestimmung der Constanten sollen die Werthe $x = a_2$ und $x = a_1$ benutzt werden. Durch $n-2$malige Differentiation der Gleichung in Bezug auf x erhält man

$$y_2^{(\nu)} = c_1 y_1^{(\nu)} + c_2 y_{2,3}^{(\nu)} + c_3 y_{3,4}^{(\nu)} + \cdots + c_n y_{n,n+1}^{(\nu)}$$

für $\nu = 1, 2, \dots n-2$. Die Integrale $y_{\mu,\mu+1}$ von $\mu = 3$ an, so wie ihre Ableitungen, nehmen für $x = a_2$ Werthe an, welche unmittelbar aus den $n-1$ ersten Coefficienten der in (7.) und (9.) angegebenen Reihenentwicklungen erhalten werden, wenn man in diesen Gleichungen die Buchstaben a_1 und a_2 etc. mit einander vertauscht. — Um die Werthe der Integrale y_2, y_1, $y_{2,3}$ und ihrer Ableitungen für $x = a_2$ herzustellen, setzt man voraus, dass λ grösser als $n-1$, und dass b_2 positiv sei, eine Annahme, welche für das schliessliche Resultat nicht wesentlich ist. Dann ist das Integral y_2 für $x = a_2$ gleich Null, ebenso die $n-2$ ersten Ableitungen desselben; ferner haben die Integrale y_1 und $y_{2,3}$, so wie ihre $n-2$ ersten Ableitungen, für $x = a_2$ einen endlichen

eindeutigen Werth, da der mit der Potenz von $x-a_2$ behaftete Summandus verschwindet. Diese Werthe ergeben sich gleich je einer Function F_{n-1}, multiplicirt mit einem aus Potenzen und Gamma-Functionen bestehenden Factor. Von der Wiedergabe der Ausdrücke soll Abstand genommen werden, da dieselben ohne alle Schwierigkeit erhalten werden.

Die $n-1$ Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 y_1(a_2)+c_2 y_{2,3}(a_2)+\cdots+c_{n-1} y_{n-1,n}(a_2)+c_n y_{n,n+1}(a_2), \\ 0 &= c_1 y_1'(a_2)+c_2 y_{2,3}'(a_2)+\cdots+c_{n-1} y_{n-1,n}'(a_2)+c_n y_{n,n+1}'(a_2), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 &= c_1 y_1^{(n-2)}(a_2)+c_2 y_{2,3}^{(n-2)}(a_2)+\cdots+c_{n-1} y_{n-1,n}^{(n-2)}(a_2)+c_n y_{n,n+1}^{(n-2)}(a_2) \end{aligned}$$

bestimmen die Constanten $c_1, c_2, \ldots c_n$ bis auf einen gemeinsamen Factor. Um den letzteren zu finden, setze man $x=a_1$ und nehme b_1 als positiv an. Die Werthe von $y_{2,3}, y_{3,4}, \ldots y_{n-1,n}$ und $y_{n,n+1}$ für $x=a_1$ ergeben sich aus den Anfangsgliedern der Entwicklungen (7.) und (9.). Das Integral y_1 verschwindet für $x=a_1$; $y_2(a_1)$ ist ein bestimmter eindeutiger Werth, welcher sich jedoch nicht durch eine einzige Function F_{n-1}, sondern, in Analogie mit den Entwicklungen für die Gleichung (8.), nur durch eine unendliche Summe von Functionen F_{n-2} ausdrücken lässt.

Die n^{te} Gleichung

$$y_2(a_1) = c_2 y_{2,3}(a_1)+c_3 y_{3,4}(a_1)+\cdots+c_{n-1} y_{n-1,n}(a_1)+c_n y_{n,n+1}(a_1)$$

bestimmt die Constanten $c_1, c_2, \ldots c_n$ vollständig, wodurch die Zerlegung des Integrals y_2 in den wie die Potenz $(x-a_1)^{b_1+\lambda-1}$ mehrdeutigen Summandus $c_1 y_1$ und in den eindeutigen Summandus

$$c_2 y_{2,3}+c_3 y_{3,4}+\cdots+c_{n-1} y_{n-1,n}+c_n y_{n,n+1}$$

bewerkstelligt ist.

V.

Die im Abschnitt III. abgeleiteten Relationen lassen sich, so weit sie Functionen F_{n-1} enthalten, für $n=3$ in der *Gauss*schen Bezeichnung darstellen. Es sollen daher die erhaltenen Gleichungen für die dritte Ordnung kurz recapitulirt werden.

Die *Gauss*sche hypergeometrische Reihe

$$F(p,q,r,x) \\ = 1+\frac{pq}{1.r}x+\frac{p(p+1)q(q+1)}{1.2.r(r+1)}x^2+\frac{p(p+1)(p+2)q(q+1)(q+2)}{1.2.3.r.(r+1)(r+2)}x^3+\cdots,$$

welche nach der hier gebrauchten Bezeichnung mit $F_2\begin{pmatrix} 0, & 1, & x \\ p, & 1-q, & r-p \end{pmatrix}$ identisch ist, kommt für $n=3$ in den Gleichungen (15.), (16.) und (17.) vor. Diese Gleichungen lauten in ihrem Ausdruck durch die *Gauss*sche Function $F(p,q,r,x)$ folgendermassen:

$$(19.)\quad \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k \dfrac{(\lambda-1)_k(\gamma+k-1)_k}{(\varepsilon+\gamma+k-1)_k}\xi^k F(\varepsilon,\delta,\varepsilon+\gamma+k,\alpha) = \\ (1-\xi)^{\lambda-1}\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k \dfrac{(\lambda-1)_k(\varepsilon+k-1)_k}{(\varepsilon+\gamma+k-1)_k}\left(\dfrac{\xi}{\xi-1}\right)^k F(\varepsilon+k,\delta,\varepsilon+\gamma+k,\alpha), \end{cases}$$

$$(20.)\quad \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\lambda-1)_k\xi^k F(\varepsilon,\delta-k,\gamma,\alpha) = \\ (1-\xi)^{\lambda-1}\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k \dfrac{(\lambda-1)_k(\varepsilon+k-1)_k}{(\gamma+k-1)_k}\left(\dfrac{\alpha\xi}{\xi-1}\right)^k F(\varepsilon+k,\delta,\gamma+k,\alpha), \end{cases}$$

$$(21.)\quad \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k \dfrac{(\lambda-1)_k(\varepsilon+k-1)_k}{(\gamma+k-1)_k}\xi^k F(\varepsilon+k,\delta,\gamma+k,\alpha) = \\ (1-\alpha)^{-\varepsilon}\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k \dfrac{(\lambda-1)_k(\varepsilon+k-1)_k}{(\gamma+k-1)_k}\left(\dfrac{\xi-\alpha}{1-\alpha}\right)^k F\left(\varepsilon+k,\gamma+\lambda-\delta-1,\gamma+k,\dfrac{\alpha}{\alpha-1}\right). \end{cases}$$

Die Ausdrücke in den Gleichungen (13.) und (14.) reduciren sich für $n=3$ nicht auf *Gauss*sche Reihen. Indem

$$F_3\begin{pmatrix} 0, & \alpha_1, & \alpha_2, & \xi \\ \varepsilon, & \beta_1, & \beta_2, & \lambda \end{pmatrix} =$$

$$1-\frac{(\varepsilon)_1}{(\varepsilon+\lambda)_1}\left[\frac{(\beta_1-1)_1}{\alpha_1}+\frac{(\beta_2-1)_1}{\alpha_2}\right]\xi+\frac{(\varepsilon+1)_2}{(\varepsilon+\lambda+1)_2}\left[\frac{(\beta_1-1)_2}{\alpha_1^2}+\frac{(\beta_1-1)_1(\beta_2-1)_1}{\alpha_1\alpha_2}+\frac{(\beta_2-1)_2}{\alpha_2^2}\right]\xi^2-\cdots$$
$$+\frac{(-1)^k(\varepsilon+k-1)_k}{(\varepsilon+\lambda+k-1)_k}\left[\sum_{\nu=0}^{\nu=k}\frac{(\beta_1-1)_{k-\nu}(\beta_2-1)_\nu}{\alpha_1^{k-\nu}\alpha_2^\nu}\right]\xi^k+\cdots \text{ in inf.}$$

gesetzt wurde, ergeben sich aus (13.) und (14.) für die dritte Ordnung die Gleichungen

$$(22.)\quad F_3\begin{pmatrix} 0, & \alpha_1, & \alpha_2, & \xi \\ \varepsilon, & \beta_1, & \beta_2, & \lambda \end{pmatrix} = \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1-\xi}\right)^{\varepsilon} F_3\begin{pmatrix} 0, & 1, & \dfrac{\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1}, & \dfrac{\xi}{\xi-\alpha_1} \\ \varepsilon, & \tau, & \beta_2, & \lambda \end{pmatrix},$$

$$(23.)\quad F_3\begin{pmatrix} 0, & \alpha_1, & \alpha_2, & 1 \\ \varepsilon, & \beta_1, & \beta_2, & \lambda \end{pmatrix} = \left(1-\frac{1}{\alpha_1}\right)^{\beta_1-1}\left(1-\frac{1}{\alpha_2}\right)^{\beta_2-1} F_3\begin{pmatrix} 0, & 1-\alpha_1, & 1-\alpha_2, & 1 \\ \lambda, & \beta_1, & \beta_2, & \varepsilon \end{pmatrix},$$

worin τ die Differenz

$$3-(\varepsilon+\beta_1+\beta_2+\lambda)$$

bedeutet. Die in den Gleichungen (19.) bis (23.) vorkommenden Constanten $\lambda, \varepsilon, \delta, \gamma, \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ sind völlig beliebig, bis auf die eine Beschränkung, dass die hypergeometrischen Reihen einen Sinn haben müssen.

Berlin, im November 1870.

Vibrationen eines Ringes in seiner Ebene.

(Von Herrn *R. Hoppe.*)

Ein elastischer Ring, dessen Figur durch Rotation eines kleinen ebenen Flächenstücks um eine entferntere Axe entsteht, ist im allgemeinen für jede gerade Knotenzahl zweier Arten ebener Vibrationen fähig; bloss für keinen und für zwei Knoten giebt es nur je eine periodische Bewegung. Die radiale und die peripherische Verschiebung bedingen sich gegenseitig und sind von gleicher Ordnung der Kleinheit. Mit wachsender Knotenzahl geht die langsamere der zwei unabhängigen Vibrationen in eine rein radiale, die schnellere in eine rein peripherische als Grenze über, so dass beide einzeln den Charakter der Transversal- und Longitudinalschwingungen gerader Stäbe annehmen.

Wir setzen zunächst voraus, dass in der Richtung der Rotationsaxe, der Axe der z, keine Verschiebung stattfindet. Ferner betrachten wir den Querschnitt f als starr und beständig normal zur Oberfläche, bringen jedoch seine kleinen Dimensionen vollständig in Rechnung, weil sie mit unendlich grossen Zahlen multiplicirt vorkommen.

1. Bewegungsgleichungen.

Im indifferenten Zustande sei r der Abstand des Schwerpunkts des Querschnitts von der z-Axe, $r(1+\xi)$ der eines beliebigen materiellen Punkts, φ der Winkelabstand der Querschnittsebene von der zx-Ebene nach den positiven y hin. Durch Deformation gehe der Radiusvector $r(1+\xi)$ in $r(1+\xi+u)$, der Winkel φ in $\varphi+v+\tau$, wo v die Ablenkung des erstern, τ den Winkel zwischen ihm und dem Querschnitt bezeichnet. Dann sind die ebenen Coordinaten eines beliebigen Punkts nach Deformation:

$$(1.)\quad \begin{cases} x = r(1+u)\cos(\varphi+v)+r\xi\cos(\varphi+v+\tau), \\ y = r(1+u)\sin(\varphi+v)+r\xi\sin(\varphi+v+\tau). \end{cases}$$

Den Werth

$$\tau = -\frac{\partial u}{r\,\partial\varphi}$$

findet man, indem man den Richtungswinkel $\varphi+v+\tau$ der Normale der Schwerpunktscurve sucht, welche die Gleichungen (1.) für $\xi=0$ bestimmen. Ent-

wickelt man die Ausdrücke bis auf erste Potenz von u und v, und bezeichnen die Accente die Differentiation nach φ, so werden diese Gleichungen:

$$(2.)\quad \begin{cases} x = r(1+\xi+u)\cos\varphi - r\{(1+\xi)v - \xi u'\}\sin\varphi, \\ y = r(1+\xi+u)\sin\varphi + r\{(1+\xi)v - \xi u'\}\cos\varphi. \end{cases}$$

Hieraus ergiebt sich in bekannter Weise ein Bogenelement, welches der Punkt (xy) bei constantem ξ und variirendem φ beschreibt:

$$\partial s = r\{1+\xi+u-\xi u''+(1+\xi)v'\}\partial\varphi.$$

Dieses ist durch einfache Dehnung aus dem Kreisbogenelement $r(1+\xi)\partial\varphi$ hervorgegangen. Die Dehnung der Längeneinheit beträgt also

$$\frac{\partial s}{r(1+\xi)\partial\varphi}-1 = \frac{u-\xi u''}{1+\xi}+v'$$

und die Variation der Länge bei neuer Verrückung

$$\delta\partial s = r\{\delta u - \xi\delta u''+(1+\xi)\delta v'\}\partial\varphi.$$

Multiplicirt man das Product beider Grössen mit dem Elasticitätsmodul E und mit dem Flächenelement ∂f und integrirt über den ganzen Ring, so erhält man die Variation des Potentials der peripherischen Spannungen, welche nach Voraussetzung allein in Rechnung kommen, nämlich

$$(3.)\quad Q = Er\int_0^{2\pi}\partial\varphi\int\partial f\Big(\frac{u-\xi u''}{1+\xi}+v'\Big)\{\delta u-\xi\delta u''+(1+\xi)\delta v'\}.$$

Um zuerst über den Querschnitt zu integriren, sei

$$af = \int\xi^2\partial f;\quad bf = \int\xi^3\partial f;\quad cf = -\int\frac{\xi\partial f}{1+\xi},$$

wo a, $a+b$ und c stets positiv sind; dann kommt:

$$Q = Efr\int_0^{2\pi}\partial\varphi\{(u+c(u+u'')+v')\delta u + c(u+u'')\delta u''+(u+v')\delta v'\}$$

und nach theilweiser Integration:

$$Q = Efr\int_0^{2\pi}\partial\varphi\{(u+c(u+2u''+u'''')+v')\delta u-(u'+v'')\delta v\}.$$

Dieses Potential ist nun im Zustande des Gleichgewichts mit äussern Kräften gleich der Summe der virtuellen Momente derselben. Die Componenten derjenigen Kraft, welche in irgend einem Punkte eine Masseneinheit im Gleichgewicht halten würde, sind gleich und entgegengesetzt den Componenten der Beschleunigung in der Zeiteinheit. Wir zerlegen sie in radialer und peripherischer Richtung. Dann sind die Coordinaten

$$r(1+\xi+u),\quad r\{(1+\xi)v-\xi u'\},$$

die Beschleunigungscomponenten

$$r\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\qquad r\left\{(1+\xi)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\xi\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2}\right\},$$

die virtuellen Geschwindigkeiten

$$r\delta u,\qquad r\{(1+\xi)\delta v-\xi\delta u'\},$$

das Massenelement, wenn P die ursprüngliche Dichtigkeit bezeichnet,

$$Pr(1+\xi)\,\partial\varphi\,\partial f,$$

folglich nach Multiplication der letzten 3 Grössen und Integration das virtuelle Moment der Gesammtbewegung

$$(4.)\quad Q=-Pr^3\int_0^{2\pi}\partial\varphi\int(1+\xi)\,\partial f\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\delta u+\left[(1+\xi)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\xi\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2}\right][(1+\xi)\delta v-\xi\delta u']\right\}.$$

Integrirt man über f und beseitigt $\delta u'$ durch theilweise Integration nach φ, so kommt:

$$Q=-Pfr^3\int_0^{2\pi}\partial\varphi\left\{\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-(a+b)\frac{\partial^2 u''}{\partial t^2}+(2a+b)\frac{\partial^2 v'}{\partial t^2}\right]\delta u\right.$$
$$\left.+\left[(1+3a+b)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-(2a+b)\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2}\right]\delta v\right\}.$$

Identificirt man jetzt die Coefficienten der unabhängigen Variationen δu, δv in beiden Ausdrücken von Q und setzt zur Abkürzung

$$g=\frac{Pr^2}{E},$$

so ergeben sich folgende Gleichungen:

$$(5.)\quad\begin{cases} g\left\{\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-(a+b)\dfrac{\partial^2 u''}{\partial t^2}+(2a+b)\dfrac{\partial^2 v'}{\partial t^2}\right\}+u+v'+c(u+2u''+u'''')=0,\\ g\left\{(2a+b)\dfrac{\partial^2 u'}{\partial t^2}-(1+3a+b)\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right\}+u'+v''=0\end{cases}$$

als Bestimmungen für jede in den anfänglich genannten Voraussetzungen begriffene Bewegung des Ringes.

2. Einfach periodische Vibrationen.

Den aufgestellten Gleichungen genügen folgende, einer einfach periodischen Vibration entsprechende Werthe der Verschiebungen:

$$(6.)\quad\begin{cases} u=A\cos(\alpha t+\beta)\cos(k\varphi+\gamma),\\ v=Ap\cos(\alpha t+\beta)\sin(k\varphi+\gamma),\end{cases}$$

und zwar muss k eine ganze Zahl sein, damit beide nach Durchlaufung des Umkreises auf ihren Anfangswerth zurückkehren. Zur Abkürzung sei

$$\varkappa = 1+c(k^2-1)^2,$$
$$\lambda = 1+k^2(a+b), \quad \mu = 2a+b, \quad \nu = 1+3a+b,$$
$$\zeta = \lambda-\varkappa\mu, \quad 2\eta = k^2\lambda-\varkappa\nu, \quad \vartheta = \nu-k^2\mu,$$
$$\varepsilon = \lambda\nu-k^2\mu^2, \quad 2\sigma = \varkappa\nu+k^2(\lambda-2\mu), \quad \varrho = \sqrt{\eta^2+k^2\zeta\vartheta}.$$

Der Zusammensetzung gemäss sind $\lambda, \mu, \nu, \varkappa-1, \varepsilon, \sigma$ stets positiv. Zwischen ζ, η, ϑ hat man folgende Relationen:

$$(7.)\quad \begin{cases} \lambda\vartheta+2\mu\eta-\nu\zeta = 0, \\ \varkappa\vartheta+2\eta-k^2\zeta = 0. \end{cases}$$

Nach Einführung der Werthe (6.) in die Gleichungen (5.) erhält man:

$$(8.)\quad \begin{cases} \varkappa-g\alpha^2\lambda+pk(1-g\alpha^2\mu) = 0, \\ k(1-g\alpha^2\mu)+p(k^2-g\alpha^2\nu) = 0 \end{cases}$$

und nach Elimination von p:

$$(9.)\quad \varepsilon(g\alpha^2)^2-2\sigma g\alpha^2+k^2(\varkappa-1) = 0$$

oder, was damit identisch:

$$(\varepsilon g\alpha^2-\sigma)^2 = \varrho^2.$$

Die vier Wurzeln dieser Gleichung sind reell. Eliminirt man nämlich α^2 zwischen den Gleichungen (8.), so lässt sich das Resultat folgendermassen schreiben:

$$(1+kp)^2+2\left(\frac{\eta}{\vartheta}-1\right)(1+kp) = \varkappa-1.$$

Hiernach ist zunächst $1+kp$ reell, also auch α^2 nach den Gleichungen (8.), und Gleichung (9.) zeigt dann, dass es nur zwei positive Werthe haben kann.

Ist α die kleinere, α' die grössere positive Wurzel, so hat man:

$$(10.)\quad \alpha = \sqrt{\frac{\sigma-\varrho}{g\varepsilon}}, \quad \alpha' = \sqrt{\frac{\sigma+\varrho}{g\varepsilon}}.$$

Ebenso sollen durch den Accent die auf α' bezüglichen Constanten von den auf α bezüglichen unterschieden sein, aus denen sie durch Vorzeichenwechsel von ϱ hervorgehen. Nach Einsetzung des Werthes von α^2 in die Gleichungen (8.) ergiebt eine leichte Rechnung:

$$(11.)\quad p = -\frac{k\zeta}{\varrho+\eta} = -\frac{\varrho-\eta}{k\vartheta}.$$

Die Grössen A, β, γ bleiben willkürlich. So viel man aber auch Terme

der Form (6.) für ein bestimmtes k und α zu einer Lösung zusammensetzt, so reduciren sich die unabhängigen Constanten immer auf vier, und man kann die Summe, alle Fälle umfassend, folgendermassen schreiben:

$$U = (A\cos k\varphi - B\sin k\varphi)\cos\alpha t + (C\cos k\varphi - D\sin k\varphi)\sin\alpha t,$$
$$V = (A\sin k\varphi + B\cos k\varphi)\cos\alpha t + (C\sin k\varphi + D\cos k\varphi)\sin\alpha t,$$

so dass die allgemeinste Lösung für ein bestimmtes k lautet:

$$(12.) \qquad u = U + U', \qquad v = pV + p'V'$$

und 8 unabhängige Coefficienten enthält. Die ihnen entsprechenden 8 unabhängigen Vibrationen kann man indess auf doppelte Art paarweise verschmelzen lassen. Combinirt man (A, B) und (C, D), so erhält man zwei Vibrationen, die beziehungsweise zwischen den $2k$ Knoten

$$\operatorname{tg} k\varphi = \frac{A}{B}, \qquad \operatorname{tg} k\varphi = \frac{C}{D}$$

radial, und zwischen den festen Radien

$$\cot k\varphi = -\frac{A}{B}, \qquad \cot k\varphi = -\frac{C}{D}$$

peripherisch vor sich gehen, so dass eine der andern immer um $\frac{1}{4}$ der Schwingungsdauer in ihrer Phase voraus ist. Combinirt man hingegen (A, C) und (B, D), so erhält man zwei andere Vibrationen für die festen Knoten $\operatorname{tg} k\varphi = 0$ und $\cot k\varphi = 0$, während der Beginn der Schwingungsperiode beziehungsweise

$$\operatorname{tg}\alpha t = -\frac{A}{C}, \qquad \operatorname{tg}\alpha t = -\frac{B}{D}$$

ist. Indem wir die ausserdem möglichen Zerlegungen in zwei Vibrationen zu je vier proportionirten Coefficienten übergehen, knüpfen wir die Betrachtung an die letztgenannte Zerlegungsform an, nach welcher die Knoten, d. h. die rein peripherisch vibrirenden Punkte, unabhängig von aller Coefficientenbestimmung feststehen.

3. Ergänzung der Lösung.

Für $k = 0$ und $k = 1$ wird $\alpha^2 = 0$. Daraus folgt erstlich, dass hier nur die eine der beiden Vibrationsarten existirt, nämlich für

$$k = 0, \quad \alpha' = \sqrt{\frac{1+c}{g}}, \quad p' = 0$$

und für

$$k = 1, \quad \alpha' = \sqrt{\frac{2}{g(1+4a+2b-a^2)}}, \quad p' = \frac{1-a}{1+a}.$$

Erstere entspricht der gleichmässigen Ausdehnung und Contraction des ganzen Ringes ohne peripherische Verschiebung.

Da aber hier zwei Wurzeln $\alpha = 0$ zusammenfallen, so folgt ferner, dass noch eine Lösung anderer Form existiren muss. Dem Werthe $\alpha = 0$ entspricht

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0,$$

also ein u und ein v linear in t, und die Gleichungen (5.) reduciren sich auf

$$u + v' + c(u + 2u'' + u'''') = 0,$$
$$u' + v'' = 0,$$

wofür man sogleich schreiben kann:

$$\Gamma + u + 2u'' + u'''' = 0; \qquad u + v' = \Gamma c.$$

Das vollständige Integral ist sichtlicherweise:

$$u = \varDelta \cos\varphi + Z \sin\varphi + (\Theta \cos\varphi + \varLambda \sin\varphi)\varphi,$$
$$v = \Gamma c \varphi + \Pi - \int u \partial\varphi.$$

Die über den Umkreis des Ringes nicht periodischen Terme sind unmöglich, ihre Coefficienten Γ, Θ, $\varLambda$ also Null. Drückt man die übrigen in t aus, so kommt:

$$u = (l\cos\varphi - m\sin\varphi)t + A_1\cos\varphi - B_1\sin\varphi,$$
$$v = (n - l\sin\varphi - m\cos\varphi)t + B_0 - A_1\sin\varphi - B_1\cos\varphi,$$

und man hat 6 von einander unabhängige Bewegungen.

4. Vollständige Lösung.

Fügt man zu den erhaltenen Werthen die zugehörigen periodischen Terme, so entsprechen $k = 0$ die Verschiebungen

$$(u) = A'\cos\alpha' t + C'\sin\alpha' t,$$
$$(v) = nt + B_0,$$

und für $k = 1$ sind sie

$$(13.) \quad \begin{cases} \bar{u} = (l\cos\varphi - m\sin\varphi)t + A_1\cos\varphi - B_1\sin\varphi + U', \\ \bar{v} = -(l\sin\varphi + m\cos\varphi)t - (A_1\sin\varphi + B_1\cos\varphi) + \dfrac{1-a}{1+a}V'. \end{cases}$$

Addirt man jetzt alle den einzelnen k entsprechenden Lösungen, so werden die allgemeinsten Ausdrücke der Verschiebungen:

$$(14.)\quad \begin{cases} u = (u)+\bar{u}+\sum_{k=2}^{k=\infty}(U+U'), \\ v = (v)+\bar{v}+\sum_{k=2}^{k=\infty}(pV+p'V'). \end{cases}$$

Zum Nachweis, dass dieselben alle möglichen Bewegungen des Ringes umfassen, ist zu zeigen, dass jeder beliebige Anfangszustand durch sie dargestellt werden kann. Seien also u, v, $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$ für $t=0$ gegeben; dann kann man folgende Grössen daraus berechnen:

$$K=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u\cos k\varphi\,\partial\varphi, \qquad \Phi=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u\sin k\varphi\,\partial\varphi,$$

$$L=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} v\cos k\varphi\,\partial\varphi, \qquad X=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} v\sin k\varphi\,\partial\varphi,$$

$$M=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial t}\cos k\varphi\,\partial\varphi, \qquad \Psi=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial t}\sin k\varphi\,\partial\varphi,$$

$$N=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial v}{\partial t}\cos k\varphi\,\partial\varphi, \qquad \Omega=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial v}{\partial t}\sin k\varphi\,\partial\varphi$$

und findet nach Einsetzung der Werthe (14.) für $k>1$:

$$K=A+A', \qquad -\Phi=B+B',$$
$$L=pB+p'B', \qquad X=pA+p'A',$$
$$M=\alpha C+\alpha' C', \qquad -\Psi=\alpha D+\alpha' D',$$
$$N=p\alpha D+p'\alpha' D', \qquad \Omega=p\alpha C+p'\alpha' C',$$

woraus mit Anwendung der Werthe (11.) hervorgeht:

$$A=\frac{K}{2}+\frac{\eta K-k\vartheta X}{2\varrho}, \qquad A'=\frac{K}{2}-\frac{\eta K-k\vartheta X}{2\varrho},$$

$$-B=\frac{\Phi}{2}+\frac{\eta\Phi+k\vartheta L}{2\varrho}, \qquad -B'=\frac{\Phi}{2}-\frac{\eta\Phi+k\vartheta L}{2\varrho},$$

$$C=\frac{M}{2\alpha}+\frac{\eta M-k\vartheta\Omega}{2\alpha\varrho}, \qquad C'=\frac{M}{2\alpha'}-\frac{\eta M-k\vartheta\Omega}{2\alpha'\varrho},$$

$$-D=\frac{\Psi}{2\alpha}+\frac{\eta\Psi+k\vartheta N}{2\alpha\varrho}, \qquad -D'=\frac{\Psi}{2\alpha'}-\frac{\eta\Psi+k\vartheta N}{2\alpha'\varrho}.$$

Für $k=0$ findet man:

$$(15.)\qquad K=2A', \quad L=2B_0, \quad M=2\alpha'C', \quad N=2n,$$

für $k=1$:

$$K=A_1+A', \qquad -\Phi=B_1+B',$$
$$L=-B_1+p'B', \qquad X=-A_1+p'A',$$
$$M=l+\alpha'C', \qquad -\Psi=m+\alpha'D',$$
$$N=-m+p'\alpha'D', \qquad \Omega=-l+p'\alpha'C',$$

woraus:

$$(15.)\quad \begin{cases} A_1 = \frac{1-a}{2}K - \frac{1+a}{2}X, & A' = \frac{1+a}{2}(K+X), \\ B_1 = -\frac{1-a}{2}\Phi - \frac{1+a}{2}L, & B' = -\frac{1+a}{2}(\Phi - L), \\ l = \frac{1-a}{2}M - \frac{1+a}{2}\Omega, & C' = \frac{1+a}{2\alpha'}(M+\Omega), \\ m = -\frac{1-a}{2}\Psi - \frac{1+a}{2}N, & D' = -\frac{1+a}{2\alpha'}(\Psi - N). \end{cases}$$

Hiermit sind alle Coefficienten eindeutig bestimmt, und die Gleichungen (14.) drücken diejenige Bewegung aus, welche der gegebene Anfangszustand zur Folge hat.

5. Translation und Rotation.

Um die Bedeutung der nicht periodischen Terme festzustellen, betrachten wir die Bewegung des Schwerpunktes. Bezeichnen X, Y die statischen Momente, so ist

$$X + iY = Pr\iint (x+iy)(1+\xi)\,\partial\varphi\,\partial f.$$

Führt man die Werthe (2.) ein, integrirt über f und theilweise nach φ, so findet man:

$$X + iY = Pfr^2\int_0^{2\pi}\{(1-a)u + i(1+a)v\}\,e^{i\varphi}\,\partial\varphi.$$

Da nach Integration alle Terme von u, v verschwinden, welche nicht den Factor $\cos\varphi$ oder $\sin\varphi$ haben, so braucht man nur die Werthe (13.) für u, v zu setzen und erhält:

$$X + iY = 2\pi Pfr^2\{(l+im)t + A_1 + iB_1\}.$$

Die Masse des Ringes ist gleich $2\pi Pfr$; folglich sind die Coordinaten des Schwerpunktes:

$$x = r(lt + A_1), \qquad y = r(mt + B_1).$$

Hiernach bezeichnen rA_1 und rB_1 die Componenten einer für die relative Verschiebung der Elemente bedeutungslosen, anfänglichen Translation des ganzen Ringes, und rl und rm die der Translationsgeschwindigkeit.

Ebenso drückt B_0 eine bedeutungslose anfängliche Drehung des ganzen Ringes um den Anfangspunkt und n seine Rotationsgeschwindigkeit aus. Letztere muss als klein von der Ordnung der Vibrationsamplituden angenommen werden, während die 5 übrigen Constanten beliebig gross sein können.

Offenbar kann man die Grössen A_1, B_1, B_0 durch geeignete Bestimmung der anfänglichen Verschiebungen und die Grössen l, m, n dadurch zu Null machen, dass man dem Coordinatensystem eine begleitende Translation und Rotation ertheilt. Um dies in Ausführung zu bringen, berechne man aus den beliebig gegebenen u, v nach den Formeln (15.) die genannten 6 Grössen, substituire ihre Werthe in die Ausdrücke von $\bar{u}, \bar{v}$ und subtrahire die Resultate von den gegebenen u, v. Dieselbe Procedur lässt sich natürlich auf jede der 6 Grössen einzeln anwenden, die man eben beseitigen will.

6. Lebendige Kraft.

Die Gleichung der virtuellen Geschwindigkeiten, nach *Alembert*schen Princip auf Bewegung angewandt, geht bekanntlich in die Gleichung der lebendigen Kraft über, sobald man alle Variationen im Sinne der wirklichen Bewegung nimmt. Schon ohne diese Annahme lässt sich der Ausdruck (3.) folgendermassen schreiben:

$$Q = \tfrac{1}{2} E r \delta \int_0^{2\pi} \partial\varphi \int (1+\xi)\,\partial f \left(v' + \frac{u - \xi u''}{1+\xi}\right)^2,$$

und man braucht nur δ mit ∂ zu vertauschen. Nach Integration über f findet man:

$$Q = \tfrac{1}{2} E f r\, \partial \int_0^{2\pi} \partial\varphi \{(u+v')^2 + c(u+u'')^2\}.$$

Zur entsprechenden Umformung des Ausdrucks (4.) muss gleich anfangs

$$\delta = \partial t \frac{\partial}{\partial t}$$

gesetzt werden; dann geht er über in

$$Q = -\tfrac{1}{2} P r^3 \partial \int_0^{2\pi} \partial\varphi \int (1+\xi)\,\partial f \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left[(1+\xi)\frac{\partial v}{\partial t} - \xi \frac{\partial u'}{\partial t}\right]^2\right\}.$$

Der Herleitung gemäss ist, was nach Weglassung der Zeichen $-$, ∂ zur Rechten steht, der Ausdruck der lebendigen Kraft der Gesammtbewegung, welche durch W bezeichnet sei. Führt man noch die Integration über f aus, so erhält man:

$$W = \tfrac{1}{2} P f r^3 \int_0^{2\pi} \partial\varphi \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + (a+b)\left(\frac{\partial u'}{\partial t}\right)^2 \right.$$
$$\left. -2(2a+b)\frac{\partial u'}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t} + (1+3a+b)\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2\right\}.$$

Die Gleichheit der zwei Ausdrücke von Q giebt nach Integration ausserdem:

$$W = \text{const.} - \tfrac{1}{2} Efr \int_0^{2\pi} \partial\varphi \{(u+v')^2 + c(u+u'')^2\}.$$

Setzt man für u, v ihre Werthe (14.), und denkt diese nach den successiven Werthen von k geordnet, so verschwinden nach Integration alle Terme, welche Factoren mit verschiedenen k enthalten, und W stellt sich als die reine Summe der lebendigen Kräfte derjenigen Bewegungen dar, welche den einzelnen k entsprechen. Jede dieser Bewegungen zerlegt sich wieder in zwei Theile, deren Amplituden einzeln die Factoren $\cos k\varphi$ und $\sin k\varphi$ haben. Da auch deren Product ein Integral gleich Null ergiebt, so zerfällt auch die lebendige Kraft jeder solchen combinirten Bewegung in die lebendigen Kräfte der beiden Theile, bestehend aus den vereinigten Termen mit den Coefficienten (A, C, A', C') einserseits und (B, D, B', D') andrerseits. Setzt man demgemäss in den beiden Ausdrücken von W statt u, v nur deren eben bezeichnete Theile für ein einzelnes k und summirt die Resultate, so stellen sich die Gleichungen in folgender Form dar:

$$W = \tfrac{1}{2}\pi P f r^3 \sum_{k=0}^{k=\infty} (FT\alpha^2 + F'T'\alpha'^2 + 2F''T''\alpha\alpha')$$

$$= \text{const.} - \tfrac{1}{2}\pi E f r \sum_{k=0}^{k=\infty} \{G(H-T) + G'(H'-T') - 2G''T'''\},$$

und zwar ist für $k > 1$

$$F = \lambda + 2pk\mu + p^2\nu,$$
$$G = \varkappa + 2pk + p^2k^2,$$
$$H = A^2 + B^2 + C^2 + D^2,$$
$$T = (A\sin\alpha t - C\cos\alpha t)^2 + (B\sin\alpha t - D\cos\alpha t)^2,$$

woraus F', G', H', T' durch Accentuirung von p, α, A, B, C, D zu bilden sind, ferner

$$F'' = \lambda + (p+p')k\mu + pp'\nu,$$
$$G'' = \varkappa + (p+p')k + pp'k^2,$$
$$T'' = (A\sin\alpha t - C\cos\alpha t)(A'\sin\alpha' t - C'\cos\alpha' t)$$
$$+ (B\sin\alpha t - D\cos\alpha t)(B'\sin\alpha' t - D'\cos\alpha' t).$$

In T''' geht T'' über, wenn man αt, $\alpha' t$ um einen Rechten vermehrt.

Was die Theile $k=0$ und $k=1$ betrifft, so erhält man nach Einsetzung erst von (u), (v), dann von $\bar{u}$, $\bar{v}$ für u, v folgende Werthe von W:

$$(W) = \pi P f r^3 \{\nu n^2 + (A' \sin\alpha' t - C' \cos\alpha' t)^2 \alpha'^2\}$$
$$= \text{const.} - \pi E f r (1+c)(A' \cos\alpha' t + C' \sin\alpha' t)^2,$$
$$\overline{W} = \pi P f r^3 \left\{ l^2 + m^2 + \frac{1+4a+2b-a^2}{(1+a)^2} T' \alpha'^2 \right\}$$
$$= \text{const.} - 2\pi E f r \frac{H'-T'}{(1+a)^2},$$

in denen α' nur im Quadrat vorkommt, sowie die Geschwindigkeiten l, m, n.

Nun hat man, wie sich durch Elimination von α^2 zwischen den Gleichungen (8.) ergiebt:

$$k\zeta + 2\eta p - k\vartheta p^2 = 0,$$

woraus:

$$p + p' = \frac{2\eta}{k\vartheta}, \quad pp' = -\frac{\zeta}{\vartheta}$$

und findet nach Einführung infolge der Relationen (7.):

$$F'' = \frac{\lambda\vartheta + 2\mu\eta - \nu\zeta}{\vartheta} = 0,$$

$$G'' = \frac{\varkappa\vartheta + 2\eta - k^2\zeta}{\vartheta} = 0.$$

Hiermit fallen in den zwei Ausdrücken von W alle Producte der Terme weg, welche Theilvibrationen von verschiedener Geschwindigkeit entsprechen, und es bestätigt sich der noch nicht allgemein bewiesene Satz von *Saint-Venant*, dass die lebendige Kraft eines Systems gleichzeitiger Vibrationen eines Körpers die Summe der lebendigen Kräfte aller einzelnen einfach periodischen Vibrationen ist. Die Zerlegung geht hier soweit, dass auch je zwei gleichtönende Vibrationen von gleicher Knotenzahl, von proportionaler, nur ungleichzeitig eintretender Phase und ungleicher Amplitude besonders zu rechnen sind.

Die Bestätigung der Gleichung der lebendigen Kraft findet man sehr leicht, wenn man die Gleichungen (8.) nach Multiplication der zweiten mit p addirt, so dass man erhält:

$$\varkappa - g\alpha^2\lambda + 2pk(1 - g\alpha^2\mu) + p^2(k^2 - g\alpha^2\nu) = 0$$

auch gültig für p', α' und identisch mit

$$G = g\alpha^2 F, \quad G' = g\alpha'^2 F'.$$

Infolge dessen werden die variabeln Terme in beiden Ausdrücken von W einander gleich, wie dies in (W) und $\overline{W}$ gleichfalls leicht zu bemerken ist.

Der einfachste Ausdruck der lebendigen Kraft ist jetzt:

$$W = \pi P f r^3 (\nu n^2 + l^2 + m^2)$$
$$+ \pi E f r \left\{ (1+c) T_0' + \frac{2T_1'}{(1+a)^2} + \tfrac{1}{2} \sum_{k=2}^{k=\infty} (GT + G'T') \right\},$$

wo T_0', T_1' die Werthe von T', für $k = 0$, 1 bezeichnen, und in ersterem $B' = D' = 0$ zu denken ist.

7. Tonhöhe.

Die kleinen Grössen a, b, c liessen sich zwar in den unendlichen Reihen nicht vernachlässigen; jetzt jedoch, wo es sich nur um hörbare Obertöne handeln soll, also nur niedere Werthe von k zu berücksichtigen sind, mögen ihre höhern Potenzen neben den niedern in Wegfall kommen. Wir erhalten dann folgende Hauptwerthe:

$$\varkappa = \lambda = \nu = \zeta = \vartheta = \varepsilon = 1; \quad \varkappa - 1 = c(k^2-1)^2,$$
$$\eta = \frac{k^2-1}{2}, \quad \varrho = \sigma = \frac{k^2+1}{2}$$

und aus diesen nach Gleichung (10.) und (9.):

$$\alpha'^2 = \frac{k^2+1}{g}, \quad \alpha^2 \alpha'^2 = \frac{ck^2(k^2-1)^2}{g^2},$$

also

$$\alpha = \sqrt{\frac{c}{g}} \frac{k(k^2-1)}{\sqrt{k^2+1}}, \quad \alpha' = \sqrt{\frac{k^2+1}{g}},$$

ferner nach Gleichung (11.):

$$p = -\frac{1}{k}, \quad p' = k.$$

Vergleicht man den erstern Ton mit dem transversalen, den letztern mit dem longitudinalen Grundton einer von der ursprünglichen Länge ψ auf $\psi(1+\omega)$ gedehnten Saite aus gleichem Material, so werden sie übereinstimmen, wenn beziehungsweise

$$\alpha = \frac{\pi}{\psi} \sqrt{\frac{E\omega}{P}}, \quad \alpha' = \frac{\pi}{\psi} \sqrt{\frac{E}{P}}$$

oder

$$\psi = \pi r \sqrt{\frac{\omega}{c}} \frac{\sqrt{k^2+1}}{k(k^2-1)}, \quad \psi = \frac{\pi r}{\sqrt{k^2+1}}$$

ist. Der tiefste Ton jeder Art entspricht der Länge

$$\psi = \frac{\sqrt{5}}{6} \pi r \sqrt{\frac{\omega}{c}}, \quad \psi = \pi r.$$

Der letztere ergiebt für einen stählernen Ring von 1 Decimeter Radius schon 8000 volle Schwingungen in der Secunde. Daraus ist ersichtlich, dass die Reihe der Töne α' nicht zu den gewöhnlich vernehmbaren gehört. Der Hauptton entspricht vielmehr dem α für $k=2$, bei welchem der Ring 4 Knoten bildet, indem er sich abwechselnd nach zwei auf einander senkrechten Richtungen hin oval streckt. Der nächste Oberton ist $1\frac{1}{2}$ Octaven höher, die andern folgen in Intervallen $= 11{,}27$ dann 8,32 dann 6,68 dann 5,49 halben Tönen.

Ausserdem ist zu bemerken, dass bei der Tonreihe α die radiale Amplitude $k$mal so gross ist als die peripherische, während bei der Tonreihe α' das umgekehrte Verhältniss stattfindet.

Berlin, d. 7. November 1870.

Bemerkungen zu dem Aufsatze des Herrn *Bischoff* über die Tangenten algebraischer Curven im 56ten Bde. dieses Journals S. 166.

(Von Herrn *S. Gundelfinger* in Tübingen.)

In der schönen, durch die Ueberschrift näher bezeichneten Arbeit beschäftigt sich Herr *Bischoff* mit der Betrachtung gewisser Curven, die zu einer gegebenen Grundcurve in bestimmten Beziehungen stehen. Die allgemeinen Gleichungen dieser Curven werden dort zum grössten Theile nicht gegeben, sondern nur deren verschiedene Grade bestimmt.

Die wirkliche Darstellung dieser Gleichungen, welche wir im Folgenden näher entwickeln wollen, erfordert hauptsächlich die Lösung der folgenden zwei Aufgaben.

Erstens. Wenn $f(x, y, s) = 0$ die Gleichung einer beliebigen Curve n^{ten} Grades in homogenen Coordinaten bedeutet, so hat man die endgiltige Gestalt anzugeben, auf welche sich der Ausdruck

$$(1.)\quad \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\mu} f(x, y, s)\,^{*)}$$

vermittelst $f(x, y, s) = 0$ bringen lässt.

Zweitens sind die Bedingungen für die Coefficienten einer beliebigen Gleichung m^{ten} Grades

$$(2.)\quad g(x) \equiv a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_m x^m = 0$$

aufzustellen, damit zwischen ihren Wurzeln gewisse, am angeführten Orte genauer definirte Relationen stattfinden.

Das erste Problem, dessen einfache Lösung auch Herr *Hesse* so sehnlich wünscht (Bd. 40 dieses Journals S. 317), ist von diesem Mathematiker selbst schon unter einer anderen Form erledigt worden. In der That geht der in Bd. 36 dieses Journals S. 156 mit $(\partial^{\mu} v)$ bezeichnete Ausdruck unmittelbar in die Grösse (1.) über, wenn man dort $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$ annimmt und x_1, x_2, x_3 beziehungsweise durch x, y, s, sowie das Functionalzeichen v durch

---

*) Nach ausgeführter Differentiation hat man statt x_1 und y_1 wieder x und y zu setzen.

das Functionalzeichen f ersetzt. An der angegebenen Stelle hat aber Herr *Hesse* gezeigt, wie $(\partial^\mu v)$ mit Hilfe von $v=0$ auf die um zwei Einheiten niedrigere Function Q_μ zurückkommt, und wie man diese letztere vermöge Recursionsformeln successive berechnen kann. Hiernach lassen sich drei der von Herrn *Bischoff* aufgestellten Sätze in folgender verallgemeinerten Form aussprechen.

Wenn eine beliebige Curve n^{ten} Grades $v(x_1, x_2, x_3)=0$ und eine Gerade $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0$ gegeben sind, so giebt es $\frac{1}{2}m(m-2)(m-3)(m+4)$ solche Tangenten, von deren $m-2$ Schnittpunkten mit der Curve zwei harmonisch sind zum Berührungspunkte und dem Schnittpunkte der Tangente mit der gegebenen Geraden.

Ferner giebt es $m(m-2)(m-3)(m+4)$ Tangenten, deren Berührungspunkt nebst einem der $m-2$ Schnittpunkte mit der Curve harmonisch ist zu einem andern Schnittpunkte mit der Curve und zum Schnittpunkte mit der gegebenen Geraden.

Endlich existiren $\frac{1}{2}m(m-2)(m-3)(m-4)(2m+5)$ solche Tangenten, von deren $m-2$ Schnittpunkten zwei harmonisch liegen zu einem dritten Schnittpunkte und dem Schnittpunkte mit der gegebenen Geraden.

Die Berührungspunkte sämmtlicher in den drei letzten Sätzen aufgeführten Tangenten bestimmen sich als die Schnittpunkte der Grundcurve $v=0$ mit drei andern Curven, deren Gleichungen beziehungsweise erhalten werden, wenn man die Bedingungen dafür bildet, dass eine Wurzel λ von

$$\frac{Q_2}{1.2}+\frac{Q_3}{1.2.3}\lambda+\frac{Q_4}{1.2.3.4}\lambda^2+\cdots+\frac{Q_n}{1.2\ldots n}\lambda^{n-2}=0$$

einer andern entgegengesetzt gleich oder die Hälfte von einer der übrigen oder endlich das arithmetische Mittel aus zwei andern sei.

Es kommt also alles auf das zweite Problem zurück, die Beziehungen zwischen den Coefficienten a_i in (2.) aufzufinden, damit diese beliebige Gleichung m^{ten} Grades eine der drei letzterwähnten Eigenschaften besitzt.

Herr *Bischoff* hat mittelst der Theorie der symmetrischen Functionen den Grad der Coefficienten a_i in diesen Relationen bestimmt; ihre allgemeine Form ohne überflüssige Factoren findet man nach der folgenden Methode.

Soll die Gleichung $g(x)=0$ zwei gleiche, aber entgegengesetzte Wurzeln haben, so muss es einen Werth x geben, für welchen gleichzeitig

$$g(x)=0 \quad \text{und} \quad g(-x)=0$$

oder

$$\frac{g(x)+g(-x)}{2}=0 \quad \text{und} \quad \frac{g(x)-g(-x)}{2x}=0.$$

Eliminirt man aus den beiden letzten Gleichungen x^2, so nimmt die gesuchte Relation — mit $[p]$ die grösste in p enthaltene ganze Zahl bezeichnet — diese Form an:

$$\begin{vmatrix} a_0, & a_2, & a_4, & \cdot & \cdot & a_{2\left[\frac{m}{2}\right]} & \\ & a_0, & a_2, & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2\left[\frac{m}{2}\right]} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1, & a_3, & a_5, & \cdot & \cdot & a_{2\left[\frac{m+1}{2}\right]-1} & \\ & a_1, & a_3, & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2\left[\frac{m+1}{2}\right]-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0.$$

Die auf der linken Seite dieser Gleichung stehende Determinante besteht aus $\left[\frac{m+1}{2}\right]-1$ Horizontalreihen der a_i mit geraden Indices i und $\left[\frac{m}{2}\right]$ Horizontalreihen der a mit ungeraden Indices; sie besitzt merkwürdige Eigenschaften, analog denen der Discriminante von $g(x)$, und spielt in der Theorie der innern Polaren einer Curve eine wichtige Rolle.

Wofern eine Wurzel von $g(x)=0$ die Hälfte einer andern sein soll, so müssen für diese Wurzeln x gleichzeitig folgende Relationen bestehen:

$$g(x)=0 \quad \text{und} \quad g\left(\frac{x}{2}\right)=0$$

oder:

$$\frac{g(x)-g\left(\frac{x}{2}\right)}{x}=0 \quad \text{und} \quad g(x)-2^m g\left(\frac{x}{2}\right)=0,$$

aus welchen Gleichungen man wieder mit Hilfe der *Bezout-Sylvester*schen Methode x leicht eliminiren kann.

Hat man endlich die Bedingung dafür aufzustellen, dass eine Wurzel von $g(x)=0$ das arithmetische Mittel zweier andern ist, so wird man zunächst nach *Borchardt* *) die Gleichung $\psi(x)=0$ bilden, deren Wurzeln die arithmetischen Mittel derer von $g(x)=0$ sind, und alsdann aus

$$g(x)=0 \quad \text{und} \quad \psi(x)=0$$

x eliminiren.

Zu den Aufgaben, deren Lösung Herr *Bischoff* in seiner Abhandlung nicht vollständig durchgeführt hat, gehört auch die folgende:

Die Gleichung der Curve F zu finden, welche eine gegebene Curve

---

*) *Baltzer*, Theorie der Determinanten, zweite Ausgabe §. 11, 22.

[illegible] $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 0$ in den Punkten schneidet, in welchen diese von den Curven eines [illegible] Netzes n^{ter} Ordnung

$$c_1 \varphi_1(x_1, x_2, x_3) + c_2 \varphi_2(x_1, x_2, x_3) + c_3 \varphi_3(x_1, x_2, x_3) = 0$$

[illegible] wird.

Die im angeführten Orte für die Curve *F* aufgestellte Gleichung bleibt noch mittels $\varphi = 0$ um zwei Einheiten zu erniedrigen. Diese Reduction lässt sich ohne grosse Mühe ausführen, wenn man den Werth Q [illegible] auf welchen [illegible] für $\varphi = 0$ zurückkommt, und Betrachtungen zu Hilfe nimmt, ähnlich den von *Hesse* im 41ten Bande dieses Journals S. 292 angestellten.

Setzen wir für eine beliebige Function $f(x_1, x_2, x_3)$ der Kürze wegen $\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_i$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = f_{ik}$ etc., und bezeichnen wir ferner die *Hesse*sche Determinante $\sum \pm \varphi_{11} \varphi_{22} \varphi_{33}$ mit u und den Coefficienten von φ_{ik} in u mit U_{ik}, so wird die Gleichung der Curve *F* folgende:

$$\begin{vmatrix} c_1 & c & c & \varphi_1 \\ c_2 & c & c & \varphi_2 \\ c & c & c & \varphi_3 \\ \sum\sum [illegible] & \sum\sum [illegible] & \sum\sum [illegible] & \frac{2n-\nu-3}{n-1} u \end{vmatrix} = 0.$$

Die zwei Summenzeichen erstrecken sich über die Indices *i* und *k*, die [illegible] von einander die Werthe 1 bis 3 durchlaufen.

Tübingen, im [illegible] [illegible]

Verallgemeinerung einiger Theoreme des Herrn *Aronhold*.

(Von Herrn *S. Gudelfinger* in Tübingen.)

In seiner ausgezeichneten Abhandlung: „Theorie der homogenen Functionen dritten Grades von drei Veränderlichen“ (dieses Journal Bd. 55) berechnet Herr *Aronhold* das Formensystem für die zusammengesetzte Function $af+b\Delta f$ *) namentlich vermittelst der wichtigen Gleichungen (8.) und (29.) in §. 28 daselbst. Die in diesen beiden Gleichungen ausgedrückten Sätze lassen sich nach mehreren Richtungen hin erweitern, was hier näher ausgeführt werden soll.

I. Die eben erwähnte Formel (8.) in §. 28 oder, was dasselbe, das 25[te] Theorem der Abhandlung lässt sich so fassen:

Bedeutet φ irgend eine Form von f, von der Ordnung γ in den Coefficienten, und setzt man

$$(1.)\qquad \varphi_{af+b\Delta f} = a^\gamma\varphi + a^{\gamma-1}b\,\varphi' + \frac{1}{1.2}a^{\gamma-2}b^2\varphi'' + \cdots + \frac{1}{1.2.3\ldots k}a^{\gamma-k}b^\gamma\varphi^{(k)} + \cdots,$$

so ist

$$(2.)\qquad (\delta\varphi)_{af+b\Delta f} = \varphi'_{af+b\Delta f} = \tfrac{1}{4}\left\{\frac{\partial G}{\partial a}\frac{\partial\varphi_{af+b\Delta f}}{\partial b} - \frac{\partial G}{\partial b}\frac{\partial\varphi_{af+b\Delta f}}{\partial a}\right\}.$$

Dieser Satz ist nur ein specieller Fall der folgenden Formel:

$$(3.)\qquad \begin{cases} 4^k\varphi^{(k)}_{af+b\Delta f} = \left(\dfrac{\partial G}{\partial a}\right)^k \dfrac{\partial^k\varphi_{af+b\Delta f}}{\partial b^k} - k\left(\dfrac{\partial G}{\partial a}\right)^{k-1}\dfrac{\partial G}{\partial b}\,\dfrac{\partial^k\varphi_{af+b\Delta f}}{\partial b^{k-1}\partial a} \\ + \dfrac{k(k-1)}{2}\left(\dfrac{\partial G}{\partial a}\right)^{k-2}\left(\dfrac{\partial G}{\partial b}\right)^2\dfrac{\partial^k\varphi_{af+b\Delta f}}{\partial b^{k-2}\partial a^2} + \cdots + (-1)^k\left(\dfrac{\partial G}{\partial b}\right)^k\dfrac{\partial^k\varphi_{af+b\Delta f}}{\partial a^k}. \end{cases}$$

Der Beweis hierfür ist genau derselbe, wie der von *Aronhold* für die Gleichung (2.) aufgestellte; man hat dabei nur noch Regeln aus der Differentialrechnung anzuwenden, die auch zur Ableitung des *Taylor*schen Lehrsatzes für mehrere Veränderliche gebraucht werden.

---

*) Wir werden, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt ist, uns stets der Bezeichnungsweise des Herrn *Aronhold* bedienen und auf dessen Arbeit einfach mit dem Worte „Abhandlung“ verweisen.

II. Die weiteren Erweiterungen der *Aronhold*schen Formeln beziehen sich auf das Formensystem für die Grundfunction $aP_f - bR_f$. Gerade wie nämlich die Gleichungen (8.) und (29.) in §. 28 der Abhandlung die meisten Formenbildungen für die zusammengesetzte Grundfunction $af + b\Delta f$ liefern, so existiren analoge Theoreme, die das gleiche leisten, wenn $aP_f - bR_f$ als Grundform angenommen wird.

Um zu denselben zu kommen, gehen wir von der Beziehung aus:

$$(4.)\qquad \Delta(aP_f - bR_f) = -\tfrac{1}{2}R\left\{\frac{\partial S_{ab}}{\partial b}P_f + \frac{\partial S_{ab}}{\partial a}R_f\right\}\ ^{*)}.$$

Haben nun φ, φ', φ'' etc. wieder dieselbe Bedeutung wie in (1.), so erhält man z. B. $\varphi'_{aP_f - bR_f}$, wenn man in **)

$$\varphi' = \Sigma!\frac{\partial\varphi}{\partial a_{\varkappa\lambda\mu}}b_{\varkappa\lambda\mu}$$

$a_{\varkappa\lambda\mu}$ durch $ap_{\varkappa\lambda\mu} - br_{\varkappa\lambda\mu}$ und also nach (4.)

$$b_{\varkappa\lambda\mu}\quad\text{durch}\quad -\frac{R}{2}\left\{\frac{\partial S_{ab}}{\partial b}p_{\varkappa\lambda\mu} + \frac{\partial S_{ab}}{\partial a}r_{\varkappa\lambda\mu}\right\}$$

ersetzt; es wird somit

$$\varphi'_{aP_f - bR_f} = -\frac{R}{2}\Sigma!\frac{\partial\varphi_{aP_f - bR_f}}{\partial(ap_{\varkappa\lambda\mu} - br_{\varkappa\lambda\mu})}\left(\frac{\partial S_{ab}}{\partial b}p_{\varkappa\lambda\mu} + \frac{\partial S_{ab}}{\partial a}r_{\varkappa\lambda\mu}\right)$$

oder

$$(5.)\qquad \varphi'_{aP_f - bR_f} = \frac{R}{2}\left\{\frac{\partial S_{ab}}{\partial a}\frac{\partial\varphi_{aP_f - bR_f}}{\partial b} - \frac{\partial S_{ab}}{\partial b}\frac{\partial\varphi_{aP_f - bR_f}}{\partial a}\right\}.$$

In ganz derselben Weise findet man allgemein:

$$(6.)\quad \begin{cases} \varphi^{(k)}_{aP_f - bR_f} = (-1)^k\dfrac{R^k}{2^k}\left\{\dfrac{\partial^k\varphi_{aP_f - bR_f}}{(\partial a)^k}\left(\dfrac{\partial S_{ab}}{\partial b}\right)^k - k\dfrac{\partial^k\varphi_{aP_f - bR_f}}{\partial a^{k-1}\partial b}\left(\dfrac{\partial S_{ab}}{\partial b}\right)^{k-1}\dfrac{\partial S_{ab}}{\partial a}\right. \\ \left. + \dfrac{k(k-1)}{2}\dfrac{\partial^k\varphi_{aP_f - bR_f}}{\partial a^{k-2}\partial b^2}\left(\dfrac{\partial S_{ab}}{\partial b}\right)^{k-2}\left(\dfrac{\partial S_{ab}}{\partial a}\right)^2 - \cdots + (-1)^k\dfrac{\partial^k\varphi_{aP_f - bR_f}}{\partial b^k}\left(\dfrac{\partial S_{ab}}{\partial a}\right)^k\right\}. \end{cases}$$

Aus (5.) lässt sich über Combinanten ein interessanter Satz ableiten. Ist nämlich φ eine Combinante von f und Δf, so wird φ' und somit auch $\varphi'_{aP_f - bR_f}$ identisch Null, und die Gleichung (5.) geht dann in diese über:

$$0 = \frac{\partial S_{ab}}{\partial a}\frac{\partial\varphi_{aP_f - bR_f}}{\partial b} - \frac{\partial S_{ab}}{\partial b}\frac{\partial\varphi_{aP_f - bR_f}}{\partial a}.$$

---

*) Auf diese Form lässt sich leicht die Gleichung IV. auf Seite 191 der Abhandlung bringen. Für den Beweis derselben und überhaupt der damit zusammenhängenden Formeln vergleiche man §. 7 meiner Inauguralschrift: Zur Theorie des simultanen Systems einer cubischen und einer biquadratischen binären Form.

**) Das Zeichen $\Sigma!$ brauche ich in dem *Aronhold*schen Sinne (Bd. 55 S. 129 dieses Journals), dass nämlich die Summation nicht auf $\varkappa$, λ, μ einzeln ausgedehnt wird, sondern jede Combination $\varkappa$, λ, μ in der Summe nur einfach zu nehmen ist.

Nach einem bekannten Theoreme *Jacobis* über Functionaldeterminanten ist daher $\varphi_{aP_f-bR_f}$ eine Function und zwar — da φ ganz und homogen in a und b — eine gewisse Potenz von S_{ab}, so dass man setzen kann:

$$(7.)\qquad \varphi_{aP_f-bR_f} = A.S_{ab}^{\nu}.$$

In dieser Gleichung bedeutet A eine von a und b unabhängige Form, die, wie sich leicht beweisen lässt, eine Combinante von f und Δf sein muss.

In der That macht man in (7.) $a=1$ und $b=0$, so folgt zunächst

$$\varphi_{P_f} = A.S^{\nu};$$

ersetzt man hierin f durch $af+b\Delta f$ und vergleicht die hieraus resultirende Gleichung mit (7.), so erhält man

$$A_{af+b\Delta f} = A.G^{8\nu},$$

welche Beziehung die bekannte Bedingung dafür ausdrückt, dass A eine Combinante von f und Δf ist.

III. Die in I. und II. aufgestellten Relationen sind alle als Verallgemeinerungen des 25[ten] Theorems der *Aronhold*schen Abhandlung zu betrachten. Eine Ausdehnung der Gleichung (29.) in §. 28 daselbst findet ihren Ausdruck in folgendem Satze:

Bezeichnet man eine beliebige Invariante χ, gebildet für aP_f-bR_f als Grundform, durch χ_{ap-br} und setzt

$$\chi_{aP_f-bR_f} = \Sigma! \frac{\partial \chi_{ap-br}}{\partial(ap_{\varkappa\lambda\mu}-br_{\varkappa\lambda\mu})} x_\varkappa x_\lambda x_\mu,$$

so findet die Beziehung statt:

$$(8.)\qquad 6R\chi_{aP_f-bR_f} = \frac{\partial \chi_{ap-br}}{\partial a}\Delta f - \frac{\partial \chi_{ap-br}}{\partial b} f.$$

Der Beweis ist sehr einfach. χ_{P_f} ist als eine Covariante dritten Grades eine lineare Combination von f und Δf (Abhandlung Seite 184), so dass man annehmen kann:

$$\Sigma \frac{\partial \chi_p}{\partial p_{\varkappa\lambda\mu}} x_\varkappa x_\lambda x_\mu = Af + B\Delta f.$$

Substituiren wir in dieser Gleichung für $x_\varkappa x_\lambda x_\mu$ ein Mal $p_{\varkappa\lambda\mu}$ und ein ander Mal $r_{\varkappa\lambda\mu}$, so erhalten wir, wenn γ die Ordnung der Coefficienten von f in χ bedeutet (Abh. §. 27, 4 und 16):

$$6R.B = \gamma\chi_p,\qquad 6R.A = \Sigma! \frac{\partial \chi_p}{\partial p_{\varkappa\lambda\mu}} r_{\varkappa\lambda\mu},$$

und wir haben demnach

$$9.\quad \begin{cases} 6R\,\Sigma \dfrac{\partial \chi_\rho}{\partial p_{\varkappa i\lambda}}\, x_\varkappa x_i x_\lambda = \gamma\chi_\rho\, \Delta f + \left(\Sigma \dfrac{\partial \chi_\rho}{\partial p_{\varkappa\lambda\mu}}\, r_{\varkappa\lambda\mu}\right) f, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = \gamma\chi_\rho\, \Delta f - \delta(\chi_\rho)\, f, \end{cases}$$

da

$$\Sigma \frac{\partial \chi_\rho}{\partial p_{\varkappa i\lambda}}\, r_{\varkappa i\lambda} = -\sum_{\varrho,\sigma,\tau} \sum_{\varkappa,i,\lambda} \frac{\partial \chi_\rho}{\partial p_{\varkappa i\lambda}}\, \frac{\partial p_{\varkappa i\lambda}}{\partial a_{\varrho\sigma\tau}}\, b_{\varrho\sigma\tau} = -\sum_{\varrho,\sigma,\tau} \frac{\partial \chi_\rho}{\partial a_{\varrho\sigma\tau}}\, b_{\varrho\sigma\tau} = -\delta(\chi_\rho).$$

Ersetzt man jetzt in 9. f durch $af - b\Delta f$, also R durch RG^3, χ_ρ durch $G^{\gamma}\chi_{\gamma p-3r}$ und nach 2.

$$\delta\,\chi_\rho \quad \text{durch} \quad \frac{G^{\gamma}}{4}\left(\frac{\partial G}{\partial a}\,\frac{\partial \chi_{\gamma p-3r}}{\partial b} - \frac{\partial G}{\partial b}\,\frac{\partial \chi_{\gamma p-3r}}{\partial a}\right),$$

so folgt

$$6GR\,\chi_{\gamma p-3r} = \tfrac{1}{4}\gamma\,\chi_{\gamma p-3r}\left(\frac{\partial G}{\partial a}\Delta f - \frac{\partial G}{\partial b} f\right) - \tfrac{1}{4}(af - b\Delta f)\left(\frac{\partial \chi_{\gamma p-3r}}{\partial b}\,\frac{\partial G}{\partial a} - \frac{\partial \chi_{\gamma p-3r}}{\partial a}\,\frac{\partial G}{\partial b}\right),$$

welche Gleichung mit Berücksichtigung von

$$\gamma\cdot\chi_{\gamma p-3r} = \frac{\partial \chi_{\gamma p-3r}}{\partial a}\, a + \frac{\partial \chi_{\gamma p-3r}}{\partial b}\, b$$

sofort in die zu beweisende Formel (8.) übergeht.

Die hier entwickelten Theoreme sind äusserst zahlreicher Anwendungen fähig: beispielsweise ergeben sich aus ihnen die meisten von Herrn *Aronhold* auf Seite 191 seiner Abhandlung aufgestellten Formeln fast ohne alle Rechnung.

Das Interesse für diese Sätze wird noch durch den Umstand erhöht, dass sie sämmtlich ihre Analoga in der Theorie der binären cubischen und biquadratischen Formen haben, wie man in meiner Habilitationsschrift näher sehen kann.

Tübingen, im October 1870.

Geometrische Theoreme.

(Bruchstücke aus den hinterlassenen Papieren von *C. G. J. Jacobi*, mitgetheilt durch Herrn *O. Hermes*.)

(Vorbemerkung von Herrn *O. Hermes*.)

Unter dem obigen Titel hat bekanntlich *Jacobi* im 12ten Bande dieses Journals in einem Briefe an *Steiner* die ersten Mittheilungen über die nach ihm benannte Erzeugungsweise der Linien und Flächen zweiten Grades gemacht. Die vorliegenden Bruchstücke handeln über denselben Gegenstand, und obschon nur in losem Zusammenhange, gestatten sie doch eine Einsicht in die Methode, welcher sich *Jacobi* bei der Bearbeitung des erwähnten Themas bedient; sie sind bis vor einiger Zeit getrennt in verschiedenen Händen gewesen, und es hat darum ihre Herausgabe einen so langen Aufschub erlitten. Diesem Umstande ist es vorzüglich zuzuschreiben, dass die *Jacobi*sche Ausdehnung der Focalerzeugung der Kegelschnitte auf die Flächen des zweiten Grades, obgleich die einfachste, anschaulichste und vollständigste von allen Erzeugungsweisen dieser Flächen, noch keineswegs diejenige Anerkennung gefunden hat, welche sie in so hohem Maasse verdient, und dass man immer noch das *Ivory*sche Theorem über die confocalen Kegelschnitte und Flächen zweiten Grades, von welchem *Jacobi* bei der Entwicklung seiner Sätze ausgeht, als „für die Geometrie noch nicht genug ausgebeutet“ bezeichnen muss.

In dem ersten Bruchstücke, welches von *Jacobi* selbst die Ueberschrift „Geometrische Theoreme“ erhalten hat, findet sich nach einer kurzen Einleitung, in welcher *Jacobi* eine genauere Discussion der erzeugten Curven und Flächen zu liefern verspricht, eine kurze analytische Darstellung seiner Methode, die Focaleigenschaften der Kegelschnitte aus dem *Ivory*schen Theorem herzuleiten. Das zweite, umfangreichere Bruchstück enthält die Lösung einer Aufgabe über confocale Kegelschnitte, welche für die spätere Discussion der entstehenden Flächen eine nothwendige Voraussetzung bildet, und an diese sich anschliessend diese Discussion selbst und eine Verallgemeinerung der Entstehungsweise der Flächen.

Diese letzten Untersuchungen erscheinen ebenfalls nur in einem ziemlich losen Zusammenhange mit einander; jedoch ist absichtlich der Wortlaut des Manuscriptes so treu als möglich beibehalten worden. Zur Erleichterung des Verständnisses hat sich der Herausgeber veranlasst gesehen, jedes der beiden Bruchstücke, aus welchen sich diese nachgelassene *Jacobi*sche Arbeit zusammensetzt, durch eine Vorbemerkung einzuleiten. Noch ist zu erwähnen, dass der grössere Theil des zweiten Bruchstücks bereits von dem im Frühjahr 1861 verstorbenen Dr. *Sigismund Cohn* geordnet und für den Druck vorbereitet worden ist.

Erstes Bruchstück.

Wenn man über einer festen Basis Dreiecke errichtet, deren beide Schenkel eine constante Summe oder eine constante Differenz haben, so ist der Ort der Spitze dieser Dreiecke ein Kegelschnitt. Man kann diesen Satz auch so aussprechen:

Wenn man über zwei festen Basen AB und CD mit denselben Schenkelpaaren AP = CQ, BP = DQ Dreiecke errichtet, und die einen Dreiecke CDQ verschwinden, so ist der Ort der Spitzen P der anderen Dreiecke ABP ein Kegelschnitt.

Denn wenn ein Dreieck verschwindet, so fällt die Spitze in die Grundlinie, und es wird die Summe oder die Differenz der Schenkel gleich der Grundlinie selber, also constant. Während bei der gewöhnlichen Art, den angeführten Elementarsatz auszudrücken, sich nicht absehen liess, wie er auf *Flächen zweiter Ordnung* ausgedehnt werden kann, so bietet diese neue Art, ihn auszusprechen, den Vortheil dar, die verlangte Verallgemeinerung unmittelbar und auf die natürlichste Weise zu geben. Man hat nämlich den ganz analogen Satz für den Raum:

Wenn man über zwei festen Dreiecken ABC und DEF als Basen mit denselben Schenkeln AP = DQ, BP = EQ, CP = FQ Pyramiden errichtet, und die über der einen Basis DEF errichteten Pyramiden DEFQ verschwinden, so ist der Ort der Spitze P der über der anderen Basis errichteten Pyramiden ABCP eine Fläche zweiter Ordnung.

Wenn die Pyramide *DEFQ* verschwindet, so fällt die Spitze *Q* in die Ebene der Basis *DEF*. Man hat aber auch die allgemeineren Sätze, dass der Ort der Spitze *P* eine Curve oder Fläche zweiter Ordnung ist, wenn *Q* in einer *beliebig* gegebenen geraden Linie oder Ebene liegt.

Ich habe diese Sätze zuerst im 12ten Bande des *Crelle*schen Journals (J. 1834) in einem Briefe an *Steiner* mitgetheilt. Da sie eine Lücke in der Theorie der Flächen zweiter Ordnung auszufüllen scheinen, so will ich sie hier näher erörtern. Ich werde zuerst zeigen, wie sie eine unmittelbare Folge des für die Geometrie noch nicht genug ausgebeuteten Theorems *Ivorys* sind, *dass die Verbindungslinie beliebiger zwei in confocalen Ellipsen oder Ellipsoiden liegender Punkte gleich der Verbindungslinie der beiden ihnen in denselben Ellipsen oder Ellipsoiden conjugirten Punkte ist.*

Hierauf werde ich in eine genauere Discussion der erzeugten Curven oder Flächen eingehen. Ich beginne mit den Kegelschnitten.

Es sei die Gleichung einer gegebenen Ellipse, auf ihre Hauptachsen bezogen,

$$\frac{xx}{mm} + \frac{yy}{nn} = 1,$$

und die Gleichung einer ihr confocalen Ellipse

$$\frac{xx}{mm+\varrho}+\frac{yy}{nn+\varrho} = 1,$$

wo $n < m$ sein mag. Zwei Punkte dieser Ellipsen, P und Q, deren Coordinaten

$$x = m\alpha, \quad y = n\beta$$

und

$$x = \sqrt{mm+\varrho}\,.\,\alpha, \quad y = \sqrt{nn+\varrho}\,.\,\beta$$

sind, wo

$$\alpha\alpha+\beta\beta = 1,$$

heissen einander conjugirt. Hat man zwei andere conjugirte Punkte P' und Q', deren Coordinaten

$$x = m\alpha', \quad y = n\beta'$$

und

$$x = \sqrt{mm+\varrho}\,.\,\alpha', \quad y = \sqrt{nn+\varrho}\,.\,\beta'$$

sind, wo wieder

$$\alpha'\alpha'+\beta'\beta' = 1,$$

so wird

$$PQ'^2 = (m\alpha-\sqrt{mm+\varrho}\,.\,\alpha')^2+(n\beta-\sqrt{nn+\varrho}\,.\,\beta')^2,$$
$$P'Q^2 = (\sqrt{mm+\varrho}\,.\,\alpha-m\alpha')^2+(\sqrt{nn+\varrho}\,.\,\beta-n\beta')^2$$

und daher

$$PQ'^2-P'Q^2 = \varrho(\alpha'\alpha'+\beta'\beta'-\alpha\alpha-\beta\beta) = 0$$

oder

$$PQ' = P'Q,$$

welches der *Ivory*sche Satz für Ellipsen ist. Setzt man gleichzeitig $n\sqrt{-1}$ und $\beta\sqrt{-1}$ für n und β, so erhält man denselben Satz für confocale Hyperbeln.

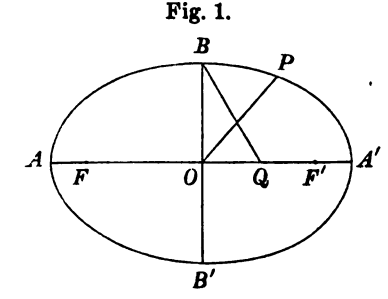
Lässt man ϱ bis zu dem Werthe $-nn$ abnehmen, und $nn+\varrho$ und y gleichzeitig verschwinden, so hat man für die Punkte der zweiten Ellipse

$$x = \sqrt{mm-nn}\,.\,\alpha, \quad y = 0.$$

Dieselbe reducirt sich daher, da α immer zwischen -1 und $+1$ liegt, auf das zwischen den beiden Brennpunkten gelegene Stück der grossen Achse, welches ich die *Grenzellipse* nennen werde. Es seien O, F, F' der Mittelpunkt und die Brennpunkte der gegebenen Ellipse, A und A' die Endpunkte ihrer grossen, B und B' die Endpunkte ihrer kleinen Achse. Setzt man $\alpha = 0$, $\beta = \pm 1$, so erhält man als die conjugirten Punkte den Punkt O der Grenzellipse und die Punkte B oder B' der gegebenen Ellipse. Setzt man dagegen $\alpha = \pm 1$, $\beta = 0$, so

sieht man, dass den Punkten F und F' der Grenzellipse die Punkte A und A' der gegebenen conjugirt sind. Sind daher allgemein P und Q zwei beliebige conjugirte Punkte der gegebenen Ellipse und der Grenzellipse, so hat man nach dem *Ivory*schen Theorem

Fig. 1.



$$PF = QA, \quad PF' = QA', \quad PO = QB = QB'$$

und daher

$$PF + PF' = AA',$$

d. h.

die Summe der von den beiden Brennpunkten einer Ellipse F und F' nach einem ihrer Punkte P gezogenen Radii vectores ist immer der grossen Achse AA' gleich, und wenn man auf dieser die den beiden Radii vectores gleichen Stücke $AQ = FP$, $QA' = PF'$ abträgt, so wird die Entfernung des Punktes Q von den Endpunkten der kleinen Achse gleich der Entfernung des Punktes P vom Mittelpunkt der Ellipse.

Wenn durch die Gleichung

$$\frac{xx}{mm} - \frac{yy}{nn} = 1$$

eine Hyperbel gegeben ist, deren Mittelpunkt, Brennpunkte und Endpunkte der grossen (d. h. reellen) Achse wieder O, F und F', und A und A' heissen mögen, so sind die ihr confocalen Hyperbeln in der Gleichung

$$\frac{xx}{mm+\varrho} - \frac{yy}{nn-\varrho} = 1$$

enthalten. Zwei conjugirte Punkte P und Q der gegebenen und einer ihr confocalen Hyperbel haben zu Coordinaten

$$x = m\alpha, \qquad y = n\beta,$$
$$x = \sqrt{mm+\varrho}\,.\,\alpha, \qquad y = \sqrt{nn-\varrho}\,.\,\beta,$$

wo

$$\alpha\alpha - \beta\beta = 1.$$

Eine Grenze der confocalen Hyperbeln entspricht dem Werthe $\varrho = nn$. Lässt man y und $nn-\varrho$ gleichzeitig verschwinden, so wird für die Punkte dieser Grenzhyperbel

$$x = \sqrt{mm+nn}\,.\,\alpha, \qquad y = 0.$$

Es reducirt sich daher diese Hyperbel, da $\alpha > 1$, auf die über F und F' hinaus nach beiden Seiten ins Unendliche gehende Verlängerung der Linie FF'.

Setzt man $\alpha = \pm 1$, so sieht man, dass den Punkten F und F' der Grenzhyperbel die Scheitel A und A' der gegebenen Hyperbel conjugirt werden. Wenn der Punkt Q, von F oder F' an, die unendliche Verlängerung von FF' über F oder F' hinaus durchläuft, bewegt sich P auf der einen Hälfte des einen Zweiges der Hyperbel, und in jedem Augenblicke hat man

$$PF = QA, \quad PF' = QA',$$

also

$$PF' - PF = QA' - QA = AA',$$

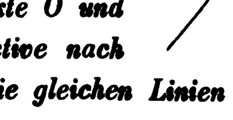
welches der bekannte Satz für die Hyperbel ist.

Man erhält für die confocalen Hyperbeln eine zweite Grenze, welche dem Werthe $\varrho = -mm$ entspricht. Lässt man nämlich x und $mm + \varrho$ gleichzeitig verschwinden, so wird für die Punkte dieser Grenzhyperbel

$$x = 0, \quad y = \sqrt{mm + nn} \,.\, \beta,$$

und da β keiner Begrenzung unterworfen ist, so reducirt sie sich auf die ganze Länge der kleinen (d. h. imaginären) Achse. Setzt man $\beta = 0$, so sieht man, dass dem Punkte O dieser Grenzhyperbel die Scheitel (Endpunkte der grossen Achse) der gegebenen Hyperbel entsprechen *).

Fig. 2.



Hat man daher auf der gegebenen Hyperbel den Punkt P und auf der kleinen Achse den conjugirten Punkt Q der zweiten Grenzhyperbel, so wird $AQ = OP$, wodurch man leicht Q findet, wenn P gegeben ist und umgekehrt. Man wird deshalb aus dem *Ivory*schen Theorem folgenden Satz ableiten können:

Wenn man aus dem Mittelpunkte O und dem Scheitel A einer Hyperbel respective nach der Hyperbel und der kleinen Achse die gleichen Linien

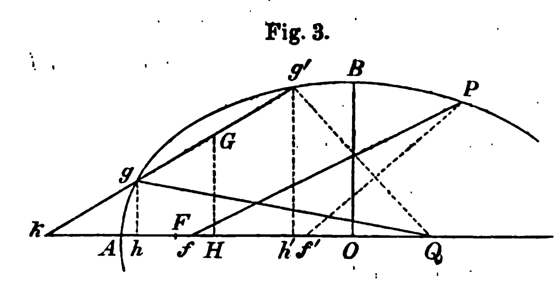
$$OP = AQ, \quad OP' = AQ'$$

zieht, so hat man auch $PQ' = P'Q$.

Das *Ivory*sche Theorem führt aber mit derselben Leichtigkeit auf einen allgemeineren Satz, welcher eine Eigenschaft der beiden Linien angiebt, die

*) Man könnte auch so die beiden Achsen und mithin jede zwei zu einander rechtwinkligen Linien auf einander beziehen und immer zwei Punkte auf ihnen als conjugirte betrachten, wenn die Quadrate ihrer Abstände vom Schnittpunkte eine constante Differenz haben. *J.*

man aus den Punkten eines Kegelschnitts, z. B. der Ellipse Fig. 3, nach zwei *beliebigen* festen Punkten der grossen Achse zieht. Es seien nämlich f und f' zwei beliebige feste Punkte der Linie FF', die Punkte g und g' ihnen auf der Ellipse conjugirt, so hat man für jeden Punkt Q der Linie und den ihm conjugirten P der Ellipse



$$Pf = Qg, \quad Pf' = Qg'$$

und daher folgenden Satz:

Satz I.

Die beiden Linien, die man von zwei auf der grossen Achse zwischen den Brennpunkten beliebig liegenden festen Punkten nach den verschiedenen Punkten einer Ellipse zieht, können zu Schenkeln eines über einer anderen festen Basis beschriebenen Dreiecks genommen werden, dessen Spitze eine gerade Linie durchläuft.

Man kann diesen Satz auch so darstellen, wie ich ihn am angeführten Orte (Cr. J. Bd. XII) ausgesprochen habe:

Satz II.

Wenn man über zwei festen Basen gg' und ff' mit denselben Schenkeln $Qg = Pf$, $Qg' = Pf'$ Dreiecke beschreibt, und die Spitze Q der einen Dreiecke eine beliebig gegebene gerade Linie durchläuft, so beschreibt die Spitze P der anderen Dreiecke einen Kegelschnitt.

Wenn die gegebene gerade Linie die Basis gg' selber ist, so werden f, f' die Brennpunkte des Kegelschnitts. Aber man hat auch den allgemeineren Satz, dass, *wenn die gerade Linie durch den einen Endpunkt g der Basis geht, der entsprechende Endpunkt f der anderen Basis der eine Brennpunkt des Kegelschnitts wird.* Denn, wenn der Punkt g des Kegelschnitts in die gerade Linie ff', die grosse Achse, zu liegen kommt, so fällt g mit dem Endpunkt der grossen Achse A zusammen und der conjugirte Punkt f mit dem Brennpunkt F.

Ich will jetzt den nach Satz II. erzeugten Kegelschnitt näher bestimmen, wobei ich der besseren Unterscheidung wegen die Linien gg' und ff' die *erste* und *zweite* Basis nennen werde. Es sei in der ursprünglichen Figur 3, welche dem Satz I. zu Grunde liegt,

$$Of = \sqrt{mm - nn} \, . \, \alpha, \quad Of' = \sqrt{mm - nn} \, . \, \alpha',$$

so wird die zweite Basis

$$ff' = \sqrt{mm-nn}(\alpha-\alpha').$$

Die den Punkten f und f' conjugirten Punkte des Kegelschnitts g und g' haben die Coordinaten

$$m\alpha,\quad m\beta \quad \text{und} \quad m\alpha',\quad m\beta',$$

wo

$$\alpha\alpha+\beta\beta = \alpha'\alpha'+\beta'\beta' = 1.$$

Sind h und h' die Fusspunkte der von g und g' auf die gerade Linie gefällten Perpendikel, so sind $Oh = m\alpha$, $Oh' = m\alpha'$ gegeben, und wenn H die Mitte von h und h' ist,

$$2OH = m(\alpha+\alpha'),$$

ferner die Projection der ersten Basis auf diese Linie

$$hh' = m(\alpha-\alpha')$$

und daher

$$\frac{\sqrt{mm-nn}}{m} = \frac{ff'}{hh'},\qquad \frac{n}{m} = \frac{\sqrt{hh'^2-ff'^2}}{hh'}.$$

Ueberdies hat man

$$gh = n\beta,\qquad g'h' = n\beta'$$

und daher

$$\frac{hh'^2(g'h'^2-gh^2)}{hh'^2-ff'^2} = m^2(\beta'^2-\beta^2) = m^2(\alpha^2-\alpha'^2) = m(\alpha+\alpha').hh',$$

woraus

$$2OH = Oh+Oh' = \frac{hh'(g'h'^2-gh^2)}{hh'^2-ff'^2}.$$

Diese Gleichung bestimmt die Lage des Mittelpunkts O des Kegelschnitts. Hat man O gefunden, so zeigen die Gleichungen

$$Of = \frac{ff'}{hh'}\cdot Oh,\qquad Of' = \frac{ff'}{hh'}\cdot Oh',$$

wo man die Punkte f und f' in der gegebenen geraden Linie anzunehmen hat, damit die ursprüngliche, dem Satz I. zu Grunde liegende Figur 3 erzeugt wird, in welcher der erzeugte Kegelschnitt die gegebene gerade Linie zur grossen Achse hat und durch die festen Punkte g und g' geht, die den Punkten f und f' conjugirt werden.

Man kann den für OH gefundenen Ausdruck etwas einfacher darstellen, wenn man den Schneidungspunkt k der nöthigenfalls verlängerten ersten Basis gg' mit der gegebenen geraden Linie zu Hilfe nimmt. Man hat nämlich

$$kh:kh' = gh:g'h'$$

und daher

$$hh' - kh : hh' = g'h' - gh : g'h' - gh.$$

Da

$$hh' - kh = 2kH,$$

so folgt hieraus

$$OH = kH \cdot \frac{g'h'^2 - gh^2}{hh'^2 - ff'^2} = kH \cdot \frac{gg'^2 - hh'^2}{hh'^2 - ff'^2},$$

$$kO = kH \frac{gg'^2 - ff'^2}{hh'^2 - ff'^2}.$$

Man findet ferner nach einiger Rechnung, wenn G der Mittelpunkt der ersten Basis gg' gegeben ist, das Quadrat der halben kleinen Achse

$$n^2 = \frac{(gg'^2 - ff'^2)(GK^2 - \frac{1}{4}ff'^2)}{hh'^2 - ff'^2}$$

oder

$$n^2 = \frac{kO}{kH}(GK^2 - \tfrac{1}{4}ff'^2).$$

Aus den gefundenen Formeln leitet man folgende Resultate ab:

I. Wenn die zweite Basis ff' sich auf einen Punkt reducirt, so wird der Kegelschnitt ein um diesen Punkt als Centrum beschriebener Kreis. Die Bedingung, dass der Kegelschnitt eine Ellipse sei, ist

$$ff' < hh'.$$

Der Mittelpunkt der Ellipse O liegt auf der Verlängerung von kH über H hinaus, und zwar liegen, wenn, wie in Figur 3., $g'h' > gh$ ist, h und h' auf derselben Seite oder auf verschiedenen Seiten von O, jenachdem

$$g'h'^2 - gh^2 > \text{ oder } < hh'^2 - ff'^2$$

d. h. jenachdem

$$g'h'^2 - ff'^2 > \text{ oder } < gh^2.$$

II. Wenn $ff' = hh'$ oder die zweite Basis gleich der Projection der ersten Basis auf die gegebene gerade Linie, so wird der Kegelschnitt eine Parabel.

III. Ist $ff' > hh'$, so wird der Kegelschnitt eine *Hyperbel*. Aus den Gleichungen

$$n^2 = \frac{(gg'^2 - ff'^2)(GK^2 - \frac{1}{4}ff'^2)}{hh'^2 - ff'^2},$$

$$m^2 = \frac{hh'^2 (gg'^2 - ff'^2)(GK^2 - \frac{1}{4}ff'^2)}{(hh'^2 - ff'^2)^2}$$



folgt, dass n^2 negativ, m^2 positiv, oder dass die gegebene Linie die grosse Achse der Hyperbel ist, wenn ff' gleichzeitig kleiner oder grösser ist als die beiden Linien gg' und $2Gh$; ferner dass n^2 positiv, m^2 negativ, oder dass die gegebene Linie die kleine Achse der Hyperbel ist, wenn ff' zwischen gg' und $2Gh$ enthalten ist. Es ist übrigens

$$gg'^2 = hh'^2+(g'h'-gh)^2,$$
$$4Gh^2 = hh'^2+(g'h'+gh)^2$$

und daher $gg' <$ oder $> 2Gh$, jenachdem die Punkte g und g' auf derselben oder auf verschiedenen Seiten der gegebenen Linie liegen.

(Vorbemerkung zum zweiten Bruchstück von Herrn *O. Hermes.*)

Zur Vermittelung der Schlussfolgerungen, welche *Jacobi* an die in dem Folgenden entwickelte Aufgabe anknüpft, ist Einzelnes vorweg in Betracht zu ziehen.

Die Gleichung einer auf ihre Hauptachsen bezogenen Fläche

$$(1.)\qquad \frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}+\frac{z^2}{p^2} = 1$$

stellt ein Ellipsoid, ein einflächiges Hyperboloid oder ein zweiflächiges Hyperboloid dar, jenachdem die Grössen m^2, n^2, p^2 sämmtlich positiv, oder zwei derselben positiv und die dritte negativ, oder nur eine einzige positiv und die beiden übrigen negativ sind: ferner werden durch die Gleichung

$$(2.)\qquad \frac{x^2}{m^2-\lambda^2}+\frac{y^2}{n^2-\lambda^2}+\frac{z^2}{p^2-\lambda^2} = 1$$

bekanntlich für verschiedene positive oder negative Werthe von λ^2 die sämmtlichen Flächen eines der Fläche (1.) confocalen Systems dargestellt, und zwar für die besonderen Annahmen $\lambda^2 = m^2$, $= n^2$ oder $= p^2$ die einzelnen Grenzfälle, welche durch die (reellen oder imaginären) Focalcurven bestimmt sind.

Wegen der Bedeutung, welche gerade diese Grenzfälle für unsere Aufgabe haben, möge ein Beispiel durchgeführt werden. Nimmt man die Grössen m^2, n^2, p^2 als positiv an und zwar $m > n > p$, so stellt die Gleichung (2.) für den Werth $\lambda^2 = p^2$, wenn gleichzeitig $z = 0$ ist, weil das Glied $\frac{z^2}{p^2-\lambda^2}$ alsdann den unbestimmten Werth $\frac{0}{0}$ annimmt und als positiv oder negativ betrachtet werden kann, verschiedene Räume der xy-Ebene dar. Jenachdem man nämlich, unter Zugrundelegung stetig wachsender Werthe von λ^2, den besonderen Werth p^2 dieser Grösse als die Reihe der confocalen Ellipsoide, welche den Werthen von $\lambda^2 < p^2$ entsprechen, beschliessend, oder die Reihe der confocalen einflächigen Hyperboloide, welche den Werthen $\lambda^2 > p^2$ und $< n^2$ zugehören, beginnend ansieht, entsprechen der Gleichung (2.) entweder die sämmtlichen Punkte der xy-Ebene innerhalb oder ausserhalb der Focalellipse

$$\frac{x^2}{m^2-p^2}+\frac{y^2}{n^2-p^2} = 1, \quad z = 0,$$

so dass man im Anschluss an die *Jacobi*sche Einführung der Namen Grenzellipse oder Grenzhyperbel in der Ebene, den durch die Gleichung (2.) für den Fall $\lambda^2 = p^2$ und

$z=0$ ausgedrückten Theil der xy-Ebene Grenzellipsoid oder Grenzhyperboloid nennen kann, jenachdem man dem Gliede $\frac{z^2}{p^2-\lambda^2}$ ein positives oder negatives Zeichen beilegt.

Ebenso werden durch die Gleichung (2.) für die Annahme $\lambda^2=n^2$, $y=0$ die sämmtlichen Punkte der xz-Ebene dargestellt, und zwar wenn man dem Gliede $\frac{y^2}{\lambda^2-n^2}=\frac{0}{0}$ positive Werthe beilegt, vermöge der Ungleichheit

$$\frac{x^2}{m^2-n^2}-\frac{z^2}{n^2-p^2}<1$$

die sämmtlichen Punkte innerhalb der Focalhyperbel, und wenn das unbestimmte Glied $\frac{y^2}{\lambda^2-n^2}=\frac{0}{0}$ ein negatives Zeichen erhält, vermöge der Ungleichheit

$$\frac{x^2}{m^2-n^2}-\frac{z^2}{n^2-p^2}>1$$

alle Punkte der xz-Ebene, welche vom Mittelpunkte aus gerechnet jenseits der Focalhyperbel liegen. Die Annahme endlich $\lambda^2=m^2$, $x=0$ ergiebt die sämmtlichen Punkte der yz-Ebene, und zwar wenn man das alsdann unbestimmte Glied $\frac{x^2}{\lambda^2-m^2}$ als positiv annimmt, vermöge der Ungleichheit

$$\frac{y^2}{m^2-n^2}+\frac{z^2}{m^2-p^2}>1$$

alle Punkte dieser Ebene, während die negativen Werthe des unbestimmten Gliedes $\frac{x^2}{\lambda^2-m^2}$ keine geometrische Bedeutung mehr zulassen.

Wendet man nun das *Ivory*sche Theorem, „dass die Verbindungslinie beliebiger zwei auf confocalen Flächen zweiten Grades liegender Punkte gleich der Verbindungslinie der beiden ihnen in denselben Flächen conjugirten Punkte ist", auf die Fläche (1.) und einen der Grenzfälle der Fläche (2.) an und zwar in der Weise, dass man auf der letzteren, z. B. im Innern der Focalellipse, drei beliebige Punkte A', B', C' annimmt, welchen auf der Fläche (1.) als conjugirt die Punkte A, B, C zugehören, die ersteren als Eckpunkte der Basis einer dreiseitigen Pyramide $A'B'C'P$, die letzteren als Eckpunkte der Basis einer zweiten dreiseitigen Pyramide $ABCQ$ *), deren Spitzen P und Q ebenfalls conjugirte Punkte, bezüglich auf den Flächen (1.) und (2.), sind: wenn jetzt die Spitze Q die Grenzfläche (2.), d. h. die Ebene der Focalellipse, durchläuft, so beschreibt die Spitze P der ersten Pyramide die Fläche (1.). Von dieser Betrachtung ausgehend giebt *Jacobi* (Cr. J. Bd. XII, pag. 139) seine allgemeine Erzeugungsart der Flächen des zweiten Grades, wie folgt:

„Werden im Raume irgend drei feste Punkte A', B', C' und irgend drei andere, jenen beziehlich entsprechende, feste Punkte A, B, C angenommen und werden in Rücksicht auf diese Fundamentalpunkte andere entsprechende Punkte P, Q so bestimmt, dass ihre Abstände von jenen respective gleich sind, d. h. dass

$$PA'=QA,\quad PB'=QB,\quad PC'=QC,$$

so hat man ein Correlativsystem, worin der Punkt P irgend eine Fläche zweiten Grades beschreibt, wenn der Punkt Q sich in einer Ebene bewegt."

Auf diesen allgemeinen Satz beziehen sich die am Schlusse des zweiten Bruchstücks befindlichen Entwicklungen *Jacobis*.

Wenn im Besonderen die Eckpunkte der ersten Basis A', B', C' auf dem Umfange eines Focalkegelschnitts, z. B. der Focalellipse, liegen, so sind die Eckpunkte

---

*) Es ist hier die Bezeichnung eingeführt, welche *Jacobi* in dem zweiten Bruchstück festhält.

A, B, C der zweiten Basis die conjugirten Punkte auf dem xy-Schnitt des Ellipsoids (1.), wenn wir auch hier die Annahme $m > n > p$ festhalten. In der eben angegebenen Erzeugungsweise tritt alsdann nur die Aenderung ein, dass die Ebene, welche der Punkt Q durchläuft, mit der Ebene der Basis ABC zusammenfällt, d. h. dass das Volumen der dreiseitigen Pyramide $ABCQ$ für alle Lagen des Punktes Q verschwindet. Die Eckpunkte A, B, C und A', B', C' sind nunmehr zugleich conjugirte Punkte confocaler Kegelschnitte, beispielsweise der beiden Ellipsen

$$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1, \quad z=0,$$

$$\frac{x^2}{m^2-p^2}+\frac{y^2}{n^2-p^2}=1, \quad z=0,$$

und es stimmen die Hauptachsen eines dieser Kegelschnitte der Länge und Lage nach überein mit den Hauptachsen eines Hauptschnitts der durch den Punkt P beschriebenen Fläche (1.), während durch die Differenz der Quadrate der entsprechenden Halbachsen der beiden Kegelschnitte zugleich das Quadrat der zu dem entsprechenden Hauptschnitte senkrechten Halbachse der Fläche (1.) bestimmt wird.

Es kommt demnach die Aufgabe, die Art der von der Spitze P erzeugten Fläche zu bestimmen, wenn die beiden Basen ABC und $A'B'C'$ gegeben sind, und der dem Punkte P conjugirte Punkt, d. h. für welchen nach dem *Ivory*schen Theorem

$$PA' = QA, \quad PB' = QB, \quad PC' = QC,$$

die Ebene des Dreiecks ABC durchläuft, hinaus auf die Lösung der Aufgabe, mit welcher das folgende Bruchstück beginnt.

Zweites Bruchstück.

Um zwei beliebige Dreiecke ABC und $A'B'C'$ Kegelschnitte zu beschreiben, welche gleiche Excentricität haben, und in welchen A und A', B und B', C und C' conjugirte Punkte sind.

Wenn in zwei ebenen Figuren sich je zwei Punkte so entsprechen, dass ihre Abscissen sich wie $m:m'$ und ihre Ordinaten wie $n:n'$ verhalten, so verhält sich der Inhalt eines zwischen drei Punkten der einen Figur beschriebenen Dreieckes zum Inhalt des zwischen den entsprechenden Punkten der andern Figur beschriebenen Dreieckes wie $mn:m'n'$. Sind daher die auf die Hauptachsen bezogenen Gleichungen der beiden gesuchten Kegelschnitte

$$\frac{x^2}{mm}+\frac{y^2}{nn}=1, \qquad \frac{x^2}{m'm'}+\frac{y^2}{n'n'}=1,$$

so hat man:

$$ABC:A'B'C' = mn:m'n'.$$

Aus demselben Grunde hat man, wenn man O und O' die Mittelpunkte der beiden Kegelschnitte nennt,

$$\frac{O'B'C'}{OBC}=\frac{O'C'A'}{OCA}=\frac{O'A'B'}{OAB}=\frac{m'n'}{mn},$$

und daher

$$OBC : OCA : OAB = O'B'C' : O'C'A' : O'A'B'.$$

Der Punkt O wird der Schwerpunkt der Punkte A, B, C, wenn man an diesen den Dreiecken OBC, OCA, OAB proportionale Gewichte anbringt. Ebenso wird O' der Schwerpunkt der Punkte A', B', C', wenn man an ihnen den Dreiecken $O'B'C'$, $O'C'A'$, $O'A'B'$ proportionale Gewichte anbringt. *Die Gewichte, welche man an A, B, C anzubringen hat, um den Punkt O zum Schwerpunkt zu erhalten, können daher den Gewichten gleich gesetzt werden, welche man an A', B', C' anzubringen hat, um den Punkt O' zu ihrem Schwerpunkt zu erhalten.*

Die an A, B, C angebrachten Gewichte mögen α, β, γ heissen, und ihre Summe μ, so wird die Entfernung eines beliebigen Punktes P vom Schwerpunkt O durch die bekannte Formel:

$$\mu.PO^2 = \alpha.PA^2+\beta.PB^2+\gamma.PC^2-\frac{1}{\mu}\{\beta\gamma.BC^2+\gamma\alpha.CA^2+\alpha\beta.AB^2\}$$

gegeben.

Ebenso wird die Entfernung eines Punktes P' von O' durch die Formel:

$$\mu.P'O'^2 = \alpha.P'A'^2+\beta.P'B'^2+\gamma.P'C'^2-\frac{1}{\mu}\{\beta\gamma.B'C'^2+\gamma\alpha.C'A'^2+\alpha\beta.A'B'^2\}$$

gegeben. Sind P und P' zwei conjugirte Punkte, und ist

$$p^2 = m^2-m'^2 = n^2-n'^2,$$

so hat man auch

$$p^2 = PO^2-P'O'^2,$$

und daher, wenn man die angegebenen Werthe von μPO^2 und $\mu P'O'^2$ substituirt und der Kürze halber

$$BC^2-B'C'^2 = u, \qquad CA^2-C'A'^2 = v, \qquad AB^2-A'B'^2 = w$$

setzt,

$$\mu p^2 = \alpha(PA^2-P'A'^2)+\beta(PB^2-P'B'^2)+\gamma(PC^2-P'C'^2)-\frac{1}{\mu}\{\beta\gamma.u+\gamma\alpha.v+\alpha\beta.w\}.$$

Lässt man P nach und nach mit A, B, C und gleichzeitig P' mit A', B', C' zusammenfallen, so giebt diese Formel die Gleichungen:

$$\mu p^2+\frac{1}{\mu}(\beta\gamma.u+\gamma\alpha.v+\alpha\beta.w) = \beta w+\gamma v = \gamma u+\alpha w = \alpha v+\beta u.$$

Aus diesen Gleichungen folgt, dass die Gewichte α, β, γ den Grössen $u(v+w-u)$, $v(w+u-v)$, $w(u+v-w)$ proportional sind. Setzt man sie diesen Grössen *gleich*, so folgen aus den Werthen

$$u(v+w-u) = \alpha, \qquad v(w+u-v) = \beta, \qquad w(u+v-w) = \gamma$$

die Gleichungen,

$$\mu = 2(vw+wu+uv)-u^2-v^2-w^2,$$

$$\mu p^2+\frac{1}{\mu}(\beta\gamma.u+\gamma\alpha.v+\alpha\beta.w) = 2uvw;$$

ferner

$$\beta\gamma.u+\gamma\alpha.v+\alpha\beta.w = uvw[u^2+v^2+w^2-(v-w)^2-(w-u)^2-(u-v)^2] = uvw\mu$$

und hieraus

$$p^2 = \frac{uvw}{\mu}.$$

Wir haben daher den Satz:

Wenn zwei den beliebig gegebenen Dreiecken ABC und A'B'C' umschriebene Kegelschnitte gleiche Excentricität haben, und in ihnen A und A', B und B', C und C' conjugirte Punkte sind, so erhält man ihre Mittelpunkte O und O' als die Schwerpunkte von A, B, C und von A', B', C', wenn man in diesen drei Punkten respective die Gewichte

$$u(v+w-u), \quad v(w+u-v), \quad w(u+v-w)$$

anbringt, wo

$$u = BC^2-B'C'^2, \quad v = CA^2-C'A'^2, \quad w = AB^2-A'B'^2$$

ist, und es wird die Differenz der Quadrate der halben grossen oder der halben kleinen Achsen der Kegelschnitte:

$$\frac{uvw}{2(vw+wu+uv)-u^2-v^2-w^2}.$$

Nimmt man in jedem der beiden Kegelschnitte die beiden Hauptachsen zu Coordinatenachsen und setzt die Coordinaten von B und C

$$m\cos\eta, \quad n\sin\eta \quad \text{und} \quad m\cos\vartheta, \quad n\sin\vartheta,$$

so werden die Coordinaten von B' und C'

$$m'\cos\eta, \quad n'\sin\eta \quad \text{und} \quad m'\cos\vartheta, \quad n'\sin\vartheta;$$

hieraus folgt, da $m^2-m'^2 = n^2-n'^2 = p^2$,

$$u = BC^2-B'C'^2 = p^2((\cos\eta-\cos\vartheta)^2+(\sin\eta-\sin\vartheta)^2)$$

$$= 2p^2(1-\cos(\eta-\vartheta)) = 4p^2\sin^2\frac{\eta-\vartheta}{2}.$$

Nennt man Δ den Inhalt des gegebenen Dreieckes ABC, so wird der Inhalt des Dreieckes OBC gleich $\frac{\alpha\Delta}{\mu}$. Andrerseits wird der Inhalt desselben Dreiecks

$$\pm\tfrac{1}{2}mn\sin(\eta-\vartheta)$$

und daher

$$\frac{\alpha^2\Delta^2}{m^2n^2\mu^2} = \tfrac{1}{4}\sin^2(\eta-\vartheta);$$

dividirt man diese Gleichung durch

$$\frac{u}{4p^2} = \sin^2\frac{\eta-\vartheta}{2},$$

so erhält man:

$$\frac{4p^2\Delta\alpha^2}{m^2n^2\mu^2u} = \cos^2\frac{\eta-\vartheta}{2}$$

und daher

$$\frac{4p^2\Delta^2\alpha^2}{m^2n^2\mu^2u} = 1-\frac{u}{4p^2}.$$

Quadrirt man den Werth von $\alpha = u(v+w-u)$ und vergleicht den für μ gefundenen Werth, so ergiebt sich

$$\alpha^2 = u^2(4vw-\mu) = 4u^2vw\left(1-\frac{u}{4p^2}\right).$$

Die vorstehende Gleichung verwandelt sich daher nach Division durch $1-\frac{u}{4p^2}$ in die folgende:

$$\frac{16p^2\Delta^2uvw}{m^2n^2\mu^2} = \frac{16\Delta^2u^2v^2w^2}{m^2n^2\mu^3} = 1 \text{ *)}.$$

Nennt man Δ' den Inhalt des Dreieckes $A'B'C'$, so erhält man eine ganz analoge Gleichung. Aus den beiden so gefundenen Gleichungen

$$m^2n^2 = \frac{16u^2v^2w^2}{\mu^3}\Delta^2 = \frac{16p^4}{\mu}\Delta^2,$$

$$m'^2n'^2 = \frac{16u^2v^2w^2}{\mu^3}\Delta'^2 = \frac{16p^4}{\mu}\Delta'^2$$

folgt, wenn man abzieht und durch p^2 dividirt:

$$m^2+n^2-p^2 = \frac{16p^2}{\mu}(\Delta^2-\Delta'^2)$$

und daher

$$m^2+n^2 = \frac{16p^2}{\mu}\left(\Delta^2-\Delta'^2+\frac{\mu}{16}\right).$$

Hieraus folgt die vierte Potenz der halben Excentricität beider Kegelschnitte:

$$(m^2-n^2)^2 = \frac{256p^4}{\mu^2}(\Delta^2-\Delta'^2)^2-\frac{32p^4}{\mu}(\Delta^2+\Delta'^2)+p^4$$

oder

$$\frac{\mu^2(m^2-n^2)^2}{p^4} = (16(\Delta^2+\Delta'^2)-\mu)^2-1024\Delta^2\Delta'^2$$
$$= (16(\Delta+\Delta')^2-\mu)(16(\Delta-\Delta')^2-\mu).$$

---

*) Die Herleitung dieser Gleichung wäre nur dann unstatthaft, wenn $u=v=w=4p^2$. Wenn $u=v=w$, wird aber $\mu=3u^2$, $p^2=\frac{1}{3}u$, es müsste also $u=v=w=0$ sein, oder beide Dreiecke congruent werden, in welchem Falle die ganze Aufgabe unstatthaft ist. J.

Man erhält aber auch einen merkwürdigen Ausdruck, wenn man die vorstehende Grösse durch die unmittelbar gegebenen Seiten der Dreiecke ABC und $A'B'C'$ darstellt. Es sei

$$BC = a, \quad CA = b, \quad AB = c,$$
$$B'C' = a', \quad C'A' = b', \quad A'B' = c',$$

so wird

$$16\Delta^2 = 2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)-a^4-b^4-c^4,$$
$$16\Delta'^2 = 2(b'^2c'^2+c'^2a'^2+a'^2b'^2)-a'^4-b'^4-c'^4,$$
$$\mu = \begin{cases} 2\{(b^2-b'^2)(c^2-c'^2)+(c^2-c'^2)(a^2-a'^2)+(a^2-a'^2)(b^2-b'^2)\} \\ -(a^2-a'^2)^2-(b^2-b'^2)^2-(c^2-c'^2)^2 \end{cases}$$

und daher

$$16\left(\Delta^2+\Delta'^2-\frac{\mu}{16}\right) = 2\{a'^2(b^2+c^2-a^2)+b'^2(c^2+a^2-b^2)+c'^2(a^2+b^2-c^2)\}.$$

Bemerkt man die Formeln

$$(b^2+c^2-a^2)^2 = 4b^2c^2-16\Delta^2,$$
$$(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2) = a^4-b^4-c^4+2b^2c^2 = 16\Delta^2-2a^2(b^2+c^2-a^2)$$

und die ähnlichen, so erhält man

$$256\left(\Delta^2+\Delta'^2-\frac{\mu}{16}\right)^2-1024\Delta^2\Delta'^2$$
$$= \begin{cases} 16(a'^4b^2c^2+b'^4c^2a^2+c'^4a^2b^2) \\ -16\{b'^2c'^2a^2(b^2+c^2-a^2)+c'^2a'^2b^2(c^2+a^2-b^2)+a'^2b'^2c^2(a^2+b^2-c^2)\}. \end{cases}$$

Setzt man der Kürze halber

$$b^2c'^2-c^2b'^2 = \mathfrak{A}, \quad c^2a'^2-a^2c'^2 = \mathfrak{B}, \quad a^2b'^2-b^2a'^2 = \mathfrak{C},$$

so kann man dem vorstehenden Ausdruck folgende elegante Form geben

$$\mu^4\frac{(m^2-n^2)^2}{u^2v^2w^2} = -16(\mathfrak{B}\mathfrak{C}+\mathfrak{C}\mathfrak{A}+\mathfrak{A}\mathfrak{B}).$$

Aus der ganzen Natur der Aufgabe geht hervor, dass die vorstehende Grösse positiv ist. Man sieht es aber nicht so leicht aus der Art, wie dieselbe zusammengesetzt ist, daher ich dies kurz beweisen will.

Man setze $\frac{b^2}{b'^2}-\frac{c^2}{c'^2} = d$, $\frac{c^2}{c'^2}-\frac{a^2}{a'^2} = d'$, $\frac{a^2}{a'^2}-\frac{b^2}{b'^2} = d''$,

so hat man $d+d'+d'' = 0$, ferner

$$\mathfrak{A} = b'^2c'^2d, \quad \mathfrak{B} = c'^2a'^2d', \quad \mathfrak{C} = a'^2b'^2d''$$

und daher:

$$\mathfrak{B}\mathfrak{C}+\mathfrak{C}\mathfrak{A}+\mathfrak{A}\mathfrak{B} = a'^2b'^2c'^2(a'^2d'd''+b'^2d''d+c'^2dd').$$

Es ist daher zu beweisen, dass der in Klammern eingeschlossene Ausdruck immer negativ ist. Da $d+d'+d''=0$, so müssen zwei der Grössen dasselbe Zeichen haben, während die dritte Grösse das entgegengesetzte Zeichen hat. Haben z. B. d' und d'' dasselbe Zeichen, so sieht man, dass die in Klammern eingeschlossene Grösse negativ wird, wenn man ihr die Form giebt:

$$d'd''(a'^2-b'^2-c'^2)-b'^2d''^2-c'^2d'^2 = -d'd''((b'+c')^2-a'^2)-(b'd''-c'd')^2,$$

da immer von den drei Seiten des Dreiecks $A'B'C'$ die Summe von zweien $b'+c'$ grösser als die dritte a', also $(b'+c')^2-a'^2$ positiv ist.

Wenn $m^2-n^2=m'^2-n'^2=0$, so muss man $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}=\mathfrak{C}$ haben, oder: *sollen die Kegelschnitte Kreise werden, so müssen die Dreiecke ABC und A'B'C' einander ähnlich sein.*

Aus den Gleichungen:

$$16\left(\Delta^2+\Delta'^2-\frac{\mu}{16}\right) = 2\{a'^2(b^2+c^2-a^2)+b'^2(c^2+a^2-b^2)+c'^2(a^2+b^2-c^2)\}$$
$$= 2\{a^2(b'^2+c'^2-a'^2)+b^2(c'^2+a'^2-b'^2)+c^2(a'^2+b'^2-c'^2)\}.$$
$$16\Delta^2 = a^2(b^2+c^2-a^2)+b^2(c^2+a^2-b^2)+c^2(a^2+b^2-c^2),$$
$$16\Delta'^2 = a'^2(b'^2+c'^2-a'^2)+b'^2(c'^2+a'^2-b'^2)+c'^2(a'^2+b'^2-c'^2)$$

folgt

$$\mu\frac{(m^2+n^2)}{2p^2} = 8\left(\Delta^2-\Delta'^2+\frac{\mu}{16}\right)$$
$$= u(b^2+c^2-a^2)+v(c^2+a^2-b^2)+w(a^2+b^2-c^2),$$
$$\mu\frac{(m'^2+n'^2)}{2p^2} = 8\left(\Delta^2-\Delta'^2-\frac{\mu}{16}\right)$$
$$= u(b'^2+c'^2-a'^2)+v(c'^2+a'^2-b'^2)+w(a'^2+b'^2-c'^2).$$

Wenn μ und u, v, w positiv sind, müssen diese beiden Ausdrücke ebenfalls positiv werden, was von dem ersten zu beweisen hinreicht. Wenn die drei Grössen $b^2+c^2-a^2$, $c^2+a^2-b^2$, $a^2+b^2-c^2$ positiv sind, erhellt dies von selbst. Es kann aber eine der drei Grössen, z. B. $b^2+c^2-a^2$, negativ werden. In diesem Falle stelle man den Ausdruck so dar:

$$u(b^2+c^2-a^2)+v(c^2+a^2-b^2)+w(a^2+b^2-c^2)$$
$$= 2(vc^2+wb^2)-(a^2-b^2-c^2)(u-v-w),$$

wodurch man sieht, dass er positiv ist, wenn $u<v+w$. Ist $u>v+w$, so hat man doch $u-v-w<2\sqrt{vw}$, denn damit

$$\mu = (\sqrt{u}+\sqrt{v}+\sqrt{w})(\sqrt{v}+\sqrt{w}-\sqrt{u})(\sqrt{w}+\sqrt{u}-\sqrt{v})(\sqrt{u}+\sqrt{v}-\sqrt{w})$$

positiv sei, muss von den drei Grössen $\sqrt{u}$, $\sqrt{v}$, $\sqrt{w}$ eine immer kleiner als die Summe der beiden andern sein. Ebenso hat man, wenn $a^2 > b^2+c^2$, doch $a^2-b^2-c^2 < 2bc$ und daher $(a^2-b^2-c^2)(u-v-w) < 4bc\sqrt{vw}$. Da nun $2(vc^2+wb^2) > 4bc\sqrt{vw}$, so wird der vorgelegte Ausdruck immer positiv. Man leitet hieraus leicht die Folgerung ab, dass die Grössen m^2 und n^2 nie zugleich negativ werden können.

Wenn μ positiv ist, so müssen die Seiten des Dreiecks ABC alle grösser oder alle kleiner sein als die entsprechenden Seiten des Dreiecks $A'B'C'$. Ferner müssen die Differenzen der Quadrate der entsprechenden Seiten beider Dreiecke, oder die Grössen u, v, w, so beschaffen sein, dass man $\sqrt{\pm u}$, $\sqrt{\pm v}$, $\sqrt{\pm w}$ zu Seiten eines Dreiecks nehmen könne, welches ich $A''B''C''$ nennen und dessen Inhalt ich mit $\varDelta''$ bezeichnen will. Man kann mit Hilfe dieses Dreiecks mehrere der angegebenen Formeln elegant construiren. Zuerst wird

$$\mu = 16\varDelta''\varDelta'',$$

ferner, da $p = \frac{\sqrt{uvw}}{4\varDelta''}$, *so wird p gleich dem Radius des dem Dreieck $A''B''C''$ umschriebenen Kreises. Die Gewichte* α, β, γ verhalten sich ferner, wie die Sinus der doppelten Winkel des Dreiecks $A''B''C''$, oder *verhalten sich wie die Gewichte an den Ecken des Dreiecks $A''B''C''$, deren Schwerpunkt der Mittelpunkt des diesem umschriebenen Kreises ist.*

Man hat ferner

$$\frac{p^2}{\varDelta''} = \frac{mn}{\varDelta} = \frac{m'n'}{\varDelta'},$$

$$\frac{\varDelta''^4(m^2-n^2)^2}{p^4} = (\varDelta+\varDelta'+\varDelta'')(\varDelta+\varDelta'-\varDelta'')(\varDelta-\varDelta'+\varDelta'')(\varDelta-\varDelta'-\varDelta'').$$

Diese letzte Formel lehrt, *dass unter den Dreiecken $\varDelta$, $\varDelta'$, $\varDelta''$ eins grösser als die Summe der beiden andern sein muss.* Die Combination beider Formeln führt auf die Gleichung:

$$p^4(m^2-n^2)^2 = (mn+m'n'+pp)(mn+m'n'-pp)(mn-m'n'+pp)(mn-m'n'-pp),$$

welche durch die Substitution der Werthe $m'^2 = m^2-p^2$, $n'^2 = n^2-p^2$ identisch wird.

Aus den Gleichungen

$$m^2n^2 = \frac{16u^2v^2w^2\varDelta^2}{\mu^3}, \quad m'^2n'^2 = \frac{16u^2v^2w^2\varDelta'^2}{\mu^3}$$

folgt, *dass die beiden Kegelschnitte Ellipsen oder Hyperbeln sind, jenachdem μ positiv oder negativ ist.* Denn es tritt das eine oder das andere ein,

jenachdem m^2n^2 positiv oder negativ ist. Die vorstehenden Constructionen gelten daher für den Fall, dass die Kegelschnitte Ellipsen sind, und umgekehrt: *es werden die Kegelschnitte Ellipsen, wenn das Hilfsdreieck $A''B''C''$ reell wird.*

Ich will das im Vorstehenden für die Beschaffenheit der Kegelschnitte gefundene Kennzeichen noch auf eine andere Art beweisen, und zwar vermittelst eines schönen Satzes, welchen *Steiner* im XCIX^ten Bande des in Rom erscheinenden Giornale Arcadico bekannt gemacht hat *). Wenn man nämlich um ein Dreieck ABC einen Kegelschnitt beschreibt, dessen Mittelpunkt ein gegebener Punkt O ist, und das Dreieck $MM'M''$, dessen Ecken die Mitten der Seiten des Dreiecks ABC sind, construirt, so wird zufolge dieses Satzes der Kegelschnitt eine Ellipse, wenn O im Innern des Dreiecks $MM'M''$ liegt oder in einem der drei unendlichen Räume, die an einer der Ecken des Dreiecks $MM'M''$ von den Verlängerungen seiner zwei dort zusammenstossenden Seiten eingeschlossen werden; wenn dagegen der Mittelpunkt O in einem der drei unendlichen Räume liegt, welche von einer der Seiten des Dreiecks und den Verlängerungen der beiden andern umschlossen werden, so wird der Kegelschnitt eine Hyperbel. Ist O als Schwerpunkt der drei Punkte A, B, C gegeben, wenn man in ihnen die Gewichte α, β, γ anbringt, und sind M, M', M'' die Mitten der Seiten BC, CA, AB, so wird O auch der Schwerpunkt der Punkte M, M', M'', wenn man in ihnen die Gewichte

$$\alpha' = \beta+\gamma-\alpha, \qquad \beta' = \gamma+\alpha-\beta, \qquad \gamma' = \alpha+\beta-\gamma$$

anbringt. Haben diese drei Gewichte α', β', γ' dasselbe Zeichen, so fällt ihr Schwerpunkt O in das Innere des Dreiecks $MM'M''$. Haben zwei Gewichte, z. B. β' und γ', dasselbe Zeichen, aber das dritte Gewicht α' das entgegengesetzte, so fällt O entweder in den bei M oder in den über $M'M''$ gebildeten unendlichen Raum, jenachdem $\alpha'+\beta'+\gamma'$ dasselbe Zeichen wie α' oder wie β' und γ' hat. Man kann daher sagen, dass der Kegelschnitt eine Ellipse oder Hyperbel wird, jenachdem $\alpha'+\beta'+\gamma'$ dasselbe oder das entgegengesetzte Zeichen wie $\alpha'\beta'\gamma'$ hat, oder man hat den Satz:

Wenn ein Kegelschnitt durch drei mit den Gewichten α, β, γ behaftete Punkte geht und ihren Schwerpunkt zum Mittelpunkt hat, so wird der Kegelschnitt eine Ellipse oder Hyperbel, jenachdem die Grösse

$$(\alpha+\beta+\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha-\beta)(\alpha+\beta-\gamma)$$

positiv oder negativ ist.

---

*) Wieder abgedruckt im 30ten Bande dieses Journals p. 97.

Für die oben (S. 191) angegebenen Werthe von α, β, γ wird

$$\alpha' = \beta+\gamma-\alpha = (u+v-w)(u-v+w) = \frac{\beta\gamma}{vw},$$

$$\beta' = \gamma+\alpha-\beta = (v+w-u)(v-w+u) = \frac{\gamma\alpha}{wu},$$

$$\gamma' = \alpha+\beta-\gamma = (w+u-v)(w-u+v) = \frac{\alpha\beta}{uv}.$$

Da das Product dieser drei Grössen immer positiv ist, so hat das Product der vier Grössen in dem eben bewiesenen Satze dasselbe Zeichen wie $\alpha+\beta+\gamma=\mu$, und es wird daher der Kegelschnitt eine Ellipse oder Hyperbel, jenachdem μ positiv oder negativ ist. Man kann noch bemerken, dass der Punkt O nie in die Seiten des Dreiecks $MM'M''$ oder in ihre Verlängerungen fallen kann, wenn er nicht einer der Punkte M, M', M'' selber wird; denn es müsste in jenem Falle eins der Gewichte in den Punkten M, M', M'' zufolge der Beschaffenheit der Werthe dieser Gewichte verschwinden, welches aber nicht möglich ist, ohne dass noch ein anderes Gewicht verschwindet, in welchem Falle der Schwerpunkt mit dem dritten Punkte zusammenfällt. Wird z. B. $v+w-u=0$, so verschwinden β', γ', α; es wird ferner $\beta=\gamma=2vw$, $\mu=4vw$,

$$p^2 = \tfrac{1}{4}u, \qquad m^2+n^2 = u\left(\frac{c^2}{w}+\frac{b^2}{v}\right), \qquad m^2n^2 = \frac{u^2\Delta}{4vw}.$$

Die Kegelschnitte bleiben in diesem Falle bei unserer Aufgabe vollkommen bestimmt, obgleich im Allgemeinen die Aufgabe, einen Kegelschnitt mit gegebenem Mittelpunkt einem gegebenen Dreieck zu umschreiben, *unbestimmt* wird, wenn der gegebene Mittelpunkt in die Mitte einer der Seiten des Dreiecks fällt. Der hier betrachtete Fall tritt ein, *wenn das Hilfsdreieck $A''B''C''$ rechtwinklig ist.*

Setzt man wieder, wie oben, die Coordinaten der Punkte B und C gleich

$$m\cos\eta,\quad n\sin\eta \quad\text{und}\quad m\cos\vartheta,\quad n\sin\vartheta,$$

so wird die Tangente des Winkels, welchen BC mit der grossen Achse bildet,

$$\frac{n(\sin\eta-\sin\vartheta)}{m(\cos\eta-\cos\vartheta)} = \frac{n}{m}\,\frac{\sin\left(\frac{\eta+\vartheta}{2}+90^\circ\right)}{\cos\left(\frac{\eta+\vartheta}{2}+90^\circ\right)}.$$

Der Punkt D, in welchem der mit BC parallele Durchmesser den Kegelschnitt trifft, hat daher die Coordinaten:

$$m\cos\left(\frac{\eta+\vartheta}{2}+90^\circ\right), \qquad n\sin\left(\frac{\eta+\vartheta}{2}+90^\circ\right),$$

und es wird

$$OD^2 = m^2 \sin^2\frac{\eta+\vartheta}{2} + n^2\cos^2\frac{\eta+\vartheta}{2} = \frac{BC^2}{\sin^2\frac{\eta-\vartheta}{2}} = \frac{a^2}{\sin^2\frac{\eta-\vartheta}{2}}.$$

Substituirt man hierin den Werth für $\sin^2\frac{\eta-\vartheta}{2} = \frac{u}{4p^2} = \frac{\mu}{4vw}$ und bildet die beiden andern ähnlichen Formeln, so findet man für die Quadrate der den Seiten BC, CA, AB parallelen halben Durchmesser die Werthe:

$$\frac{vwa^2}{\mu},\quad \frac{wub^2}{\mu},\quad \frac{uvc^2}{\mu}.$$

Ebenso werden die Quadrate der den Seiten $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ parallelen halben Durchmesser

$$\frac{vwa'^2}{\mu},\quad \frac{wub'^2}{\mu},\quad \frac{uvc'^2}{\mu},$$

und die Differenz je zweier entsprechenden Grössen wird

$$\frac{uvw}{\mu} = p^2. \text{ —}$$

Die beiden Kegelschnitte sind im Allgemeinen schon durch drei ihrer Punkte A, B, C, A', B', C', und durch ihre Mittelpunkte O und O' vollkommen bestimmt. Legt man ihre Mittelpunkte und grossen Achsen in einander, so erhält man diejenige Lage, in welcher ihre beiden Brennpunkte zusammenfallen, auf welche sich unsere ursprüngliche Betrachtung bezog. In dieser Lage wird nach dem *Ivory*schen Theorem

$$BC' = CB',\quad CA' = AC',\quad AB' = BA'.$$

Es ist also durch die angestellten Untersuchungen auch die Aufgabe gelöst:

Zwei beliebige Dreiecke ABC und $A'B'C'$ in solche gegenseitige Lage zu bringen, dass $BC' = CB'$, $CA' = AC'$, $AB' = BA'$ wird.

Setzt man nämlich, wie oben,

$$BC^2 - B'C'^2 = u,\quad CA^2 - C'A'^2 = v,\quad AB^2 - A'B'^2 = w,$$

und bringt in A, B, C und ebenso in A', B', C' die Gewichte

$$u(v+w-u),\quad v(w+u-v),\quad w(u+v-w)$$

an, deren Schwerpunkte O und O' seien, so sucht man die grossen Achsen der beiden Kegelschnitte, die den Dreiecken ABC, $A'B'C'$ umschrieben sind und respective O und O' zu Mittelpunkten haben. Denkt man sich die Punkte

O und O' und diese grossen Achsen in den Dreiecken fest und legt sie auf einander, so erhalten die Dreiecke die verlangte Lage. —

Eine besondere Betrachtung macht der Fall nothwendig, wenn zwei correspondirende Seiten der beiden Basisdreiecke einander gleich sind. Denn die Analysis, durch welche oben die Gewichte α, β, γ und der Werth von p^2 gefunden wurden, setzt voraus, dass keine der Grössen u, v, w verschwinde. Es sei z. B. $BC = B'C'$, also $u = 0$, so geben die gefundenen Formeln

$$u = 0, \quad \alpha = 0, \quad p^2 = 0,$$
$$\beta = -v(v-w), \quad \gamma = w(v-w), \quad \mu = -(v-w)^2.$$

Die Verhältnisse von m^2, n^2, p^2 bleiben endlich. Die Punkte O und O' kommen in die Linien BC und $B'C'$ selbst zu liegen. Lässt man B mit B', C mit C' zusammenfallen, so fällt auch O in O'. Man findet dann diesen Punkt durch eine leichte Construction, indem man auf AA' in der Mitte von AA' ein Perpendikel errichtet, dessen Durchschnitt mit der Linie $B'C'$ den Punkt O giebt. Die beiden Kegelschnitte verwandeln sich in die Systeme zweier geraden Linien, von denen die eine BC, die beiden anderen OA und OA' sind. Die Oberfläche wird ein Kegel *), dessen Spitze O' und dessen Focallinien $O'A'$ und $B'C'$ sind. Dreht man das System der Linien OA, OB mit unverändertem Winkel um O nach OA' zu um den halben Winkel AOA', so erhält man die beiden Linien, in denen der Kegel von der Hauptebene $A'B'C'$ geschnitten wird, durch welche nebst den Brennlinien der Kegel bestimmt ist.

Wenn gleichzeitig $u = 0$, $v = w$, erhält man

$$\beta + \gamma = \alpha, \qquad p^2 = \tfrac{1}{4} v.$$

Eine der Grössen m^2 und n^2 wird unendlich, während die andere endlich bleibt. Nimmt man an, dass m unendlich wird, so giebt die aus den oben allgemein gefundenen Werthen folgende Gleichung

$$\frac{m^2 n^2}{m^2 + n^2 - p^2} = \frac{p^2 \Delta^2}{\Delta^2 - \Delta'^2}$$

für den besonderen Fall

$$n^2 = \frac{p^2 \Delta^2}{\Delta^2 - \Delta'^2} = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{v \Delta^2}{\Delta^2 - \Delta'^2}.$$

---

*) Es wird hierbei als bekannt vorausgesetzt, dass die Lage der Focallinien des Kegels, sowie derjenigen Linien, in welchen die erweiterte Ebene derselben den Kegel durchschneidet, eine derartige ist, dass sie dieselben Halbirungslinien haben, und dass jede zwei conjugirte Punkte auf diesen Linien von ihrem gemeinschaftlichen Schnittpunkte gleichweit entfernt sind. *H.*

Lässt man wieder B und C in B' und C' fallen, so ist AA' senkrecht auf $B'C'$; trifft AA' die Linie $B'C'$ in H', so hat man

$$v = AH'^2 - A'H'^2,$$

$$\frac{\Delta^2}{\Delta^2 - \Delta'^2} = \frac{AH'^2}{v}$$

und daher

$$n^2 = \tfrac{1}{4} AH'^2.$$

Die Fläche ist ein Cylinder*), dessen Kante durch den Punkt N', die Mitte von $A'H'$, geht und mit $B'C'$ parallel ist. Die Basis des Cylinders wird ein Kegelschnitt, dessen Gleichung

$$\frac{4y^2}{AH'^2} + \frac{4z^2}{AH'^2 - A'H'^2} = 1,$$

wo die Achse der y senkrecht auf $B'C'$ steht und immer die *grosse* Achse der Basis des Cylinders wird, die eine Ellipse oder Hyperbel ist, jenachdem A mehr oder weniger als A' von der Linie $B'C'$ entfernt ist. Die Punkte N' und A', H' werden der Mittelpunkt und die Brennpunkte dieser Basis. —

Die Fläche wird ein *Ellipsoid*, wenn m^2, n^2, p^2 positiv werden, also wenn μ, u, v, w positiv sind. Sie wird ein *continuirliches Hyperboloid*, wenn eine der Grössen m^2, n^2, p^2 negativ wird, während die andern positiv bleiben; also

a) wenn m^2 und n^2 positiv sind, also auch μ positiv ist, und wenn p^2 negativ ist, also u, v, w negativ sind;

b) wenn $m^2 n^2$ negativ ist, also μ negativ und p^2 positiv, also eine der Grössen u, v, w negativ ist, während die beiden andern positiv sind, oder alle drei u, v, w negativ sind, und von den Grössen $\sqrt{-u}$, $\sqrt{-v}$, $\sqrt{-w}$ eine grösser als die Summe der beiden andern ist.

Die Fläche wird ein *Hyperboloid mit zwei Flächen*, wenn eine der Grössen m^2, n^2, p^2 positiv ist, und die beiden andern negativ werden; also wenn $m^2 n^2$ und p^2 negativ werden, da m^2 und n^2, wie wir gesehen haben, nicht gleichzeitig negativ werden können. Dies erfordert die Bedingungen μ negativ und uvw positiv, also eine von ihnen positiv, die beiden andern negativ, oder es müssen alle drei positiv sein und eine der Grössen $\sqrt{u}$, $\sqrt{v}$, $\sqrt{w}$ grösser als die Summe der beiden andern.

*) In der That sind die Focallinien des Cylinders und diejenigen Linien, in denen die erweiterte Ebene derselben den Cylinder durchschneidet, zwei Systeme von parallelen Linien, deren gemeinschaftliche Mittellinie die Achse des Cylinders ist, und sind die Verbindungslinien jeder zwei conjugirten Punkte dieser Linien auf der Achse senkrecht. *H.*

Als Grenze des Ellipsoids und zweiflächigen Hyperboloids erhält man das *elliptische Paraboloid,* wenn u, v, w positiv sind und $\mu = 0$.

Als Grenze des continuirlichen Hyperboloids erhält man das *hyperbolische Paraboloid,* wenn u, v, w negativ sind und $\mu = 0$.

Man kann dies in folgenden Satz zusammenfassen.

Satz.

„Es seien zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ gegeben: in der Ebene von ABC nehme man einen beliebigen Punkt Q und construire über der Basis $A'B'C'$ mit den Kanten $A'P = AQ$, $B'P = BQ$, $C'P = CQ$ eine Pyramide: wenn der Punkt Q sich in der Ebene des Dreiecks ABC fortbewegt, beschreibt der Punkt P eine Fläche der zweiten Ordnung, deren eine Hauptebene die Ebene der Basis $A'B'C'$ ist, und deren eine Focalcurve dem Dreieck $A'B'C'$ umschrieben ist.

Diese Fläche ist

1) Ein *Ellipsoid,* wenn alle Seiten des Dreiecks ABC grösser als die entsprechenden Seiten des Dreiecks $A'B'C'$ sind, und man mit den Seiten $\sqrt{BC^2 - B'C'^2}$, $\sqrt{CA^2 - C'A'^2}$, $\sqrt{AB^2 - A'B'^2}$ ein Dreieck beschreiben kann.

2) Ein *einflächiges Hyperboloid,* wenn nur eine Seite des Dreiecks ABC oder alle drei kleiner als die entsprechenden Seiten des Dreiecks $A'B'C'$ sind.

3) Ein *zweiflächiges Hyperboloid,*
   a) wenn eine Seite des Dreiecks ABC grösser, die beiden andern kleiner als die entsprechenden Seiten des Dreiecks $A'B'C'$ sind;
   b) wenn alle Seiten des Dreiecks ABC grösser als die entsprechenden Seiten des Dreiecks $A'B'C'$ sind, man aber mit den Seiten

$$\sqrt{BC^2 - B'C'^2}, \quad \sqrt{CA^2 - C'A'^2}, \quad \sqrt{AB^2 - A'B'^2}$$

   kein Dreieck construiren kann.

4) Ein *elliptisches* oder *hyperbolisches Paraboloid,* wenn die Seiten des Dreiecks ABC alle grösser oder alle kleiner sind als die entsprechenden des Dreiecks $A'B'C'$ und von den Quadratwurzeln der Differenzen der Quadrate der entsprechenden Seiten die eine gleich der Summe der beiden andern ist.

5) Eine *Umdrehungsfläche,* wenn die beiden Dreiecke ABC und $A'B'C'$ einander ähnlich sind, und zwar ist die Ebene der Basis $A'B'C'$ selber immer die Hauptebene, welche Kreisschnitte giebt.

6) Ein *Kegel,* wenn zwei entsprechende Seiten der Basen gleich sind.
7) Ein *Cylinder,* wenn ausserdem noch die Differenz der Quadrate der beiden andern Seiten gleich ist.“ —

Ich will jetzt den allgemeineren Fall behandeln, wo die Spitze der über der einen festen Basis errichteten Pyramide sich in einer beliebig gegebenen Ebene bewegt. Es sei ABC die Projection dieser Basis auf die gegebene Ebene, und h, i, k seien die Quadrate der Höhen ihrer Ecken über dieser Ebene. Denkt man sich die beiden Basen in solcher Lage, dass ihre Ecken drei Paare conjugirter Punkte zweier Ellipsoide sind, deren Gleichungen

$$\frac{xx}{mm}+\frac{yy}{nn}+\frac{zz}{pp}=1, \qquad \frac{xx}{m'm'}+\frac{yy}{n'n'}+\frac{zz}{p'p'}=1$$

sind, so werden ABC und die andere Basis $A'B'C'$ in einer Hauptebene, der Ebene der x und y, liegen und wieder die x-Coordinaten der entsprechenden Punkte der Dreiecke ABC und $A'B'C'$ sich wie $m:m'$, die y-Coordinaten wie $n:n'$ verhalten, woraus, wenn O der Mittelpunkt der Fläche ist, wieder folgt, dass die Dreiecke OBC, OCA, OAB sich wie die Dreiecke $OB'C'$, $OC'A'$, $OA'B'$ verhalten. Hieraus folgt ebenso wie oben, dass, um O als Schwerpunkt sowohl von den Punkten A, B, C wie von den Punkten A', B', C' zu erhalten, man in ihnen dieselben Gewichte anbringen muss. Nennt man diese Gewichte und ihre Summe wieder α, β, γ, μ und $\varDelta$, $\varDelta'$ den Inhalt der Dreiecke ABC und $A'B'C'$, so hat man wieder ganz wie oben:

$$OBC=\frac{\alpha}{\mu}\varDelta, \qquad OCA=\frac{\beta}{\mu}\varDelta, \qquad OAB=\frac{\gamma}{\mu}\varDelta,$$
$$OB'C'=\frac{\alpha}{\mu}\varDelta', \qquad OC'A'=\frac{\beta}{\mu}\varDelta', \qquad OA'B'=\frac{\gamma}{\mu}\varDelta'.$$

Es wird ferner:

$$OA^2+h-OA'^2=OB^2+i-OB'^2=OC^2+k-OC'^2=p^2.$$

Nennt man wieder:

$$BC^2-B'C'^2=u, \qquad CA^2-C'A'^2=v, \qquad AB^2-A'B'^2=w,$$

so hat man statt der früheren Gleichung folgende:

$$\mu p^2+\frac{1}{\mu}(\beta\gamma u+\gamma\alpha v+\alpha\beta w)=\beta w+\gamma v+\mu h=\gamma u+\alpha w+\mu i=\alpha v+\beta u+\mu k.$$

Setzt man den ersten Ausdruck U, so geben die drei Gleichungen

$$\begin{aligned}\alpha h+\beta(w+k)+\gamma(v+h) &= U,\\ \alpha(w+i)+\beta i+\gamma(u+i) &= U,\\ \alpha(v+k)+\beta(u+k)+\gamma k &= U\end{aligned}$$

die Werthe der drei Gewichte und ihrer Summe:



$$\begin{aligned}
\alpha &= u(v+w-u)+(2h-i-k)u-(i-k)(v-w),\\
\beta &= v(w+u-v)+(2i-k-h)v-(k-h)(w-u),\\
\gamma &= w(u+v-w)+(2k-h-i)w-(h-i)(u-v),\\
\mu &= 2(vw+wu+uv)-u^2-v^2-w^2
\end{aligned}$$

und überdies

$$U = 2uvw+hu(v+w-u)+iv(w+u-v)+kw(u+v-w).$$

Aus den Werthen von α, β, γ folgt

$$\begin{aligned}
\alpha\beta w+\gamma\alpha v &= \alpha(U-\mu h),\\
\beta\gamma u+\alpha\beta w &= \beta(U-\mu i),\\
\gamma\alpha v+\beta\gamma u &= \gamma(U-\mu k)
\end{aligned}$$

und daraus

$$2(\beta\gamma u+\gamma\alpha v+\alpha\beta w) = \mu\{U-(\alpha h+\beta i+\gamma k)\}.$$

Es ist aber ursprünglich U dem Ausdruck

$$\mu p^2+\frac{1}{\mu}(\beta\gamma u+\gamma\alpha v+\alpha\gamma w)$$

gleich gesetzt worden: man hat daher die Gleichung

$$2(U-\mu p^2) = U-(\alpha h+\beta i+\gamma k),$$

woraus

$$2\mu p^2 = U+h\alpha+i\beta+k\gamma$$

und daher, wenn man die obigen Werthe von α, β, γ substituirt:

$$\begin{aligned}
\mu p^2 = uvw &+hu(v+w-u)+(h-i)(h-k)u\\
&+iv(w+u-v)+(i-k)(i-h)v\\
&+kw(u+v-w)+(k-h)(k-i)w.
\end{aligned}$$

Man kann diesen Ausdruck auf merkwürdige Art transformiren. Man hat nämlich

$$\begin{aligned}
\mu p^2 &= uvw+vw(i+k)+wu(k+h)+uv(h+i)\\
&\quad -hu^2-iv^2-kw^2+(h-i)(h-k)u+(i-k)(i-h)v+(k-h)(k-i)w\\
&= (u+i+k)(v+k+h)(w+h+i)-hu^2-iv^2-kw^2\\
&\quad -2h(i+k)u-2i(k+h)v-2k(h+i)w-(i+k)(k+h)(h+i)\\
&= (u+i+k)(v+k+h)(w+h+i)\\
&\quad -h(u+i+k)^2-i(v+k+h)^2-k(w+h+i)^2+4hik.
\end{aligned}$$

Setzt man jetzt

$$u+i+k = u^0+2\sqrt{ik},\qquad v+k+h = v^0+2\sqrt{kh},\qquad w+h+i = w^0+2\sqrt{hi},$$

so wird

$$\begin{aligned}
\mu p^2 &= (u^0+2\sqrt{ik})(v^0+2\sqrt{kh})(w^0+2\sqrt{hi})\\
&\quad -h(u^0+2\sqrt{ik})^2-i(v^0+2\sqrt{kh})^2-k(w^0+2\sqrt{hi})^2+4hik\\
&= u^0v^0w^0+2(\sqrt{ik}.v^0w^0+\sqrt{kh}.w^0u^0+\sqrt{hi}.u^0v^0)-hu^{02}-iv^{02}-kw^{02}.
\end{aligned}$$

Die Grössen u^0, v^0, w^0 werden durch die Gleichungen

$$u^0 = u+(\sqrt{i}-\sqrt{k})^2 = B^0C^{02}-B'C'^2,$$
$$v^0 = v+(\sqrt{k}-\sqrt{h})^2 = C^0A^{02}-C'A'^2,$$
$$w^0 = w+(\sqrt{h}-\sqrt{i})^2 = A^0B^{02}-A'B'^2$$

gegeben. Wenn A^0 ein Punkt des Ellipsoids ist, dessen Gleichung

$$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}+\frac{z^2}{p^2} = 1,$$

und man mit dem Halbmesser p eine concentrische Kugel beschreibt, so soll D^0 ein dem Punkte A^0 entsprechender Punkt der Kugel heissen, wenn die Coordinaten von A^0 aus den Coordinaten von D^0 dadurch erhalten werden, dass man sie mit $\frac{m}{p}$, $\frac{n}{p}$, 1 multiplicirt. Sind D^0, E^0, F^0 auf der Kugel den Punkten A^0, B^0, C^0 des Ellipsoids entsprechend, so hat man

$$u^0 = B^0C^{02}-B'C'^2 = E^0F^{02},$$
$$v^0 = C^0A^{02}-C'A'^2 = F^0D^{02},$$
$$w^0 = A^0B^{02}-A'B'^2 = D^0E^{02}.$$

Da die z-Coordinaten entsprechender Punkte des Ellipsoids und der Kugel gleich sind, so sind h, i, k auch die Quadrate der Höhen von D^0, E^0, F^0 über der xy-Ebene. Nennt man ferner D, E, F die Projectionen von D^0, E^0, F^0 auf die xy-Ebene, so wird

$$u = BC^2-B'C'^2 = EF^2,$$
$$v = CA^2-C'A'^2 = FD^2,$$
$$w = AB^2-A'B'^2 = DE^2.$$

Nennt man r^0 den Radius des dem Dreieck $D^0E^0F^0$ umschriebenen Kreises, so wird

$$16r^{02}.D^0E^0F^{02} = u^0v^0w^0;$$

es ist ferner

$$\mu = 16\,DEF^2 = 16D^0E^0F^{02}\cos^2\lambda,$$

wenn λ der Winkel ist, welchen die Ebenen der Dreiecke $D^0E^0F^0$ und DEF mit einander bilden. Man hat daher

$$p^2\mu - u^0v\,w^0 = 16\,D^0E^0F^{02}(p^2\cos^2\lambda-r^{02}),$$

oder wenn man H das Quadrat des Perpendikels vom Mittelpunkt der Kugel auf die Ebene des Dreiecks $D^0E^0F^0$ nennt,

$$p^2\mu-u^0v^0w^0 = 16D^0E^0F^{02}(H\cos^2\lambda-r^{02}\sin^2\lambda)$$
$$= 2(\sqrt{ik}.v^0w^0+\sqrt{kh}.w^0u^0+\sqrt{hi}.u^0v^0)-(hu^{02}+iv^{02}+kw^{02}).$$



Nennt man h^0, i^0, k^0, $\mathfrak{H}$ die Quadrate der Perpendikel, die von D^0, E^0, F^0 und vom Mittelpunkte des dem Dreieck $D^0E^0F^0$ umschriebenen Kreises auf die Schneidelinie beider Ebenen gefällt werden, so wird

$$\mathfrak{H} = H.\operatorname{ctg}^2\lambda, \qquad h^0 = \frac{h}{\sin^2\lambda}, \qquad i^0 = \frac{i}{\sin^2\lambda}, \qquad k^0 = \frac{k}{\sin^2\lambda};$$

wenn man daher die vorige Gleichung durch $\sin^2\lambda$ dividirt, erhält man

$$16D^0E^0F^{02}(\mathfrak{H} - r^{02}) = 16D^0E^0F^{02}.\mathfrak{H} - u^0v^0w^0$$
$$= \begin{cases} 2(\sqrt{i^0k^0}.v^0w^0 + \sqrt{k^0h^0}.w^0u^0 + \sqrt{h^0i^0}.u^0v^0) \\ -h^0.u^{02} - i^0.v^{02} - k^0.w^{02}. \end{cases}$$

Auf diese Weise lässt sich der für μp^2 gefundene Ausdruck auf eine Formel der algebraischen Geometrie zurückführen, indem in der vorstehenden Formel $\sqrt{u^0}$, $\sqrt{v^0}$, $\sqrt{w^0}$, $\sqrt{h^0}$, $\sqrt{i^0}$, $\sqrt{k^0}$, $\sqrt{\mathfrak{H}}$ die Seiten und die aus den Ecken und dem Mittelpunkt des umschriebenen Kreises auf eine beliebige Linie gefällten Perpendikel bedeuten. Die Grösse $\mathfrak{H} - r^{02}$ ist das Quadrat der Tangente, die man an den Kreis vom Fusspunkte des Perpendikels $\sqrt{\mathfrak{H}}$ fällt. Man sieht leicht, dass man in der Formel $\sqrt{\mathfrak{H}}$, $\sqrt{h^0}$, $\sqrt{i^0}$, $\sqrt{k^0}$ um dieselbe Grösse ändern kann, welches darauf hinaus kommt, dass man die gerade Linie parallel mit sich verrückt. Man hat nämlich

$$16D^0E^0F^{02} = 2(v^0w^0 + w^0u^0 + u^0v^0) - u^{02} - v^{02} - w^{02}$$

und nach einem bekannten Satze vom Schwerpunkt

$$16D^0E^0F^{02}.\sqrt{\mathfrak{H}} = u^0(v^0+w^0-u^0)\sqrt{h^0} + v^0(w^0+u^0-v^0)\sqrt{i^0} + w^0(u^0+v^0-w^0)\sqrt{k^0},$$

da der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises der Schwerpunkt der Punkte D_0, E_0, F_0 ist, wenn man in ihnen die Coefficienten von $\sqrt{h^0}$, $\sqrt{i^0}$, $\sqrt{k^0}$ als Gewichte anbringt, und die Summe dieser Gewichte gleich $16D^0E^0F^{02}$ ist. Wenn man die erste Gleichung mit $(\sqrt{\mathfrak{H}} - r^0)^2$, die zweite mit $-2(\sqrt{\mathfrak{H}} - r^0)$ multiplicirt zu der gefundenen Formel hinzufügt*) und

$$\sqrt{h^0} - \sqrt{\mathfrak{H}} + r^0 = \sqrt{h'}, \qquad \sqrt{i^0} - \sqrt{\mathfrak{H}} + r^0 = \sqrt{i'}, \qquad \sqrt{k^0} - \sqrt{\mathfrak{H}} + r^0 = \sqrt{k'}$$

setzt, so erhält man

$$0 = 2(\sqrt{i'k'}.v^0w^0 + \sqrt{k'h'}.w^0u^0 + \sqrt{h'i'}.u^0v^0) - h'u^{02} - i'v^{02} - k'w^{02},$$

wo $\sqrt{h'}$, $\sqrt{i'}$, $\sqrt{k'}$ die auf eine Tangente des dem Dreieck $D^0E^0F^0$ umschriebenen

---

*) Das Ergebniss dieser Rechnung kommt damit überein, die Lothe $\sqrt{\mathfrak{H}}$, $\sqrt{h^0}$, $\sqrt{i^0}$, $\sqrt{k^0}$ um $\sqrt{\mathfrak{H}} - r^0$ zu verkürzen, oder, was dasselbe ist, die auf diesen Lothen senkrechte gerade Linie parallel mit sich selbst so zu verschieben, das sie eine Tangente des Kreises um $D^0E^0F^0$ wird. *H.*

Kreises aus D^0, E^0, F^0 gefällten Perpendikel bedeuten. Aus der vorstehenden Gleichung folgt, *dass von den Quadratwurzeln aus den drei Grössen* $u^0\sqrt{h'}$, $v^0\sqrt{i'}$, $w^0\sqrt{k'}$ *oder von den drei Grössen* $E^0F^0\sqrt[4]{h'}$, $F^0D^0\sqrt[4]{i'}$, $D^0E^0\sqrt[4]{k'}$ *eine die Summe der beiden anderen ist.* Man kann die Grössen $\sqrt[4]{h'}$, $\sqrt[4]{i'}$, $\sqrt[4]{k'}$ leicht construiren. Nennt man nämlich T den Berührungspunkt, so wird nach bekannten Sätzen der Elementargeometrie

$$\sqrt{2r^0.\sqrt{h'}} = D^0T, \qquad \sqrt{2r^0.\sqrt{i'}} = E^0T, \qquad \sqrt{2r^0.\sqrt{h'}} = F^0T,$$

so dass die drei Grössen

$$E^0F^0.\sqrt{2r^0.\sqrt{h'}}, \qquad F^0D^0.\sqrt{2r^0.\sqrt{i'}}, \qquad D^0E^0.\sqrt{2r^0.\sqrt{k'}}$$

die drei Producte der gegenüberstehenden Seiten und Diagonalen in dem dem Kreise eingeschriebenen Viereck $D^0E^0F^0T$ sind, von denen bekannt ist, dass die Summe von zweien dem dritten gleich ist. Unsre Formel für p^2 wird so auf den sogenannten *Ptolemä*ischen Lehrsatz zurückgeführt, welcher andererseits in dieser Form ausgesprochen durch das Vorstehende eine grosse Ausdehnung erhält.

Wie in dem früheren Falle findet man m und n aus den beiden Gleichungen

$$\frac{mn}{p^2} = \frac{ABC}{DEF} = \frac{4\Delta}{\sqrt{\mu}},$$
$$\frac{m'n'}{p^2} = \frac{A'B'C'}{DEF} = \frac{4\Delta'}{\sqrt{\mu}}.$$

Man sieht aus diesen Gleichungen, dass m^2n^2 und $m'^2n'^2$ dasselbe Zeichen wie μ haben, dass also der xy-Schnitt eine Ellipse oder Hyperbel ist, jenachdem μ positiv oder negativ ist. Die Fläche wird nur dann ein einflächiges Hyperboloid, wenn $m^2n^2p^2$ negativ ist, also wenn μ und p^2 verschiedene Zeichen haben. Die Werthe $\frac{m}{p}$, $\frac{n}{p}$ werden ganz ebenso, wie im einfacheren Fall, durch die Seiten der Dreiecke ABC und $A'B'C'$ ausgedrückt, und nur p^2 wird verschieden. Mit Hilfe des früheren Hilfsdreiecks DEF kann man die Grösse p^2 so construiren: Man errichte in den Punkten D, E, F die Perpendikel $\sqrt{h}$, $\sqrt{i}$, $\sqrt{k}$, deren Endpunkte D^0, E^0, F^0 seien, ferner errichte man in dem Mittelpunkt des dem Dreieck $D^0E^0F^0$ umschriebenen Kreises ein Perpendikel auf der Ebene $D^0E^0F^0$ und bestimme den Punkt, in welchem dies Perpendikel die Ebene DEF durchschneidet, dann wird p die Entfernung dieses Punktes von jedem der Eckpunkte D^0, E^0, F^0, (oder, was dasselbe ist, p wird der Radius derjenigen dem Dreieck $D^0E^0F^0$ umschriebenen Kugel, deren Mittelpunkt in der Ebene DEF liegt).

Notiz über die Normalen einer Fläche des zweiten Grades.

(Aus den hinterlassenen Papieren von *F. Joachimsthal* mitgetheilt durch Herrn *O. Hermes*.)

Zur *Jacobi*schen Entstehungsweise der Flächen zweiten Grades; zur Bequemlichkeit für das Ellipsoid ausgesprochen *).

Sind ABC und abc zwei confocale Ellipsen und die Punktepaare A, a; B, b; C, c entsprechende Punkte, d. h. deren Coordinaten sich wie die parallelen Axen verhalten, oder was dasselbe ist, liegen A, a auf einer confocalen Hyperbel, ebenso B, b und C, c; nimmt man ferner im Innern der kleineren Ellipse abc einen Punkt D und construirt eine Pyramide $abcd$, so dass $ad = AD$, $bd = BD$, $cd = CD$, so beschreibt bekanntlich nach *Jacobi* d ein Ellipsoid. Es ist mir nun gelungen, denjenigen Satz zu finden, welcher dem ebenen Satze entspricht, dass die Normale der Ellipse den Winkel zwischen den Radien Vectoren halbirt.

Trägt man nämlich von d aus auf da, db, dc drei solche Stücke da', db', dc' ab, die von D aus auf DA, DB, DC abgetragen, drei im Gleichgewicht stehende Kräfte darstellen, so ist die Resultante von da', db', dc' die Normale des Ellipsoids.

Der Beweis dieses Satzes beruht auf folgendem

Lehrsatz I. Es sei $\varphi(r, r_1, r_2) = 0$ die Gleichung zwischen den Entfernungen eines Punktes O von a, a_1, a_2, welche sämmtlich in derselben Ebene liegen, so stellen $\varphi'(r)$, $\varphi'(r_1)$, $\varphi'(r_2)$, nach Oa, Oa_1, Oa_2 angebracht, drei im Gleichgewicht befindliche Kräfte vor.

Lehrsatz II. Es sei $\varphi(r, r_1, r_2, r_3) = 0$ die Gleichung zwischen den Entfernungen des Punktes O im Raume von vier anderen Punkten im Raume a, a_1, a_2, a_3, so stellen $\varphi'(r)$, $\varphi'(r_1)$, $\varphi'(r_2)$, $\varphi'(r_3)$ nach Oa, Oa_1, Oa_2, Oa_3 mit gehörigem Zeichen angebracht, vier im Gleichgewicht wirkende Kräfte dar.

---

*) Die eine Hälfte der hier folgenden Notiz trägt das Datum des 28. März 1861. Es liegt uns also, da *Joachimsthal* am 5. April 1861 starb, in diesem Aufsatz eine seiner letzten Arbeiten über das von ihm so vielseitig behandelte Problem der Normalen der Flächen zweiten Grades vor. *H.*

Beweis. (Nur für Lehrsatz II., da der für I. analog ist.) Es sei $\psi(r, r_1, r_2, r_3) = 0$ die Gleichung irgend einer Fläche, so ist die Normale derselben die Resultante der Kräfte $\psi'(r)$, $\psi'(r_1)$, $\psi'(r_2)$, $\psi'(r_3)$; die Gleichung der Fläche kann aber ebenso gut geschrieben werden $\psi(r, r_1, r_2, r_3) + \varphi(r, r_1, r_2, r_3) = 0$, demnach ist die Normale die Resultante von $\psi'(r) + \varphi'(r)$, $\psi'(r_1) + \varphi'(r_1)$, u. s. w. also bilden $\varphi'(r)$, $\varphi'(r_1)$, $\varphi'(r_2)$, $\varphi'(r_3)$ ein Gleichgewichtssystem.

Es ergiebt sich jetzt Folgendes:

Jede Normale trifft die Ebene der Figur innerhalb der kleineren Ellipse. Es sei n der Punkt, wo die Normale in einem Punkte d der Fläche die Ebene der Figur trifft. Man denke sich die drei Fundamentalpunkte a, b, c so gewählt, dass a und b mit n in einer Geraden liegen: da nun dn die Richtung der Resultante von drei nach da, db und dc wirkenden Kräften sein soll, so muss die letztere gleich Null sein. Sind A, B, C die zu a, b, c gehörigen Punkte und D der zu d gehörige Constructionspunkt der Ebene, so sollen die nach AD, BD, CD gerichteten Kräfte sich das Gleichgewicht halten. Die nach CD gerichtete Kraft ist aber gleich Null, also müssen A, B und D in einer Geraden liegen und die nach AD und BD gerichteten Kräfte gleich sein, also auch die nach da und db gerichteten, d. h. *dn halbirt den Winkel adb*. Nun sind da und db nur der Bedingung unterworfen, mit dn in einer Ebene zu liegen: also *legt man durch einen Punkt der Fläche* d *und den kleineren Constructionskegelschnitt* (die „modular focal“ *Mac-Cullaghs*) *einen Kegel, so ist die Normale im Punkte d die Axe dieses Kegels.*

Die *Jacobi*sche Erzeugungsweise der Flächen zweiten Grades.

(Von Herrn *O. Hermes*.)

Die gegenwärtigen Untersuchungen sind, als Anhang zu den im literarischen Nachlass *Jacobis* enthaltenen „Geometrischen Theoremen", dazu bestimmt, das Fragmentarische dieser Theoreme zu ergänzen und dadurch ihr Verständniss zu erleichtern; sie beschränken sich darum im Wesentlichen auf die Herleitung focaler Eigenschaften der Flächen zweiten Grades aus dem *Ivory*schen Satze und schliessen sich dabei möglichst an die ähnlichen Entwickelungen *Jacobis* über die Kegelschnitte an.

Das Ellipsoid.

§. 1. Es sei die Gleichung eines gegebenen Ellipsoids, auf seine Hauptachsen bezogen,

$$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}+\frac{z^2}{p^2} = 1,$$

und die Gleichung eines ihm confocalen Ellipsoids

$$\frac{x^2}{m^2+\varrho}+\frac{y^2}{n^2+\varrho}+\frac{z^2}{p^2+\varrho} = 1,$$

wo $p<n<m$ sein mag, und ϱ alle Werthe zwischen $-p^2$ und $+\infty$ haben kann. Zwei Punkte dieser Ellipsoide, P und Q, deren Coordinaten

$$x = m\alpha, \quad y = n\beta, \quad z = p\gamma,$$

$$x = \sqrt{m^2+\varrho}\,.\,\alpha, \quad y = \sqrt{n^2+\varrho}\,.\,\beta, \quad z = \sqrt{p^2+\varrho}\,.\,\gamma$$

sind, wo

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1,$$

heissen einander *conjugirt*. Hat man zwei andere conjugirte Punkte P_1 und Q_1, deren Coordinaten

$$x = m\alpha_1, \quad y = n\beta_1, \quad z = p\gamma_1$$

und

$$x = \sqrt{m^2+\varrho}\,.\,\alpha_1, \quad y = \sqrt{n^2+\varrho}\,.\,\beta_1, \quad z = \sqrt{p^2+\varrho}\,.\,\gamma_1$$

sind, wo

$$\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2 = 1,$$

so wird

$$PQ_1^2 = (m\alpha-\sqrt{m^2+\varrho}.\alpha_1)^2+(n\beta-\sqrt{n^2+\varrho}.\beta_1)^2+(p\gamma-\sqrt{p^2+\varrho}.\gamma_1)^2,$$

$$P_1Q^2 = (\sqrt{m^2+\varrho}.\alpha-m\alpha_1)^2+(\sqrt{n^2+\varrho}.\beta-n\beta_1)^2+(\sqrt{p^2+\varrho}.\gamma-p\gamma_1)^2,$$

und daher

$$PQ_1^2-P_1Q^2 = \varrho(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2) = 0$$

oder

$$PQ_1 = P_1Q,$$

welches der *Ivory*sche Satz für Ellipsoide ist. Setzt man $p\sqrt{-1}$ und $\gamma\sqrt{-1}$ statt p und γ, so erhält man denselben Satz für einflächige Hyperboloide, und wenn man zugleich $n\sqrt{-1}$, $p\sqrt{-1}$, $\beta\sqrt{-1}$, $\gamma\sqrt{-1}$ statt n, p, β, γ setzt, für confocale zweiflächige Hyperboloide.

Lässt man ϱ bis zu dem Werthe $-p^2$ abnehmen und $p^2+\varrho$ und z gleichzeitig verschwinden, so hat man für die Punkte Q des zweiten Ellipsoids:

$$x = \sqrt{m^2-p^2}.\alpha, \quad y = \sqrt{n^2-p^2}.\beta, \quad z = 0,$$

wo

$$\alpha^2+\beta^2 < 1$$

ist, d. h. es reducirt sich dieses Ellipsoid auf seinen Grenzfall

$$\frac{x^2}{m^2-p^2}+\frac{y^2}{n^2-p^2} < 1, \quad z = 0,$$

also auf das Stück der xy-Ebene innerhalb der Focalellipse des gegebenen Ellipsoids, das *Grenzellipsoid.*

Dem Mittelpunkte O, als einem Punkte des Grenzellipsoids, für die Werthe $\alpha=\beta=0$, $\gamma=\pm1$, entspricht als conjugirter Punkt auf dem gegebenen Ellipsoid der Punkt $x=y=0$, $z=\pm p$, d. h. jeder der beiden Endpunkte Z und Z' der kleinen Achse.

Einem beliebigen Punkte A_1 auf dem Umfange der Focalellipse selbst, d. h. für

$$A_1: \quad x = \sqrt{m^2-p^2}.\alpha, \quad y = \sqrt{n^2-p^2}.\beta, \quad z = 0,$$

wo jetzt

$$\alpha^2+\beta^2 = 1, \quad \text{d. h.} \quad \gamma = 0 \quad \text{ist},$$

entspricht als conjugirter Punkt A auf dem Ellipsoid

$$A: \quad x = m\alpha, \quad y = n\beta, \quad z = 0,$$

also auf

$$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2} = 1, \quad z = 0,$$

der conjugirte Punkt liegt also auf dem Durchschnitt des Ellipsoids mit der Ebene der Focalellipse. Es ergiebt sich hieraus zugleich, dass die Focalellipse confocal ist dem zugehörigen Hauptschnitt, eine Eigenschaft, welche bekanntlich allen Focalkegelschnitten gemeinschaftlich ist. Wenn nunmehr allgemein P und Q zwei beliebige conjugirte Punkte von (E) und (E_1), durch welche Buchstaben das gegebene Ellipsoid und das Grenzellipsoid unterschieden werden mögen, sind, ebenso A, B, C Punkte des Durchschnitts der Ebene der Focalellipse mit E, conjugirt den Punkten A_1, B_1, C_1 der Focalellipse, so hat man nach dem *Ivory*schen Theorem:

$$PA_1 = QA, \quad PB_1 = QB, \quad PC_1 = QC, \quad PO = QZ = QZ',$$

d. h.

Die Verbindungslinien eines beliebigen Punktes P des Ellipsoids mit irgend drei Punkten der Focalellipse sind resp. gleich den Verbindungslinien des conjugirten Punktes Q des Grenzellipsoids, d. h. eines bestimmten Punktes der Ebene innerhalb der Focalellipse, mit den conjugirten drei Punkten auf dem Durchschnitt der Ebene der Focalellipse mit dem Ellipsoid.

Oder:

Wenn man über drei beliebigen Punkten A, B, C einer Ellipse als Eckpunkten der Basis Pyramiden errichtet mit der Spitze Q und über den drei conjugirten Punkten A_1, B_1, C_1 einer inneren confocalen Ellipse als Eckpunkten der Basis Pyramiden eines neuen Systems mit der Spitze P, so dass

$$A_1P = AQ, \quad B_1P = BQ, \quad C_1P = CQ,$$

und den Punkt Q die Ebene innerhalb der inneren Ellipse durchlaufen lässt, so beschreibt der Punkt P ein Ellipsoid, welches die äussere Ellipse zum grössten Hauptschnitt und die innere zur Focalellipse hat.

Sind die Gleichungen der beiden Ellipsen

$$\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1, \quad z = 0$$

und

$$\frac{x^2}{m^2 - p^2} + \frac{y^2}{n^2 - p^2} = 1, \quad z = 0,$$

wo $p < n < m$, so ist die Gleichung des vom Punkte P beschriebenen Ellipsoids

$$\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} + \frac{z^2}{p^2} = 1.$$

Als conjugirte Punkte ergeben sich ferner die Endpunkte X, X' und X_1, X_1' der x-Achse und die Endpunkte Y, Y' und Y_1, Y_1' der y-Achse

von (E) und (E_1), und den beliebigen Punkten x_1 und y_1 der x- und y-Achse innerhalb der Focalellipse als Punkten von (E_1) sind conjugirt Punkte x und y auf den Hauptschnitten von (E) mit der xz- und yz-Ebene: nach dem *Ivory*-schen Satze also ergiebt sich:

$$X_1 x = X x_1 \quad \text{und} \quad X_1' x = X' x_1, \qquad Y_1 y = Y y_1 \quad \text{und} \quad Y_1' y = Y' y_1,$$

woraus

$$X_1 x + X_1' x = X x_1 + X' x_1 = 2m$$

und

$$Y_1 y + Y_1' y = Y y_1 + Y' y_1 = 2n,$$

d. h. *die Scheitelpunkte der Focalellipse auf der grossen und kleinen Achse derselben sind die Brennpunkte der Hauptschnitte von* (E) *mit der* xy- *und* yz-*Ebene.*

Man kann die gegenseitige Beziehung der entsprechenden Scheitelpunkte von (E) und (E_1) oder des Mittelpunktes O und der Endpunkte Z und Z' der kleinsten Achse von (E) als conjugirter Punkte benutzen zu einer im Ganzen einfachen Construction beliebiger conjugirter Punkte von (E) und (E_1).

Den Brennpunkten der Focalellipse, als Punkten von (E_1), *entsprechen als conjugirte Punkte die Nabelpunkte des Ellipsoids* (E).

Die Brennpunkte seien F_1 und F_1' und die entsprechenden Nabelpunkte, ohne Rücksicht darauf, auf welcher Seite der x-Achse sie liegen, F und F': der Punkt Q wird ein Brennpunkt von (E_1) für die Coordinatenwerthe

$$x = \pm\sqrt{m^2 - n^2}, \qquad y = 0, \qquad z = 0,$$

d. h. für

$$\alpha = \pm\sqrt{\frac{m^2 - n^2}{m^2 - p^2}}, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = \pm\sqrt{1 - \alpha^2} = \pm\sqrt{\frac{n^2 - p^2}{m^2 - p^2}},$$

also sind die conjugirten Punkte P des Ellipsoids (E):

$$x = \pm\frac{m\sqrt{m^2 - n^2}}{\sqrt{m^2 - p^2}}, \qquad y = 0, \qquad z = \pm\frac{p\sqrt{n^2 - p^2}}{\sqrt{m^2 - p^2}},$$

d. h. die Nabelpunkte des Ellipsoids. Hierauf das *Ivory*sche Theorem angewandt, ergiebt sich

$$FO = F_1 Z,$$

d. h.

Die Entfernung der Nabelpunkte eines Ellipsoids vom Mittelpunkte desselben ist gleich der Entfernung der Brennpunkte des grössten Hauptschnittes von den Endpunkten der kleinsten Achse.

§. 2. Wie die Nabelpunkte des Ellipsoids den Brennpunkten der Focalellipse conjugirt sind, so sind allgemeiner die Krümmungslinien des Ellipsoids conjugirt Kegelschnitten, welche der Focalellipse confocal sind, und zwar in der Weise, dass, *wenn der Eckpunkt Q der Pyramide $ABCQ$ einen der Focalellipse confocalen Kegelschnitt durchläuft, der conjugirte Eckpunkt P der Pyramide $A_1B_1C_1P$ eine Krümmungslinie des Ellipsoids beschreibt.*

Dieser Satz ist nur ein specieller Fall von folgendem allgemeineren Satze:

Wenn sich ein Punkt Q auf einer Krümmungslinie einer Fläche zweiten Grades bewegt, so durchläuft der conjugirte Punkt P einer confocalen Fläche die conjugirte Krümmungslinie dieser Fläche, d. h. welche mit der ersteren auf derselben confocalen Fläche liegt, nämlich auf derjenigen, deren Durchschnittscurven mit den beiden gegebenen Flächen diese Krümmungslinien sind.

Die gegebenen Flächen seien

$$\text{I.} \quad \frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}+\frac{z^2}{p^2} = 1,$$

$$\text{II.} \quad \frac{x^2}{m^2+\varrho}+\frac{y^2}{n^2+\varrho}+\frac{z^2}{p^2+\varrho} = 1$$

und die conjugirten Punkte

$$P: \quad x = m\alpha, \quad y = n\beta, \quad z = p\gamma,$$

$$Q: \quad x = \sqrt{m^2+\varrho}.\alpha, \quad y = \sqrt{n^2+\varrho}.\beta, \quad z = \sqrt{p^2+\varrho}.\gamma,$$

wo

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1;$$

nunmehr bewege sich Q zugleich auf der confocalen Fläche

$$\text{III.} \quad \frac{x^2}{m^2+\lambda}+\frac{y^2}{n^2+\lambda}+\frac{z^2}{p^2+\lambda} = 1:$$

dann gehört der Punkt P zugleich der Fläche

$$\frac{x^2(m^2+\varrho)}{m^2(m^2+\lambda)}+\frac{y^2(n^2+\varrho)}{n^2(n^2+\lambda)}+\frac{z^2(p^2+\varrho)}{p^2(p^2+\lambda)} = 1$$

an, d. h. er liegt auf dem Durchschnitt dieser Fläche mit der Fläche (I.): die Projection aber dieser Durchschnittscurve auf irgend eine der Coordinatenebenen, z. B. auf die xy-Ebene, wird:

$$\frac{p^2(\lambda-\varrho)}{p^2+\varrho}\left[\frac{x^2(m^2-p^2)}{m^2(m^2+\lambda)}+\frac{y^2(n^2-p^2)}{n^2(n^2+\lambda)}-1\right] = 0,$$

also, weil weder $\lambda = \varrho$, noch $\frac{p^2}{p^2+\varrho}$ gleich Null ist:

$$\frac{x^2(m^2-p^2)}{m^2(m^2+\lambda)} + \frac{y^2(n^2-p^2)}{n^2(n^2+\lambda)} = 1,$$

d. h. unabhängig von ϱ, dem Parameter der Fläche (II.), und dieselbe Gleichung, wie die der Projection der Schnittcurve der Flächen (I.) und (III.) auf die xy-Ebene.

Wenn also zwei conjugirte Punkte P und Q auf zwei confocalen Flächen (I.) und (II.) gegeben sind, von welchen Flächen die erstere unveränderlich bleibt, während die zweite einen variabeln Parameter enthält, so liegt der Punkt Q, jenachdem man den festen Punkt P ansieht als Punkt der einen oder der anderen Krümmungslinie von (I.), fortdauernd auf der confocalen Fläche des einen oder des anderen Systems, durch deren Durchschneidung mit (I.) diese Krümmungslinien hervorgehen, also auf der Schnittcurve dieser Flächen selber. Man hat also den Satz:

Die conjugirten Punkte eines und desselben Punktes einer Fläche zweiten Grades in Beziehung auf alle confocalen Flächen desselben Systems liegen auf der Durchschnittscurve der beiden confocalen Flächen der anderen Systeme, welche durch diesen Punkt gehen.

Ferner:

Wenn man auf einer Fläche zweiten Grades beide Systeme von Krümmungslinien construirt, so bestimmen jede zwei Paar Krümmungslinien verschiedener Systeme durch ihre Durchschneidung zusammengehörige Syteme von je vier Punkten, welche paarweise conjugirt sind, also, als Eckpunkte von Vierecken angesehen, in der Beziehung zu einander stehen, dass die beiden Diagonalen dieser Vierecke einander gleich sind.

In ähnlicher Weise enthalten jede drei Paar confocaler Flächen zwischen einander parallelepipedische Räume mit gleichen Diagonalen: weil nun confocale Flächen desselben Systems sich nicht durchschneiden können, also bei unendlich geringer Entfernung als Parallelflächen angesehen werden können, so folgt hieraus die Fundamentaleigenschaft confocaler Flächen, dass diese parallelepipedischen Räume rechtwinklig sind, d. h. dass *confocale Flächen sich rechtwinklig durchschneiden.*

Es ergeben sich für die Krümmungslinien beider Systeme einer Fläche zweiten Grades dieselben Eigenschaften in Beziehung auf conjugirte Punkte, wie für confocale Kegelschnitte beider Systeme. Darum lässt sich dasselbe

Verfahren, durch welches man confocale Kegelschnitte construirt, wenn die Brennpunkte gegeben sind, in Anwendung bringen bei der Construction der Krümmungslinien einer Fläche zweiten Grades, wenn die Lage ihrer Nabelpunkte bekannt ist: man hat nur das Stück der Hauptachsen zwischen den Brennpunkten in der Ebene auf der Fläche zu ersetzen durch das Stück des Hauptschnittes der Fläche zwischen den Nabelpunkten, welche sich auch hier passend *Grenzkrümmungslinie* nennen lässt. Den Nabelpunkten F und F', als Scheitelpunkten einer solchen Grenzkrümmungslinie, entsprechen als conjugirte Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ (Durchschnittspunkte mit der xy-Ebene beim Ellipsoid) einer beliebigen Krümmungslinie (K), und jedem Punkte Q auf der Grenzkrümmungslinie FF' oder deren Supplement als conjugirte Punkte P von (K) solche, für welche

$$\mathfrak{A}Q = FP \quad \text{und} \quad \mathfrak{A}'Q = F'P$$

ist: wenn nunmehr der Punkt Q die Grenzkrümmungslinie zwischen F und F' durchläuft, so beschreibt der Punkt P die Krümmungslinie (K), welche die Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ zu Scheitelpunkten hat, sobald diese Punkte auf dem Supplementbogen des Hauptschnittes liegen, d. h. F und F' zwischen sich enthalten; wenn dagegen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ zwischen F und F' liegen, so ergeben sich reelle Punkte P nur, wenn Q das Supplement des Bogens FF' durchläuft, und alsdann beschreibt P eine Krümmungslinie des zweiten Systems der Fläche.

Wenn eine Krümmungslinie auf einer Fläche zweiten Grades, z. B. auf einem Ellipsoid, gezeichnet ist, und zugleich die Hauptschnitte bekannt sind, so findet man auf der Grenzkrümmungslinie, d. h. auf der Hauptellipse durch die grösste und kleinste Achse, leicht den zu einem auf der Krümmungslinie gegebenen Punkte P conjugirten Punkt Q dadurch, dass man die Punkte Z, die Endpunkte der kleinsten Achse, als Punkte der Grenzkrümmungslinie, in Betracht zieht als conjugirt zu den Punkten $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$, den Durchschnittspunkten der gegebenen Krümmungslinie mit der Hauptellipse durch die kleinste und mittlere Achse, weil dann

$$ZP = \mathfrak{B}Q = \mathfrak{B}'Q$$

ist: die Nabelpunkte F und F' ergeben sich durch die Beziehung

$$Z\mathfrak{A} = \mathfrak{B}F,$$

wo $\mathfrak{A}$ wie früher einen Scheitelpunkt der gegebenen Krümmungslinie bedeutet.

Auch die Construction conjugirter Punkte auf zwei gegebenen Krümmungslinien desselben Systems ist leicht zu bewerkstelligen, weil beiden derselbe Punkt Q der zugehörigen Grenzkrümmungslinie als conjugirter Punkt

zugehört, nämlich der Punkt, in welchem die Krümmungslinie des zweiten Systems, welche durch die gegebenen conjugirten Punkte P geht, die Grenzkrümmungslinie durchschneidet.

§. 3. Aus den Gleichungen der Punkte P und Q, als conjugirter Punkte des Ellipsoids (E) und des Grenzellipsoids (E_1), nämlich

$$P: \quad x = m\alpha, \quad y = n\beta, \quad z = p\gamma,$$
$$Q: \quad x = \sqrt{m^2-p^2}.\alpha, \quad y = \sqrt{n^2-p^2}.\beta, \quad z = 0,$$

wo

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1,$$

geht hervor, dass die Punkte Q und die Projectionen der Punkte P auf die xy-Ebene in *collinearer Verwandtschaft* zu einander stehen. Hieraus folgt für besondere Annahmen, dass, *wenn der Punkt Q auf dem Grenzellipsoid eine gerade Linie durchläuft, der Punkt P auf dem Ellipsoid einen Kegelschnitt beschreibt, dessen Ebene senkrecht auf der Focalellipse steht* und umgekehrt. Ferner

Wenn der Punkt P auf dem Ellipsoid eine ebene Curve beschreibt, seine Projection also auf die Ebene der Focalellipse einen Kegelschnitt, welcher einen doppelten Contact hat mit dem zugehörigen Hauptschnitt des Ellipsoids, so durchläuft der Punkt Q einen Kegelschnitt, welcher einen doppelten Contact hat mit der Focalellipse und umgekehrt. Dieser doppelte Contact ist ein reeller oder imaginärer, jenachdem die Ebene, welche der Punkt P durchläuft, die Hauptellipse durchschneidet oder nicht; berührt die Ebene die Hauptellipse, so haben der conjugirte Kegelschnitt und die Focalellipse vier auf einander folgende Punkte gemeinschaftlich, und wenn endlich die Ebene die Fläche in einem Punkte des Hauptschnittes berührt, so wird auch die conjugirte Curve auf der confocalen Grenzfläche eine Tangente der Focalcurve, welcher Fall allerdings erst bei den später zu betrachtenden geradlinigen Flächen zweiten Grades, dem einflächigen Hyperboloid, dem hyperbolischen Paraboloid, dem Kegel und dem Cylinder von Bedeutung ist.

Einem System von Parallelschnitten der Fläche entspricht auf der Grenzfläche ein System von Kegelschnitten, welche zwei Punkte im Unendlichen gemeinschaftlich haben.

Das einfache Hyperboloid.

§. 4. Dasselbe sei gegeben durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}-\frac{z^2}{p^2} = 1:$$

die confocalen Hyperboloide sind dann enthalten in der Gleichung

$$\frac{x^2}{m^2+\varrho}+\frac{y^2}{n^2+\varrho}-\frac{z^2}{p^2-\varrho} = 1,$$

und zwei conjugirte Punkte P und Q des gegebenen und des confocalen Hyperboloids haben zu Coordinaten

$$x = m\alpha, \quad y = n\beta, \quad z = p\gamma,$$
$$x = \sqrt{m^2+\varrho}\,.\,\alpha, \quad y = \sqrt{n^2+\varrho}\,.\,\beta, \quad z = \sqrt{p^2-\varrho}\,.\,\gamma,$$

wo

$$\alpha^2+\beta^2-\gamma^2 = 1,$$

und es sei

$$m > n.$$

Eine *erste Grenze* der confocalen Hyperboloide entspricht hier dem Werthe $\varrho = p^2$: lässt man $p^2-\varrho$ und z gleichzeitig verschwinden, so wird für die Punkte des Grenzhyperboloids

$$x = \sqrt{m^2+p^2}\,.\,\alpha, \quad y = \sqrt{n^2+p^2}\,.\,\beta, \quad z = 0,$$

welches Grenzhyperboloid wegen der Bedingung $\alpha^2+\beta^2 > 1$ übereinkommt mit dem ausserhalb der Focalellipse liegenden Stück der Ebene dieser Ellipse.

Setzt man

$$\alpha^2+\beta^2 = 1, \quad \text{d. h.} \quad \gamma = 0,$$

so entsprechen den auf dem Hauptschnitt der xy-Ebene, d. h. auf der Kehlellipse des Hyperboloids liegenden Punkten die conjugirten Punkte der confocalen Focalellipse. Nimmt man also drei beliebige Punkte A, B, C auf einer Ellipse und die conjugirten Punkte A_1, B_1, C_1 auf einer confocalen äusseren Ellipse resp. als Eckpunkte der Basen zweier Pyramiden mit den Spitzen Q und P, so dass die Seitenkanten

$$PA_1 = QA, \quad PB_1 = QB, \quad PC_1 = QC,$$

und durchläuft der Punkt Q die Ebene der grösseren Ellipse, so beschreibt der Punkt P ein einflächiges Hyperboloid, dessen Kehlellipse die innere und dessen Focalellipse die äussere der beiden gegebenen confocalen Ellipsen ist.

Der Zusammenhang zwischen confocalen Kegelschnitten in der Ebene der Focalellipse, als Oertern des Punktes Q, und den Krümmungslinien des Hyperboloids, als Oertern des conjugirten Punktes P, ist derselbe wie beim Ellipsoid (§. 2); den confocalen Ellipsen entsprechen die in ihren Projectionen auf die xy-Ebene elliptischen Krümmungslinien, den confocalen Hyperbeln die hyperbolischen Krümmungslinien.

Der Punkt Q kann niemals einen Brennpunkt der Focalellipse erreichen: dem entsprechend besitzt das einfache Hyperboloid keine Nabelpunkte.

Eine besondere Beachtung verdienen hier die Generatrices des Hyperboloids: dieselben projiciren sich bekanntlich auf die Ebene der Hauptellipse als Tangenten derselben; darum entsprechen ihnen als conjugirt die Tangenten der Focalellipse, und umgekehrt, wenn der Punkt Q eine Tangente der Focalellipse beschreibt, so durchläuft der conjugirte Punkt P auf dem Hyperboloid eine Generatrix oder vielmehr die beiden Generatrices, welche mit der conjugirten Tangente der Kehlellipse in derselben Ebene liegen. Durch jeden Punkt ausserhalb der Focalellipse kann man zwei Tangenten an dieselbe legen, ebenso gehen durch jeden Punkt des Hyperboloids zwei Generatrices.

Diese gegenseitige Beziehung der Generatrices eines Hyperboloids und der Tangenten eines Kegelschnitts lässt sich bei wechselseitiger Uebertragung der Eigenschaften dieser Linien benützen: z. B. folgt aus der bekannten Eigenschaft der Generatrices eines Hyperboloids, dass jede vier derselben, welche demselben System angehören, auf allen sie durchschneidenden Generatrices des zweiten Systems Strecken bestimmen, deren anharmonisches Verhältniss einen und denselben Werth behält (*Möbius,* barycentr. Calc. pag. 357 ff.), weil bei der Projection dieses Systems von vier durch eine fünfte durchschnittenen Geraden auf eine Ebene die Streckenverhältnisse keine Aenderung erleiden: Irgend vier feste Tangenten eines Kegelschnitts schneiden alle übrigen Tangenten desselben in demselben anharmonischen Verhältniss (*Steiner,* System. Entw. pag. 156). —

Eine *zweite Grenze* für die confocalen einfachen Hyperboloide ergiebt sich, wenn man $\varrho = -n^2$ annimmt: lässt man nämlich y und $n^2+\varrho$ gleichzeitig verschwinden, so wird für die Punkte dieses Grenzhyperboloids

$$x = \sqrt{m^2-n^2}\,.\,\alpha, \quad y = 0, \quad z = \sqrt{p^2+n^2}\,.\,\gamma,$$

wo

$$\alpha^2-\gamma^2 < 1,$$

d. h. dasselbe reducirt sich auf die innere Fläche der Focalhyperbel

$$\frac{x^2}{m^2-n^2}-\frac{z^2}{p^2+n^2} = 1, \quad y = 0:$$

setzt man $\alpha^2-\gamma^2 = 1$, d. h. $\beta = 0$, so entsprechen den Punkten dieser Focalhyperbel, als Punkten Q, als conjugirt die Punkte P, welche liegen auf

$$\frac{x^2}{m^2}-\frac{z^2}{p^2} = 1, \quad y = 0,$$

d. h. auf der Haupthyperbel, welche die grosse reelle Achse des Hyperboloids enthält. Das *Ivory*sche Theorem ergiebt demnach folgenden Satz:

Wenn zwei confocale Hyperbeln gegeben sind, und man nimmt auf denselben zwei Systeme von je drei conjugirten Punkten A, B, C auf der äusseren und A_1, B_1, C_1 auf der inneren als Eckpunkte der Basen zweier Pyramiden, deren resp. Spitzen Q und P dadurch bestimmt werden, dass

$$A_1P = AQ, \quad B_1P = BQ, \quad C_1P = CQ:$$

wenn dann die Spitze Q die Ebene innerhalb der inneren Hyperbel durchläuft, so beschreibt der Punkt P ein einflächiges Hyperboloid, dessen Focalhyperbel die innere und dessen Haupthyperbel die äussere der beiden gegebenen Hyperbeln ist.

§. 5. Durch Vereinigung beider Grenzfälle ergeben sich die beiden Grenzhyperboloide:

$$(H_1): \quad \frac{x^2}{m^2+p^2} + \frac{y^2}{n^2+p^2} = 1, \qquad z = 0,$$

$$(H_2): \quad \frac{x^2}{m^2-n^2} - \frac{z^2}{n^2+p^2} = 1, \qquad y = 0,$$

wo als conjugirte Punkte zusammengehören:

$$P_1: \quad x = \sqrt{m^2+p^2}\,.\,\alpha, \quad y = \sqrt{n^2+p^2}\,.\,\beta, \quad z = 0,$$

$$P_2: \quad x = \sqrt{m^2-n^2}\,.\,\alpha, \quad y = 0, \quad z = \sqrt{p^2+n^2}\,.\,\gamma,$$

und überdies

$$\alpha^2+\beta^2-\gamma^2 = 1:$$

aus diesen Beziehungsgleichungen ergiebt sich sofort: den Scheitelpunkten A_1 und A_1' der Focalellipse (H_1) sind conjugirt die Scheitelpunkte A_2 und A_2' der Focalhyperbel (H_2); jedem Punkte p_1 des Umfanges der Focalellipse, welche hier zugleich Kehlellipse von (H_1) ist, entspricht als conjugirt ein Punkt p_2 auf der x-Achse zwischen den Scheitelpunkten A_2 und A_2' der Focalhyperbel, d. h. ein bestimmter Punkt auf der Kehlellipse des Grenzhyperboloids (H_2), welche hier in eine gerade Linie degenerirt, und jedem Punkte q_2 auf der Haupthyperbel von (H_2) entspricht ein bestimmter Punkt q_1 auf der x-Achse, jenseits der Scheitelpunkte A_1 und A_1', d. h. auf der verlängerten grossen Achse der Focalellipse.

Vermittelst des *Ivory*schen Theorems ergeben sich demnach folgende Relationen:

$$A_1p_2 = A_2p_1, \quad A_1'p_2 = A_2'p_1,$$

und

$$A_1q_2 = A_2q_1, \quad A_1'q_2 = A_2'q_1,$$

woraus ferner:

$$A_2 p_1 + A_2' p_1 = A_1 p_2 + A_1' p_2 = 2\sqrt{m^2+p^2},$$

und

$$A_2 q_1 - A_2' q_1 = A_1 q_2 - A_1' q_2 = 2\sqrt{m^2-n^2},$$

d. h.

Die Scheitelpunkte jedes der beiden Focalkegelschnitte sind die Brennpunkte des anderen; und wenn man ferner noch beliebige zwei Paar anderer conjugirter Punkte beider Kegelschnitte (H_1) und (H_2) in Betracht zieht, p_1' und p_2', q_1' und q_2', so ergiebt sich:

$$p_1 q_2 = p_2 q_1, \quad p_1' q_2 = p_2' q_1,$$

und

$$q_1 p_2 = q_2 p_1, \quad q_1' p_2 = q_2' p_1,$$

woraus

$$p_1 q_2 - p_1' q_2 = p_2 q_1 - p_2' q_1 = p_2 p_2',$$

und

$$q_2 p_1 \pm q_2' p_1 = q_1 p_2 \pm q_1' p_2 = q_1 q_1',$$

wo das obere oder untere Vorzeichen zu nehmen ist, jenachdem die Punkte q_2 und q_2' auf demselben oder auf verschiedenen Aesten der Focalhyperbel liegen: nimmt man nun im ersten Falle die beiden Punkte der Focalellipse p_1 und p_1' und im zweiten Falle die Punkte der Focalhyperbel q_2 und q_2 als unveränderlich an, dagegen bezüglich die Punkte q_2 und p_1 als veränderlich, so sind auch resp. die Strecken $p_2 p_2'$ und $q_1 q_1'$ als constant zu betrachten, und man erhält den Satz (Bd. XII. d. J. pag. 138):

Wenn von zwei Kegelschnitten (einer Ellipse und einer Hyperbel) jeder die Brennpunkte des anderen zu Scheiteln hat, und ihre Ebenen zu einander senkrecht stehen, so sind jede zwei Punkte des einen räumliche Brennpunkte des anderen; d. h. nimmt man in der Hyperbel irgend zwei Punkte an, so ist die Summe oder Differenz ihrer Entfernungen von jedem Punkte der Ellipse constant, jenachdem sie in verschiedenen oder in demselben Zweige der Hyperbel liegen, und umgekehrt sind je zwei Punkte der Ellipse so beschaffen, dass die Differenz ihrer Abstände von jedem Punkte der Hyperbel constant ist. —

Die Krümmungslinien der confocalen Hyperboloide werden hier ersetzt durch Systeme confocaler Kegelschnitte, welche bei jedem der beiden Grenzhyperboloide die Scheitelpunkte des anderen Grenzhyperboloids zu gemeinschaftlichen Brennpunkten haben. —

Das zweifache Hyperboloid.

§. 6. Die Gleichung desselben sei

$$\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{n^2}-\frac{z^2}{p^2} = 1,$$

wo $n < p$, so sind die confocalen zweiflächigen Hyperboloide enthalten in der Gleichung

$$\frac{x^2}{m^2+\varrho}-\frac{y^2}{n^2-\varrho}-\frac{z^2}{p^2-\varrho} = 1,$$

für die Werthe von ϱ zwischen n^2 und $-m^2$; zwei conjugirte Punkte P und Q beider Hyperboloide haben zu Coordinaten:

$$x = m\alpha, \qquad y = n\beta, \qquad z = p\gamma$$

und

$$x = \sqrt{m^2+\varrho}\,.\,\alpha,\ \ y = \sqrt{n^2-\varrho}\,.\,\beta,\ \ z = \sqrt{p^2-\varrho}\,.\,\gamma,$$

wo

$$\alpha^2-\beta^2-\gamma^2 = 1.$$

Eine *erste Grenze* dieser confocalen Hyperboloide entspricht dem Werthe $\varrho = n^2$: lässt man gleichzeitig $n^2-\varrho$ und y verschwinden, so wird für die Punkte des Grenzhyperboloids

$$x = \sqrt{m^2+n^2}\,.\,\alpha,\quad y = 0,\quad z = \sqrt{p^2-n^2}\,.\,\gamma,$$

d. h. weil

$$\alpha^2-\gamma^2 > 1,$$

so reducirt sich dieses Grenzhyperboloid auf den ausserhalb der Focalhyperbel

$$\frac{x^2}{m^2+n^2}-\frac{z^2}{p^2-n^2} = 1, \qquad y = 0$$

liegenden Theil der Ebene dieser Hyperbel. Setzt man $\alpha^2-\gamma^2=1$, d. h. $\beta=0$, so entsprechen den Punkten P auf dem gegebenen Hyperboloid, welche definirt werden durch die Gleichungen

$$\frac{x^2}{m^2}-\frac{z^2}{p^2} = 1, \qquad y = 0,$$

also auf der Haupthyperbel dieses Hyperboloids liegen, die Punkte Q auf der Focalhyperbel, und es sind diese Punkte P und Q zugleich conjugirt in Beziehung auf diese beiden confocalen Hyperbeln. Der *Ivory*sche Satz ergiebt demnach folgende Erzeugungsweise des zweiflächigen Hyperboloids:

Nimmt man drei beliebige Punkte A, B, C auf einer Hyperbel und die conjugirten Punkte A_1, B_1, C_1 auf einer confocalen äusseren Hyperbel resp.

als Eckpunkte der Basen zweier Pyramiden mit den Spitzen Q und P, so dass die Seitenkanten

$$PA_1 = QA, \quad PB_1 = QB, \quad PC_1 = QC,$$

und der Punkt Q durchläuft die Ebene ausserhalb der zweiten Hyperbel, so beschreibt der Punkt P ein zweiflächiges Hyperboloid, welches die äussere der beiden gegebenen Hyperbeln zur Focalhyperbel, die innere zur Haupthyperbel hat.

Den Brennpunkten der Focalhyperbel entsprechen auch hier als conjugirt die Nabelpunkte des Hyperboloids, und ebenso Kegelschnitten, welche auf dem Grenzhyperboloid confocal der Focalhyperbel gezogen sind, Krümmungslinien des Hyperboloids, woraus sich ganz dieselben Folgerungen für die Constructionen der Krümmungslinien auf dem Hyperboloid mit Hilfe der Nabelpunkte ergeben, wie früher (§. 2) beim Ellipsoid.

Eine *zweite Grenze* entspricht dem Werthe $\varrho = -m^2$: lässt man nämlich x und $\varrho^2 + m$ gleichzeitig verschwinden, so wird für die Punkte dieses Hyperboloids

$$x = 0, \quad y = \sqrt{n^2+m^2}\,.\beta, \quad z = \sqrt{p^2+m^2}\,.\gamma,$$

wo

$$\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2 - 1,$$

also keiner Beschränkung unterworfen ist. Dieses Grenzhyperboloid (H_2) kommt also mit der yz-Ebene in ihrer ganzen Ausdehnung überein.

Dem Mittelpunkte des gegebenen Hyperboloids (H), als einem Punkte des Grenzhyperboloids (H_2), sind conjugirt die beiden Scheitelpunkte von (H), ebenso der y-Achse und z-Achse, als geraden Linien auf (H_2), resp. die Haupthyperbeln von (H) auf der xy- und xz-Ebene, und den Punkten, in welchen die y-Achse von der Focalellipse des Hyperboloids durchschnitten wird, nämlich

$$x = 0, \quad y = \pm\sqrt{p^2 - n^2}, \quad z = 0,$$

d. h. für

$$\gamma = 0, \quad \beta = \pm\sqrt{\frac{p^2 - n^2}{m^2 + n^2}}, \quad \alpha = \pm\sqrt{1+\beta^2} = \pm\sqrt{\frac{m^2+p^2}{m^2+n^2}}$$

entsprechen als conjugirt die Punkte

$$x = \pm m\sqrt{\frac{m^2+p^2}{m^2+n^2}}, \quad y = \pm n\sqrt{\frac{p^2-n^2}{m^2+n^2}}, \quad z = 0,$$

d. h. die *Nabelpunkte* des Hyperboloids; endlich, dem Früheren analog, den

beiden Systemen von confocalen Kegelschnitten in der xy-Ebene, welche zu gemeinsamen Brennpunkten die Durchschnittspunkte der y-Achse mit der Focalellipse haben, die beiden Systeme von Krümmungslinien des Hyperboloids.

Zu einer Erzeugung des zweiflächigen Hyperboloids nach der in den früheren Fällen befolgten Methode, nämlich mit Hülfe des *Ivory*schen Satzes und unter Zugrundelegung von drei Paaren conjugirter Punkte auf einer Haupthyperbel und der entsprechenden imaginären Hauptachse, lassen sich die eben dargestellten Beziehungen des Grenzhyperboloids (H_2) zu dem gegebenen Hyperboloid (H) nicht benutzen, weil jede drei solche Punkte von (H_2) auf einer geraden Linie liegen, also nicht als Eckpunkte der Basis einer Pyramide, deren Seitenkanten bestimmte Längen haben, zu Constructionen im Raume angewandt werden können. Dagegen lässt sich aus diesen Beziehungen umgekehrt eine Erzeugung der Ebene ableiten: nimmt man nämlich drei beliebige Punkte A, B, C auf einer Haupthyperbel, z. B. derjenigen der xy-Ebene, an und die conjugirten Punkte A_1, B_1, C_1 auf der y-Achse, und zwar die ersteren als Eckpunkte der Basis einer Pyramide, deren Spitze Q die yz-Ebene durchlaufen soll, und construirt zu jedem Punkte Q den conjugirten Punkt P über der geraden Linie $A_1B_1C_1$ so, dass $A_1P=AQ$, $B_1P=BQ$, $C_1P=CQ$, so liegt jeder Punkt P auf einem Kreise, dessen Ebene senkrecht auf der Linie $A_1B_1C_1$ steht. Alle diese Kreise erfüllen den ganzen Raum ausserhalb des einflächigen Hyperboloids, welches sich durch Umdrehung der Hyperbel, auf welcher die Punkte A, B, C angenommen sind, um die Linie $A_1B_1C_1$ als Achse ergiebt: umgekehrt entspricht jedem Punkte P des Raumes ausserhalb dieses Umdrehungshyperboloids ein bestimmter Punkt Q der yz-Ebene.

Bezeichnet man die Distanzen der Punkte A_1, B_1, C_1 in einer bestimmten Reihenfolge

$$B_1C_1=a_1,\quad C_1A_1=b_1,\quad A_1B_1=c_1,$$

so dass

$$a_1+b_1+c_1 = 0,$$

und die Entfernungen des Punktes P von A_1, B_1, C_1 resp. durch p_a, p_b, p_c, so hat man für eine beliebige Lage des Punktes P im Raume die identische Relation

$$a_1p_a^2+b_1p_b^2+c_1p_c^2+a_1b_1c_1 = 0.$$

Hieraus ergiebt sich, dass, wenn man die Eckpunkte eines Dreiecks ABC mit einem Punkte Q im Raume verbindet, für welchen

$$QA=p_a,\quad QB=p_b,\quad QC=p_c$$

ist, und man die Lage des Punktes Q verändert, so dass

$$a_1 p_a^2 + b_1 p_b^2 + c_1 p_c^2 + a_1 b_1 c_1 = 0,$$

wo a_1, b_1, c_1 beliebige Constanten sind mit der Beziehung

$$a_1 + b_1 + c_1 = 0,$$

alsdann der Punkt Q eine Ebene senkrecht zu der des Dreiecks ABC beschreibt. Oder:

Wenn die Seitenkanten einer Pyramide mit der Basis ABC und der Spitze Q übereinstimmen mit den Verbindungslinien eines Punktes P mit drei in einer geraden Linie liegenden Punkten A_1, B_1, C_1, so dass

$$PA_1 = QA, \quad PB_1 = QB, \quad PC_1 = QC,$$

und ausserdem vorausgesetzt ist, dass die gegenseitigen Entfernungen der Punkte A_1, B_1, C_1 grösser sind als die der entsprechenden Punkte A, B, C: wenn dann der Punkt P seine Lage beliebig verändert, so beschreibt die Spitze Q eine bestimmte Ebene senkrecht zu der des Dreiecks ABC.

§. 7. Die Zusammenstellung beider Grenzfälle liefert die beiden Grenzhyperboloide:

$$(H_1): \quad \frac{x^2}{m^2+n^2} - \frac{z^2}{p^2-n^2} \geqq 1, \quad y = 0$$

und

$$(H_2): \quad \frac{y^2}{n^2+m^2} + \frac{z^2}{p^2+m^2} = \alpha^2 - 1, \quad x = 0,$$

von denen das letztere mit der yz-Ebene in ihrer ganzen Ausdehnung übereinkommt: als conjugirt ergeben sich die Punkte

$$P_1: \quad x = \sqrt{m^2+n^2}.\alpha, \quad y = 0, \quad z = \sqrt{p^2-n^2}.\gamma$$

und

$$P_2: \quad x = 0, \quad y = \sqrt{n^2+m^2}.\beta, \quad z = \sqrt{p^2+m^2}.\gamma,$$

wo

$$\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 = 1.$$

Der Grenzhyperbel von (H_1), d. h. wenn β den Werth Null hat, entspricht auf (H_2) eine bestimmte gerade Linie, die z-Achse, ferner der x-Achse, soweit dieselbe auf (H_1) liegt, auf (H_2) die y-Achse, und den Brennpunkten F_1 und F_1' als Punkten von (H_1), zwei bestimmte Punkte F_2 und F_2' auf der y-Achse als Punkte von (H_2), nämlich welche vom Anfangspunkte der Coordinaten die Entfernung $\pm\sqrt{p^2-n^2}$ haben.

Den beiden Systemen confocaler Kegelschnitte mit den Brennpunkten F_1 und F_1', soweit dieselben das Grenzhyperboloid (H_1) überdecken, sind con-

jugirt die beiden Systeme confocaler Kegelschnitte mit den Brennpunkten F_2 und F_2' auf der yz-Ebene, so dass man jedes System confocaler Kegelschnitte als ein System von Krümmungslinien einer Fläche zweiten Grades ansehen kann.

Mit Anwendung des *Ivory*schen Theorems erhält man demnach folgenden Satz:

Wenn drei auf einander senkrechte gerade Linien, etwa als Coordinatenachsen mit dem Anfangspunkte O, gegeben sind, und auf zweien von ihnen, etwa der x- und y-Achse, feste Punkte F_1 und F_1', F_2 und F_2', so dass

$$F_1O = F_1'O \quad \text{und} \quad F_2O = F_2'O,$$

als Brennpunkte gleichartiger Kegelschnitte, d. h. zweier Ellipsen oder Hyperbeln in der xz- und yz-Ebene, und bei denen die Scheitelpunkte eines jeden Kegelschnitts von den Brennpunkten des anderen gleichweit entfernt sind: wenn man alsdann auf diesen Kegelschnitten alle Punkte p_1 und p_2, q_1 und q_2, ... als conjugirte bestimmt, für welche

$$p_1F_2 = p_2F_1, \quad q_1F_2 = q_2F_1, \quad \ldots,$$

d. h. deren jedesmalige Abstände von den Brennpunkten des anderen Kegelschnitts gleich gross sind, so ergiebt sich

$$p_1q_2 = p_2q_1.$$

Die conjugirten Punkte p_1 und p_2, q_1 und q_2 ... beider Ebenen lassen sich auch hier unabhängig von den Kegelschnitten, auf denen ihnen eben eine Lage angewiesen wurde, construiren als die Spitzen zweier dreiseitigen Pyramiden, deren Basisdreiecke $A_2B_2C_2$ und $A_1B_1C_1$ zu Eckpunkten haben conjugirte Punkte der beiden Ebenen, und deren Seitenkanten bestimmt sind durch die Beziehungen

$$p_1A_2 = p_2A_1, \quad p_1B_2 = p_2B_1, \quad p_1C_2 = p_2C_1:$$

wenn im Besonderen die Spitze p_2 die z-Achse durchläuft, so beschreibt die Spitze p_1 die Hyperbel

$$\frac{x^2}{m^2+n^2} - \frac{z^2}{p^2-n^2} = 1, \quad y = 0.$$

Die Paraboloide.

§. 8. Die Gleichung eines elliptischen Paraboloids sei

$$\frac{y^2}{\mu} + \frac{z^2}{\nu} = x$$

und die eines confocalen Paraboloids

$$\frac{y^2}{\mu+\varrho} + \frac{z^2}{\nu+\varrho} = x + \frac{\varrho}{4},$$

wo ϱ ganz beliebig sein mag. Zwei Punkte P und Q, deren Coordinaten sind

$$x = \alpha, \quad y = \sqrt{u}.\beta, \quad z = \sqrt{v}.\gamma,$$
$$x = \alpha - \frac{\varrho}{4}, \quad y = \sqrt{u-\varrho}.\beta, \quad z = \sqrt{v-\varrho}.\gamma,$$

wo

$$\beta^2 - \gamma^2 = \alpha,$$

heissen einander conjugirt. Die Gleichungen zweier anderen conjugirten Punkte P_1 und Q_1 mögen aus denen von P und Q erhalten werden, indem man an die Stelle von α, β, γ setzt $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; so ergiebt sich die Richtigkeit des Ivory'schen Satzes, d. h. dass

$$PQ_1 = P_1Q$$

ist, durch dasselbe einfache Verfahren wie in §. 1. Wenn man statt ν und γ setzt $-\nu$ und $\gamma\sqrt{-1}$, und dann gleichzeitig $-v, -u, \gamma\sqrt{-1}, \beta\sqrt{-1}$ statt v, u, γ, β, so erhält man denselben Satz für confocale hyperbolische Paraboloide und elliptische Paraboloide mit entgegengesetzter Richtung der Achse.

Elliptische Paraboloide mit derselben Richtung der Achse gehören zu allen positiven Werthen von ϱ und zu den negativen bis zum Werthe $-\nu$; lässt man ϱ bis zu diesen Grenzwerthen abnehmen, so werden die Punkte Q des confocalen Paraboloids

$$x = \alpha - \frac{\nu}{4}, \quad y = \sqrt{u-\nu}.\beta, \quad z = 0, \qquad \text{wo} \quad \beta^2 < \alpha,$$

d. h. es reducirt sich das Paraboloid auf seinen Grenzfall

$$\frac{y^2}{u-\nu} < x - \frac{\nu}{4}, \quad z = 0,$$

nämlich auf das Stück der xy-Ebene innerhalb der Focalparabel. Dem Brennpunkte dieser Focalparabel sind conjugirt die Nabelpunkte des Paraboloids u. s. w. Im Ganzen ergeben sich hier die analogen Resultate, sowohl in Betreff der gegenseitigen Beziehungen des Paraboloids zu seiner Grenzfläche als in Betreff der Constructionen, wie in §. 1 beim Ellipsoid; nur giebt die selbstständige Herleitung der Bedingung, welche erforderlich ist, damit zwei Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$, deren Eckpunkte conjugirte Punkte sein sollen, sich confocalen Parabeln einschreiben lassen, zu einigen Bemerkungen Veranlassung. Diese Bedingung (Vergl. Seite 201) ergiebt sich einfach aus folgenden zwei Sätzen:

1. *Conjugirte Sehnen confocaler Parabeln begrenzen auf der gemeinschaftlichen Achse dieselben Strecken, welche unabhängig von der Lage der*

conjugirten Punkte, durch welche die Sehnen gelegt sind, gleich sind der Scheiteldistanz beider Parabeln.

Zum Beweise dieses Satzes nehme man irgend zwei Punkte der Parabel

$$\frac{y^2}{\mu+\varrho} = x+\frac{\varrho}{4},$$

welche etwa bestimmt seien durch die Gleichungen

$$\xi = \alpha - \frac{\varrho}{4}, \quad \eta = \sqrt{\mu+\varrho}\,.\,\beta \quad \text{und} \quad \xi_1 = \alpha_1 - \frac{\varrho}{4}, \quad \eta_1 = \sqrt{\mu+\varrho}\,.\,\beta_1,$$

wo

$$\beta^2 = \alpha \quad \text{und} \quad \beta_1^2 = \alpha_1,$$

so ist der Durchschnittspunkt der Verbindungssehne beider Punkte mit der Achse

$$\xi' + \frac{\varrho}{4} = \frac{\beta\alpha_1 - \beta_1\alpha}{\beta-\beta_1} = -\beta\beta_1, \quad \eta' = 0;$$

auf dieselbe Weise ergiebt sich für die Verbindungssehne der conjugirten Punkte einer zweiten confocalen Parabel mit dem Parameter ϱ_1:

$$\xi_1' + \frac{\varrho_1}{4} = \frac{\beta\alpha_1 - \beta_1\alpha}{\beta-\beta_1} = -\beta\beta_1, \quad \eta_1' = 0,$$

so dass die Distanz beider Schnittpunkte wird

$$\xi' - \xi_1' = \frac{\varrho_1-\varrho}{4},$$

also unabhängig von den Constanten α, α_1, β, β_1, welche die Lage der auf den Parabeln angenommenen Punkte bestimmen, und zwar gleich der Scheiteldistanz der beiden confocalen Parabeln. Derselbe Werth $\frac{\varrho_1-\varrho}{4}$ ergiebt sich für den Unterschied der x-Coordinaten jeder zwei conjugirten Punkte beider Parabeln, d. h.

II. Die Entfernung der von conjugirten Punkten confocaler Parabeln auf die Achse gefällten Lothe ist unabhängig von der Lage dieser Punkte, nämlich gleich der Scheiteldistanz der Parabeln.

Man kann demnach jede zwei Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$, deren Eckpunkte conjugirte Punkte confocaler Parabeln sind, der Achse parallel so verschieben, dass die Durchschnittspunkte der correspondirenden Seiten auf der Achse liegen, diese also die Collineationsachse beider Dreiecke wird, und dass zugleich die Verbindungslinien der entsprechenden Eckpunkte die Achse senkrecht durchschneiden. Verschiebt man jetzt das eine Dreieck mit den Eckpunkten auf diesen parallelen Verbindungslinien, so rückt auch die Collineationsachse sich selbst parallel fort, und bewirkt man durch diese Verschiebung endlich das Zusammenfallen zweier entsprechenden Eckpunkte, z. B. von A und A_1

in α, so geht die Collineationsachse senkrecht zu den Projectionsstrahlen d anderen Eckpunkte ebenfalls durch den Punkt α. Nennt man nunmehr d Winkel dieser Achse mit den Seiten BC und B_1C_1 resp. φ und φ_1, fern die Durchschnittspunkte der Senkrechten BB_1 und CC_1 mit der Achse β u γ, die Seiten BC, CA, AB, B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 resp. a, b, c, a_1, b_1, c_1 u den Durchschnittspunkt der Seiten a und a_1 P, wo also P zugleich auf d Collineationsachse liegt, so erhält man die Gleichungen

$$a^2-a_1^2=\beta\gamma^2\left(\frac{1}{\cos^2\varphi}-\frac{1}{\cos^2\varphi_1}\right)=\beta\gamma^2(\operatorname{tg}^2\varphi-\operatorname{tg}^2\varphi_1),$$
$$b^2-b_1^2=C\gamma^2-C_1\gamma^2=P\gamma^2(\operatorname{tg}^2\varphi-\operatorname{tg}^2\varphi_1),$$
$$c^2-c_1^2=B\beta^2-B_1\beta^2=P\beta^2(\operatorname{tg}^2\varphi-\operatorname{tg}^2\varphi_1);$$

folglich, wenn man den Factor $\sqrt{\operatorname{tg}^2\varphi-\operatorname{tg}^2\varphi_1}$ kurz durch $\frac{1}{f}$ bezeichnet:

$$\beta\gamma=f.\sqrt{a^2-a_1^2},\qquad P\gamma=f.\sqrt{b^2-b_1^2},\qquad P\beta=f.\sqrt{c^2-c_1^2},$$

und weil α, β, γ in einer geraden Linie liegen, d. h.

$$\beta\gamma+\gamma P+P\beta=0$$

ist, so ergiebt sich als die gesuchte *Beziehungsgleichung zwischen den Seit der beiden Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$, deren Eckpunkte conjugirte Punk confocaler Parabeln sein sollen:*

$$\sqrt{a^2-a_1^2}+\sqrt{b^2-b_1^2}+\sqrt{c^2-c_1^2}=0,$$

wo die Wurzeln mit passenden Vorzeichen zu versehen sind.

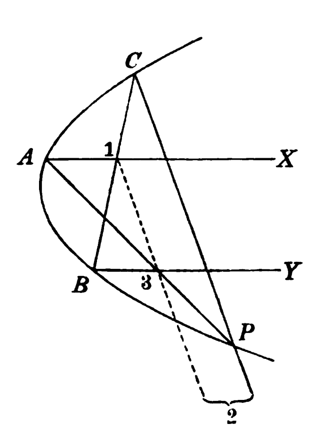
Ferner ergiebt sich für das Verhältniss der Abschnitte, in welche d Seiten a und a_1 durch den Punkt P getheilt werden, d. h. für das Verhältni der Abschnitte dieser Seiten durch eine gerade Linie, welche der Achse d Parabel parallel durch den gemeinschaftlichen Gegeneckpunkt α gezogen wir

$$PB:PC=PB_1:PC_1=P\beta:P\gamma=\sqrt{c^2-c_1^2}:\sqrt{b^2-b_1^2},$$

wo wiederum die Wurzeln mit passenden Vorzeichen zu versehen sind, so da der Punkt P innerhalb der Seiten a und a_1 oder ausserhalb derselben, u zwar alsdann jenseits des Punktes B oder des Punktes C liegt, jenachde die Beziehungsgleichung zwischen den Seiten der beiden Dreiecke eine d drei Formen hat:

$$\sqrt{b^2-b_1^2}+\sqrt{c^2-c_1^2}=\sqrt{a^2-a_1^2},$$
$$\sqrt{c^2-c_1^2}+\sqrt{a^2-a_1^2}=\sqrt{b^2-b_1^2},$$
$$\sqrt{a^2-a_1^2}+\sqrt{b^2-b_1^2}=\sqrt{c^2-c_1^2}.$$

Wenn man also in einem der gegebenen Dreiecke, z. B. im Dreieck *ABC*, irgend eine Seite im Verhältniss der Quadratwurzeln aus den Differenzen der Quadrate der entsprechenden anderen beiden Seitenpaare theilt, unter Beachtung der eben erwähnten Regel der Vorzeichen, und den Theilpunkt mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt verbindet, so giebt diese Verbindungslinie die Richtung der Achse der umschriebenen Parabel an, so dass die Construction dieser Parabel nunmehr zurückkommt auf *die Construction einer Parabel, von welcher drei Punkte und die Achsenrichtung gegeben sind,* oder weil man die Parabel ansehen kann als einen Kegelschnitt, von welchem ein Punkt und die zugehörige Tangente im Unendlichen liegen, auf die *Construction eines Kegelschnitts, von welchem vier Punkte und die Tangente in einem dieser Punkte gegeben sind.* (Vergl. *Brianchon,* mém. sur les lignes du sec. ordre, Art. 48). Zieht man von A und B die Parallelen AX und BY mit der Achse, von denen die erstere die Seite BC im Punkte 1 durchschneiden mag, so durchschneidet die Verbindungslinie eines beliebigen vierten Punktes P der Parabel mit A die Parallele BY in einem Punkte 3, so dass die Verbindungslinie (1, 3) parallel ist der Verbindungslinie CP: denn man kann AX, XY (die Tangente in den im Unendlichen zusammenfallenden Punkten X und Y der Parabel), YB, BC, CP, PA ansehen als die Seiten eines der Parabel eingeschriebenen Sechsecks, für welches nach dem *Pascal*schen Satze die Durchschnittspunkte der Gegenseitenpaare, nämlich Punkt 1, oder (AX, BC), 2 oder (XY, CP) in unendlicher Entfernung auf CP, endlich Punkt 3 oder (YB, PA) auf einer geraden Linie liegen, d. h. die Linien (1, 3) und CP sind parallel.



Hyperbolische Paraboloide werden dargestellt durch die Gleichung

$$\frac{y^2}{\mu+\varrho}-\frac{z^2}{\nu-\varrho} = x+\frac{\varrho}{4}$$

für

$$\nu > \varrho > -\mu.$$

Eine erste Grenze dieser Paraboloide entspricht dem Werthe $\varrho = \nu$: lässt man $\nu-\varrho$ und z gleichzeitig verschwinden, so wird für die Punkte dieses Grenzparaboloids

$$x = \alpha - \frac{\nu}{4}, \quad y = \sqrt{\mu+\nu}\,.\,\beta, \quad z = 0, \quad \text{wo} \quad \beta^2 > \alpha,$$

d. h. dieses Grenzparaboloid bedeckt alle ausserhalb der Focalparabel

$$\frac{y^2}{\mu+\nu} = x + \frac{\nu}{4}, \quad z = 0$$

liegenden Punkte der xy-Ebene. Dasselbe umschliesst wie ein scheibenförmiger Gürtel die confocalen hyperbolischen Paraboloide, welche kleineren positiven oder den negativen Werthen des Parameters ϱ bis $-\mu$ entsprechen.

Der Zusammenhang der Tangenten der Focalparabel, welche hier vollständig auf dem Grenzparaboloid liegen, und der Generatrices des Paraboloids ist derselbe wie früher beim einflächigen Hyperboloid (§. 4).

Eine zweite Grenze der confocalen hyperbolischen Paraboloide entspricht dem Werthe $\varrho = -\mu$: lässt man $\mu+\varrho$ und y gleichzeitig verschwinden, so werden die Punkte dieser Grenzfläche

$$x = \alpha + \frac{\mu}{4}, \quad y = 0, \quad z = \sqrt{\nu+\mu}.\gamma, \quad \text{wo} \quad \gamma^2 > \alpha,$$

d. h. dieses Grenzparaboloid bedeckt vollständig den ausserhalb der Focalparabel

$$\frac{z^2}{\nu+\mu} = -x + \frac{\mu}{4}, \quad y = 0$$

liegenden Theil der xz-Ebene.

Durch Zusammenstellung endlich beider Grenzwerthe ergiebt sich, dass auch jede zwei Punkte einer Focalparabel angesehen werden können als räumliche Brennpunkte für die Punkte der zweiten Focalparabel, d. h. für welche die Differenz der Verbindungsgeraden einen constanten Werth hat. (Vergl. §. 5).

Die confocalen elliptischen Paraboloide, welche enthalten sind in der Gleichung

$$\frac{y^2}{\mu+\varrho} + \frac{z^2}{\nu+\varrho} = -x - \frac{\varrho}{4}$$

für die Werthe $-\nu < \varrho < \infty$, unterscheiden sich von den anfänglich betrachteten nur durch die Richtung der x-Achse und geben zu besonderen Bemerkungen keinen Anlass.

Der Kegel.

§. 9. Die Gleichung eines Kegels sei

$$\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} - \frac{z^2}{p^2} = 0,$$

wo $m > n$, und die eines confocalen Kegels

$$\frac{x^2}{m^2+\varrho} + \frac{y^2}{n^2+\varrho} - \frac{z^2}{p^2-\varrho} = 0,$$

wo $p^2 > \varrho > -n^2$. Conjugirte Punkte dieser Kegel werden dargestellt durch die Gleichungen

$$x = m\alpha, \quad y = n\beta, \quad z = p\gamma,$$

$$x = \sqrt{m^2+\varrho}.\alpha, \quad y = \sqrt{n^2+\varrho}.\beta, \quad z = \sqrt{p^2-\varrho}.\gamma, \quad \text{wo} \quad \alpha^2+\beta^2-\gamma^2 = 0.$$

Auch hier gilt der *Ivory*sche Satz, wie leicht nachzuweisen ist. Conjugirte Punkte sind die Scheitelpunkte jeder zwei confocalen Kegel: daraus folgt, dass jede zwei conjugirte Punkte confocaler Kegel gleiche Entfernung haben von dem gemeinsamen Scheitelpunkte, dass also die zusammengehörigen conjugirten Punkte des ganzen Systems von Kegeln auf einer Kugelfläche liegen, so dass concentrische Kugeln die beiden Systeme confocaler Kegel ergänzen. Zugleich ergiebt sich hieraus, dass das eine System von Krümmungslinien eines Kegels ein System sphärischer Kegelschnitte ist.

Ein erster Grenzfall für die confocalen Kegel entspricht dem Werthe $\varrho = p^2$: alsdann werden die conjugirten Punkte des confocalen Kegels

$$x = \sqrt{m^2+p^2}.\alpha, \quad y = \sqrt{n^2+p^2}.\beta, \quad z = 0, \quad \text{wo} \quad \alpha^2+\beta^2 > 0,$$

d. h. beliebige Punkte der xy-Ebene: der Grenzkegel also bedeckt die ganze xy-Ebene. Wenn sich ein Punkt des Grenzkegels auf einem Kreise der xy-Ebene, der um den Anfangspunkt der Coordinaten als Mittelpunkt beschrieben ist, bewegt, so beschreibt der conjugirte Punkt auf dem gegebenen Kegel, weil er immer dieselbe Entfernung vom Scheitelpunkte hat als jener, einen sphärischen Kegelschnitt, und zwar welcher mit dem ersten Kreise auf derselben Kugel liegt.

Der zweite Grenzfall gehört zum Werthe $\varrho = -n^2$: die conjugirten Punkte sind alsdann dargestellt durch die Gleichungen

$$x = \sqrt{m^2-n^2}.\alpha, \quad y = 0, \quad z = \sqrt{p^2+n^2}.\gamma, \quad \text{wo} \quad \alpha^2 > \gamma^2:$$

dieselben liegen also auf der xz-Ebene zwischen den beiden Geraden

$$\frac{x^2}{m^2-n^2} - \frac{z^2}{p^2+n^2} = 0, \quad y = 0,$$

und zwar in denjenigen Feldern dieser Ebene, welche ganz innerhalb des gegebenen Kegels liegen. Diese beiden geraden Linien sind die gemeinschaftlichen Focallinien der confocalen Kegel. Wird

$$\alpha^2 = \gamma^2 \text{ d. h. } \beta = 0,$$

liegt also ein Punkt des Grenzkegels auf einer der Focallinien selbst, so wird der conjugirte Punkt des gegebenen Kegels

$$\frac{x^2}{m^2}-\frac{z^2}{p^2}=0, \quad y=0,$$

also ein Punkt des Durchschnitts der xy-Ebene mit dem Kegel.

Man kann jetzt in derselben Weise wie früher den *Ivory*schen Satz anwenden zur Construction eines Kegels vermittelst zweier dreiseitigen Pyramiden, deren Seitenkanten übereinstimmen, und für welche die Eckpunkte der Grundflächen conjugirte Punkte sind confocaler gerader Linien, d. h. welche dieselben Halbirungslinien haben, indem man die Spitze Q der einen Pyramide die Ebene ihrer Basis durchlaufen lässt. Natürlich sind dabei die Eckpunkte der Basen auf verschiedenen Geraden zu wählen. Weil nun conjugirte Punkte confocaler Kegel gleichweit vom gemeinschaftlichen Scheitelpunkte abstehen, so *stimmen die Basisdreiecke jedesmal in einer Seite überein.*

Wenn der Punkt Q in der Ebene zwischen den beiden Focallinien eine gerade Linie (G) durchläuft, so beschreibt der conjugirte Punkt P auf dem Kegel einen Kegelschnitt, dessen Ebene senkrecht steht auf der Ebene der beiden Focallinien: dieser Kegelschnitt ist Ellipse, Hyperbel oder Parabel, jenachdem die von Q beschriebene Gerade nur dem einen der beiden Scheitelwinkel, welche die Focallinien *innerhalb* des Kegels bilden, angehört, oder beide durchschneidet, oder einer dieser Linien parallel ist. In der That entsprechen den Durchschnittspunkten der Geraden (G) mit den Focallinien die Scheitelpunkte und jedem unendlich entfernten Punkte derselben ein unendlich entfernter Punkt des conjugirten Kegelschnittes, so dass der letztere Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist, jenachdem (G) zwischen den Focallinien im Innern des Kegels keinen, einen oder zwei Punkte im Unendlichen hat.

Die Cylinder.

§. 10. Die Gleichungen zweier confocalen elliptischen Cylinder seien

$$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1 \quad \text{und} \quad \frac{x^2}{m^2+\varrho}+\frac{y^2}{n^2+\varrho}=1,$$

wo $m>n$ und $\varrho>-n^2$ sein mögen, und zwei conjugirte Punkte derselben bestimmt durch die Gleichungen

$$x=m\alpha, \qquad y=n\beta, \qquad z=\zeta,$$
$$x=\sqrt{m^2+\varrho}.\alpha, \quad y=\sqrt{n^2+\varrho}.\beta, \quad z=\zeta,$$

wo

$$\alpha^2+\beta^2=1.$$

Conjugirte Punkte liegen demnach in gleicher Entfernung von der xy-Ebene, und der *Ivory*sche Satz ergiebt sich unmittelbar als richtig aus seiner Gültigkeit für die confocalen Kegelschnitte, weil er alsdann für die Projectionen conjugirter Punkte auf die xy-Ebene stattfindet. Dasselbe gilt für die hyperbolischen Cylinder, welche durch die oben betrachteten Gleichungen dargestellt werden, wenn man gleichzeitig n und β in $n\sqrt{-1}$ und $\beta\sqrt{-1}$ verwandelt.

Ein Grenzfall der confocalen elliptischen Cylinder tritt für den Werth $\varrho = -n^2$ ein. Der zugehörige Grenzcylinder ist der Parallelstreifen der xz-Ebene zwischen den Parallelen

$$x = \pm\sqrt{m^2-n^2}, \quad y = 0.$$

Den Punkten A_1, B_1, C_1 auf den Focallinien selbst entsprechen als conjugirt Punkte A, B, C auf dem Hauptschnitt des Cylinders mit der xz-Ebene, d. h. auf den Scheitellinien des Cylinders. Um diese Punkte als Eckpunkte der Basisdreiecke zweier Pyramiden mit den Spitzen P und Q in der früheren Weise zur Construction des Cylinders benutzen zu können, nehme man an, dass zwei derselben, z. B. A_1 und B_1, auf einer der Focallinien, C_1 auf der anderen liegen: alsdann fallen auch die conjugirten Punkte A und B auf die eine, C auf die andere Scheitellinie, und es ist leicht zu sehen, dass $A_1B_1 = AB$ und die Verbindungslinie CC_1 senkrecht auf AB und A_1B_1, d. h. $B_1C_1^2 - A_1C_1^2 = BC^2 - AC^2$ ist, dass also *die beiden Basisdreiecke in einer Seite und der Differenz der Quadrate der beiden anderen Seiten übereinstimmen,* und endlich, dass $BC > B_1C_1$ und $AC > A_1C_1$.

Zu jeder den Focallinien parallelen Geraden als Ort des Punktes Q gehören als conjugirt auf dem Cylinder zwei Generatrices desselben, und zwar welche zugleich auf dem confocalen hyperbolischen Cylinder liegen, der durch die Parallele geht. Jeder zu AB senkrechten Geraden entspricht auf dem Cylinder die Ellipse, deren Ebene senkrecht zu AB durch diese Gerade gelegt ist, so dass hier das System paralleler, die Generatrices des Cylinders senkrecht durchschneidender Ebenen als drittes System confocaler Flächen die beiden Systeme confocaler elliptischer und hyperbolischer Cylinder vervollständigt.

Die confocalen *hyperbolischen Cylinder,* welche in der Gleichung

$$\frac{x^2}{m^2+\varrho} - \frac{y^2}{n^2-\varrho} = 1$$

für die verschiedenen Werthe von ϱ, welche der Ungleichheit $n^2 > \varrho > -m^2$ genügen, enthalten sind, mit ihren Grenzfällen für die Werthe $\varrho = n^2$ und

$\varrho = -m^2$, von denen der erste mit der xz-Ebene, soweit sich dieselbe ausserhalb der beiden Focallinien erstreckt, der letztere mit der yz-Ebene in ihrer ganzen Ausdehnung übereinkommt, nehmen für sich kein neues Interesse in Anspruch; nur ist in Beziehung auf die Erzeugung dieser Cylinder durch zwei Tetraeder mit conjugirten Grunddreiecken zu bemerken, dass zum Unterschiede mit den vorhin behandelten elliptischen Cylindern hier $BC < B_1C_1$ und $AC < A_1C_1$ ist, so dass sich im Ganzen folgendes Resultat ergiebt:

Wenn zwei dreiseitige Pyramiden gegeben sind mit den Basen ABC und $A_1B_1C_1$ und resp. den Spitzen Q und P, und in denen

$$A_1P = AQ, \qquad B_1P = BQ, \qquad C_1P = CQ,$$
$$AB = A_1B_1, \qquad BC^2 - AC^2 = B_1C_1^2 - A_1C_1^2,$$

und die Spitze Q durchläuft die Ebene der Basis ABC, so beschreibt der Punkt P einen Cylinder, und zwar einen elliptischen Cylinder, wenn $\triangle\ ABC > A_1B_1C_1$, dagegen einen hyperbolischen, wenn $\triangle\ ABC < A_1B_1C_1$ ist.

Wenn der Eckpunkt C auf die Seite AB zu liegen kommt, d. h. das Dreieck ABC verschwindet oder $AC + BC = AB$ wird, so degenerirt der von P beschriebene hyperbolische Cylinder in eine *auf der Ebene des Dreiecks $A_1B_1C_1$ senkrechte Ebene.* (Vergl. §. 6 zu Ende.)

Die Umdrehungsflächen.

§. 11. Bei den Umdrehungsflächen der Ellipse, Hyperbel und Parabel um eine ihrer Achsen sind wesentlich zwei Fälle zu unterscheiden, jenachdem die Umdrehung um diejenige Achse stattfindet, mit welcher bei Betrachtung des ganzen Systems confocaler Kegelschnitte die von *Jacobi* sogenannten Grenzkegelschnitte zusammenfallen, oder um die zweite Achse.

Der erste Fall, welchem das verlängerte Sphäroid, das zweiflächige Hyperboloid und das elliptische Paraboloid entsprechen, liefert insofern keine neuen Resultate, als hier der frühere Grenzkegelschnitt eine gerade Linie bleibt, sich also die bei der Discussion der Kegelschnitte mit Rücksicht auf die *Jacobi*sche Erzeugungsweise gefundenen Resultate unmittelbar auf die zugehörigen drei Umdrehungskörper übertragen lassen. Man erhält darum für diese drei Körper folgende Erzeugungsweise (Vergl. pag. 186):

Wenn man über zwei festen Basen gg' und ff' mit denselben Schenkeln $Qg = Pf$, $Qg' = Pf'$ Dreiecke beschreibt, und die Spitze Q des einen Dreiecks eine beliebig in derselben Ebene gegebene gerade Linie (G) durchläuft, so

beschreibt die Spitze P des anderen Dreiecks eine Umdrehungsfläche zweiten Grades, deren Achse der Richtung nach mit ff' übereinkommt: die Umdrehungsfläche ist ein verlängertes Sphäroid, ein zweiflächiges Hyperboloid oder ein Paraboloid, jenachdem die Projection hh' der ersten Basis gg' auf die Gerade (G) grösser, kleiner oder gleich der zweiten Basis ff' ist.

Ist die erste Basis gg' gleich der zweiten ff' und unter einem beliebigen schiefen Winkel gegen (G) geneigt, so wird die Fläche ein *Umdrehungskegel,* ist gg' parallel (G), so wird dieselbe ein gerader Kreiscylinder, endlich wenn gg' senkrecht auf (G), eine zu ff' *senkrechte Ebene.*

Der zweite Fall, welchem die Umdrehungskörper der Ellipse um die kleine Achse, der Hyperbel um die imaginäre Achse und der Parabel um die unendlich entfernte Achse, d. h. das abgeplattete Sphäroid, das einflächige Hyperboloid und der parabolische Cylinder zugehören, schliesst sich insofern an die früheren Untersuchungen über das allgemeine Ellipsoid, das einflächige Hyperboloid und das hyperbolische Paraboloid an, als diese Flächen als confocale Grenzflächen resp. einen Kreis, eine kreisförmig ausgeschnittene und eine geradlinig abgeschnittene unbegrenzte Ebene haben. Concentrische Kreise, als confocale Kegelschnitte betrachtet, charakterisiren sich dadurch, dass die Verbindungslinien conjugirter Punkte durch den Mittelpunkt gehen, conjugirte Sehnen also parallel sind. Hieraus folgt, dass die zur Construction der beiden ersten Umdrehungsflächen zu Grunde liegenden Basisdreiecke einander ähnlich sein müssen. Also:

Wenn über zwei ähnlichen Dreiecken ABC und $A_1B_1C_1$ als Grundflächen Pyramiden construirt werden mit denselben Seitenkanten

$$A_1P = AQ, \quad B_1P = BQ, \quad C_1P = CQ,$$

und die Spitze Q durchläuft die Ebene des Dreiecks ABC, so beschreibt die Spitze P eine Umdrehungsfläche zweiten Grades, und zwar ein abgeplattetes Sphäroid oder ein einflächiges Hyperboloid, jenachdem die erste Basis ABC grösser oder kleiner als die zweite Basis $A_1B_1C_1$ ist.

Wenn die Seiten der zweiten Basis $A_1B_1C_1$ verschwindend klein werden, d. h. sich diese Basis auf einen Punkt reducirt, so wird das Sphäroid eine *Kugel:* in diesem Falle nämlich ist der einzige Punkt der Ebene des Dreiecks ABC, welcher als Ort der Spitze Q zur Erzeugung einer Fläche durch den Punkt P dient, der Mittelpunkt des dem Dreieck ABC umschriebenen Kreises.

Der *parabolische Cylinder* endlich ist die erste von allen bisher betrachteten Flächen zweiten Grades, zu deren Erzeugung die Ebene der ersten

Basis ABC als Ort des Punktes Q nicht ausreicht: derselbe erfordert zu seiner Construction eine neue Ebene, sowie bei den Kegelschnitten die Parabel eine neue gerade Linie (G). Von den beiden Dreiecken ABC und $A_1B_1C_1$ mögen die Seiten AB und A_1B_1 resp. auf der Scheitellinie und der Focallinie des Cylinders liegen: diese Seiten sind alsdann als Verbindungslinien conjugirter Punkte (§. 10) einander gleich. Der dritte Eckpunkt C_1 sei ein beliebiger Punkt auf der unbegrenzten Focalebene, soweit dieselbe durch den Grenzcylinder bedeckt wird, so schneidet eine durch C_1 senkrecht zur Focallinie gelegte Ebene den Cylinder in einer Parabel (Π) und die Focallinie in dem Brennpunkte F derselben: die zu C_1 gehörigen beiden conjugirten Punkte C des Cylinders sind die Schnittpunkte dieser Parabel (Π) mit der durch C_1 gehenden confocalen Parabel (Π_1), welche natürlich eine entgegengesetzte Achsenrichtung hat. Die senkrechte Projection des von C auf AB gefällten Lothes auf die Focalebene ist alsdann gleich dem Lothe von C_1 auf A_1B_1, weil die Subnormale einer Parabel doppelt so gross ist als die Scheiteldistanz des Brennpunktes. Es ergiebt sich also folgendes Resultat:

Wenn man über zwei Dreiecken ABC und $A_1B_1C_1$, in denen

$$AB = A_1B_1, \quad BC^2 - AC^2 = B_1C_1^2 - A_1C_1^2$$

ist, als Grundflächen Pyramiden errichtet mit übereinstimmenden Seitenkanten, so dass also

$$AQ = A_1P, \quad BQ = B_1P, \quad CQ = C_1P,$$

und die Spitze Q durchläuft eine durch die Grundkante AB gelegte Ebene, für welche die senkrechte Projection des von C auf AB gefällten Lothes gleich ist dem Lothe von C_1 auf A_1B_1, so beschreibt die Spitze P einen parabolischen Cylinder, dessen Focallinie durch A_1B_1 geht.

Hieran mag sich zum Schluss noch eine sich übrigens von selbst verstehende Construction von *zwei sich durchschneidenden Ebenen* anreihen: man hat hierzu die Basisdreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ als congruent anzunehmen und den Punkt Q eine beliebige gegen ABC geneigte Ebene durchlaufen zu lassen. Ist diese Ebene parallel der Ebene ABC, so wird durch die Spitze P der zweiten Pyramide *ein System von zwei parallelen Ebenen* erzeugt.

---

§. 12. Es handle sich nunmehr um die Lösung der allgemeinen Aufgabe:

Wenn zwei Dreiecke $A_0B_0C_0$ und $A_1B_1C_1$ gegeben sind als Grundflächen zweier Pyramiden $A_0B_0C_0Q$ und $A_1B_1C_1P$, deren Seitenkanten übereinstimmen, so dass also

$$PA_1 = QA_0, \quad PB_1 = QB_0, \quad PC_1 = QC_0,$$

und wenn die Spitze Q der ersten Pyramide eine der Lage nach gegebene Ebene durchläuft, die Fläche zu discutiren, welche alsdann die Spitze P der zweiten Pyramide beschreibt. (Vergl. pag. 202.)

Nach den bisherigen Entwickelungen kann man die Punkte A_0, B_0, C_0 und A_1, B_1, C_1 ansehen als conjugirte Punkte zweier confocalen Flächen zweiten Grades, deren erstere vom Punkte P beschrieben wird, während die letztere als eine Grenzfläche des Systems mit der Ebene (E) übereinkommt. Es ist darum diese Ebene eine Hauptebene der ersten Fläche und demgemäss von vornherein die Richtung der einen Hauptachse dieser Fläche bestimmt.

Um einen festen Ausgangspunkt zu haben, nehme man A_0, B_0, C_0, die Eckpunkte *der ersten Basis,* an als beliebige Punkte des Ellipsoids

$$(1.) \qquad \frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}+\frac{z^2}{p^2} = 1$$

und A_1, B_1, C_1, die Eckpunkte *der zweiten Basis,* als die conjugirten Punkte des Grenzellipsoids:

$$(2.) \qquad \frac{x^2}{m^2-p^2}+\frac{y^2}{n^2-p^2} < 1, \quad z = 0,$$

und zwar bestimmt durch die Gleichungen:

$$(3.) \qquad A_0:\begin{cases} x = m\alpha, \\ y = n\beta, \\ z = p\gamma, \end{cases} \quad B_0:\begin{cases} x = m\alpha_1, \\ y = n\beta_1, \\ z = p\gamma_1, \end{cases} \quad C_0:\begin{cases} x = m\alpha_2, \\ y = n\beta_2, \\ z = p\gamma_2 \end{cases}$$

und

$$(4.) \qquad A_1:\begin{cases} x = \sqrt{m^2-p^2}\,.\,\alpha, \\ y = \sqrt{n^2-p^2}\,.\,\beta, \\ z = 0, \end{cases} \quad B_1:\begin{cases} x = \sqrt{m^2-p^2}\,.\,\alpha_1, \\ y = \sqrt{n^2-p^2}\,.\,\beta_1, \\ z = 0, \end{cases} \quad C_1:\begin{cases} x = \sqrt{m^2-p^2}\,.\,\alpha_2, \\ y = \sqrt{n^2-p^2}\,.\,\beta_2, \\ z = 0, \end{cases}$$

wo

$$(5.) \qquad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = \alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2 = \alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2 = 1.$$

Ferner seien A, B, C die Projectionen der Eckpunkte A_0, B_0, C_0 der ersten Basis auf die Ebene (E) der zweiten Basis, d. h. gegeben durch die Gleichungen:

$$(6.) \qquad A:\begin{cases} x = m\alpha, \\ y = n\beta, \\ z = 0, \end{cases} \quad B:\begin{cases} x = m\alpha_1, \\ y = n\beta_1, \\ z = 0, \end{cases} \quad C:\begin{cases} x = m\alpha_2, \\ y = n\beta_2, \\ z = 0, \end{cases}$$

so kann man als gegeben ansehen die Längen der Seiten der Dreiecke $A_0B_0C_0$ und $A_1B_1C_1$, nämlich a_0, b_0, c_0 und a_1, b_1, c_1 und die Lothe von den Eckpunkten der ersten Basis auf die Ebene (E) der zweiten Basis, nämlich

$$(7.)\quad A_0A=\zeta=p\gamma,\quad B_0B=\zeta_1=p\gamma_1,\quad C_0C=\zeta_2=p\gamma_2,$$

woraus sich sofort die Quadrate der Seiten des Dreiecks ABC ergeben:

$$(8.)\quad \begin{cases} a^2=a_0^2-(\zeta_1-\zeta_2)^2=m^2(\alpha_1-\alpha_2)^2+n^2(\beta_1-\beta_2)^2,\\ b^2=b_0^2-(\zeta_2-\zeta\ )^2=m^2(\alpha_2-\alpha\ )^2+n^2(\beta_2-\beta\ )^2,\\ c^2=c_0^2-(\zeta\ -\zeta_1)^2=m^2(\alpha\ -\alpha_1)^2+n^2(\beta\ -\beta_1)^2; \end{cases}$$

dagegen sind zu bestimmen die Werthe von m^2, n^2, p^2 und den Constanten α, β, γ, d. h. die Hauptachsen der von P erzeugten Fläche ihrer Länge und Lage nach.

Ehe ich zur Bestimmung dieser Werthe übergehe, erinnere ich an eine Umformung der Determinante

$$S=\begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1\\ 1, & c_{00}, & c_{01}, & c_{02}\\ 1, & c_{10}, & c_{11}, & c_{12}\\ 1, & c_{20}, & c_{21}, & c_{22} \end{vmatrix},$$

in welcher $c_{ik}=c_{ki}$ und die Elemente mit gleichen Indices verschwinden, nämlich

$$(9.)\quad S=-(S_1+S_2),$$

wo

$$S_1=\begin{vmatrix} c_{00}, & c_{01}, & c_{02}\\ c_{10}, & c_{11}, & c_{12}\\ c_{20}, & c_{21}, & c_{22} \end{vmatrix}\quad\text{und}\quad S_2=\begin{vmatrix} 1-c_{00}, & 1-c_{01}, & 1-c_{02}\\ 1-c_{10}, & 1-c_{11}, & 1-c_{12}\\ 1-c_{20}, & 1-c_{21}, & 1-c_{22} \end{vmatrix}.$$

Aus den Gleichungen

$$(10.)\quad \begin{cases} a_0^2 = m^2(\alpha_1-\alpha_2)^2+n^2(\beta_1-\beta_2)^2+p^2(\gamma_1-\gamma_2)^2,\\ b_0^2 = m^2(\alpha_2-\alpha\ )^2+n^2(\beta_2-\beta\ )^2+p^2(\gamma_2-\gamma\ )^2,\\ c_0^2 = m^2(\alpha\ -\alpha_1)^2+n^2(\beta\ -\beta_1)^2+p^2(\gamma\ -\gamma_1)^2,\\ a_1^2 = (m^2-p^2)(\alpha_1-\alpha_2)^2+(n^2-p^2)(\beta_1-\beta_2)^2,\\ b_1^2 = (m^2-p^2)(\alpha_2-\alpha\ )^2+(n^2-p^2)(\beta_2-\beta\ )^2,\\ c_1^2 = (m^2-p^2)(\alpha\ -\alpha_1)^2+(n^2-p^2)(\beta\ -\beta_1)^2 \end{cases}$$

erhält man zunächst durch Subtraction die folgenden:

$$(11.)\quad \begin{cases} u_0=a_0^2-a_1^2=p^2[(\alpha_1-\alpha_2)^2+(\beta_1-\beta_2)^2+(\gamma_1-\gamma_2)^2]\\ \qquad\qquad\quad =2p^2(1-\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2-\gamma_1\gamma_2),\\ v_0=b_0^2-b_1^2=2p^2(1-\alpha_2\alpha\ -\beta_2\beta\ -\gamma_2\gamma\ ),\\ w_0=c_0^2-c_1^2=2p^2(1-\alpha\ \alpha_1-\beta\ \beta_1-\gamma\ \gamma_1): \end{cases}$$

um hieraus den Werth von p^2 abzuleiten, berechne man etwa den Werth der Determinante

$$(12.)\qquad \mu_0 = -\begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 0, & w_0, & v_0 \\ 1, & w_0, & 0, & u_0 \\ 1, & v_0, & u_0, & 0 \end{vmatrix},$$

d. h. des 16fachen Quadrats des Inhaltes des Dreiecks, welches zu Seiten hat $\sqrt{u_0}$, $\sqrt{v_0}$, $\sqrt{w_0}$, wenn ein solches Dreieck überhaupt möglich ist, so wird derselbe, wenn man

$$1-\alpha_i\alpha_k-\beta_i\beta_k-\gamma_i\gamma_k = c_{ik}$$

setzt, indem man für u_0, v_0, w_0 die Werthe aus den Gleichungen (11.) einführt und den Factor $2p^2$ vor die Determinante schafft,

$$-\mu_0 = 4p^4.\begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & c_{00}, & c_{01}, & c_{02} \\ 1, & c_{10}, & c_{11}, & c_{12} \\ 1, & c_{20}, & c_{21}, & c_{22} \end{vmatrix},$$

in welcher Determinante die Elemente mit gleichen Indices vermöge der Gleichungen (5.) verschwinden. Nach Gleichung (9.) wird

$$\mu_0 = 4p^4(S_1+S_2),$$

wo

$$S_1 = \begin{vmatrix} c_{00}, & c_{01}, & c_{02} \\ c_{10}, & c_{11}, & c_{12} \\ c_{20}, & c_{21}, & c_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0, & c_{01}, & c_{02} \\ c_{10}, & 0, & c_{12} \\ c_{20}, & c_{21}, & 0 \end{vmatrix} = 2c_{12}.c_{20}.c_{01},$$

weil $c_{ik} = c_{ki}$ ist, und

$$S_2 = \begin{vmatrix} 1-c_{00}, & 1-c_{01}, & 1-c_{02} \\ 1-c_{10}, & 1-c_{11}, & 1-c_{12} \\ 1-c_{20}, & 1-c_{21}, & 1-c_{22} \end{vmatrix}$$

nach dem Satze über die Multiplication von Determinanten dem Quadrate der Determinante

$$(13.)\qquad \begin{vmatrix} \alpha_0, & \beta_0, & \gamma_0 \\ \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1 \\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2 \end{vmatrix} = [\alpha, \beta, \gamma]$$

gleich wird: bezeichnet man das Volumen des Tetraeders, welches den Mittelpunkt des Ellipsoids, d. h. den Anfangspunkt der Coordinaten, und die Punkte A_0, B_0, C_0 zu Ecken hat, durch V_0, so ist

$$S_2 = [\alpha, \beta, \gamma]^2 = \left(\frac{6V_0}{mnp}\right)^2,$$

ferner

$$S_1 = 2c_{12}.c_{20}.c_{10} = \frac{u_0 v_0 w_0}{4p^6};$$

so dass sich folgende Beziehungsgleichung zwischen den Hauptachsen der entstehenden Fläche ergiebt:

$$(14.) \qquad \mu_0.p^2 = u_0 v_0 w_0 + \frac{4p^4}{m^2 n^2}\cdot(6V_0)^2.$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass, wenn V_0 verschwindet, d. h. die Ebene der ersten Basis $A_0B_0C_0$ durch den Mittelpunkt der Fläche geht, zur Bestimmung von p^2 die Gleichung

$$\mu_0 p^2 = u_0 v_0 w_0$$

dient, welche vollständig mit der von *Jacobi* für den Fall, wo die Ebenen der beiden Basen zusammenfallen, gefundenen übereinkommt. (pag. 191.)

Eine zweite Relation zwischen den Grössen m^2, n^2 und p^2 ergiebt sich durch Umformung des Werthes

$$u_0 v_0 w_0 = 4p^6.S_1:$$

wendet man auf diese Determinante S_1 den Satz über die Multiplication der Determinanten an, so ergiebt sich, wenn man kurz eine Determinante von der Form

$$(15.) \qquad \begin{vmatrix} 1, & \delta_0, & \varepsilon_0 \\ 1, & \delta_1, & \varepsilon_1 \\ 1, & \delta_2, & \varepsilon_2 \end{vmatrix} = [\delta, \varepsilon]$$

setzt:

$$(16.) \qquad u_0 v_0 w_0 = 4p^6.([\beta,\gamma]^2 + [\gamma,\alpha]^2 + [\alpha,\beta]^2 - [\alpha,\beta,\gamma]^2),$$

d. h.

$$(17.) \qquad \mu_0 = 4p^4([\beta,\gamma]^2 + [\gamma,\alpha]^2 + [\alpha,\beta]^2).$$

Bezeichnet man die Projectionen des Dreiecks $A_0B_0C_0$ auf die yz-, zx-, xy-Ebene resp. durch Δ_x, Δ_y, Δ_z, so ergiebt sich

$$[\beta,\gamma] = \frac{2\Delta_x}{np}, \quad [\gamma,\alpha] = \frac{2\Delta_y}{pm}, \quad [\alpha,\beta] = \frac{2\Delta_z}{mn},$$

so dass man erhält

$$(18.) \qquad \mu_0 = 16p^4\left[\left(\frac{\Delta_x}{np}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_y}{pm}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_z}{mn}\right)^2\right],$$

aus welcher Gleichung hervorgeht, dass *beim Ellipsoid der Ausdruck von* μ_0 *stets positiv ist.*

Die dritte, schon von *Jacobi* gegebene, Gleichung zwischen den Verhältnissen $\frac{p^2}{m^2}$ und $\frac{p^2}{n^2}$ erhält man unter Berücksichtigung der Werthe

$$(19.)\quad \begin{cases} u = a^2-a_1^2 = p^2[(\alpha_1-\alpha_2)^2+(\beta_1-\beta_2)^2], \\ v = b^2-b_1^2 = p^2[(\alpha_2-\alpha\ )^2+(\beta_2-\beta\ )^2], \\ w = c^2-c_1^2 = p^2[(\alpha\ -\alpha_1)^2+(\beta\ -\beta_1)^2] \end{cases}$$

aus der Berechnung der Determinante

$$(20.)\qquad \mu = -\begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 0, & w, & v \\ 1, & w, & 0, & u \\ 1, & v, & u, & 0 \end{vmatrix},$$

welche also ebenfalls mit dem Quadrat des vierfachen Inhalts eines Dreiecks, und zwar desjenigen mit den Seiten $\sqrt{u}$, $\sqrt{v}$, $\sqrt{w}$, übereinstimmt, wenn ein solches Dreieck möglich ist. Man setze

$$c_{ik} = (\alpha_i-\alpha_k)^2+(\beta_i-\beta_k)^2,$$

so dass $c_{ik}=c_{ki}$ ist und $c_{ii}=c_{kk}=0$, so wird mit Herausnahme des Factors p^4:

$$-\mu = p^4.S \quad \text{(s. Gl. (9.))}$$

oder

$$\mu = p^4(S_1+S_2);$$

es ist aber nach dem Satze über die Multiplication der Determinanten, wenn man die Elemente von S_2, nämlich

$$1-c_{ik} = 1.1-\alpha_i^2.1-1.\alpha_k^2-\beta_i^2.1-1.\beta_k^2+2\alpha_i\alpha_k+2\beta_i\beta_k$$

setzt,

$$S_2 = 4[\alpha,\beta]^2-S_1,$$

folglich

$$(21.)\qquad \mu = 4p^4[\alpha,\beta]^2 = \frac{p^4}{m^2n^2}\cdot 16\Delta_z^2$$

oder

$$\frac{p^4}{m^2n^2} = \frac{\mu}{16\Delta_z^2},$$

die *Jacobi*sche Gleichung (S. 192). Demnach ergiebt sich vermöge Gleichung (14.):

$$(22.)\qquad \mu_0p^2 = u_0v_0w_0+\frac{\mu}{\Delta_z^2}(3V_0)^2,$$

und weil

$$3V_0 = A_0B_0C_0.h = \frac{\Delta_z.h}{\cos i}$$

ist, wenn h das Loth vom Mittelpunkte der Fläche auf die Ebene des Dreiecks $A_0B_0C_0$ und i den Winkel der Ebenen der beiden Basen bedeutet, so erhält man

$$(23.)\qquad \mu_0 p^2 = u_0 v_0 w_0 + \frac{\mu h^2}{\cos^2 i} \quad \text{oder} \quad \mu_0 p^2 = u_0 v_0 w_0 + \mu h_1^2,$$

wo h_1 das Loth, im Mittelpunkt der Fläche auf der Ebene der Grenzfläche bis zur Durchschneidung mit der Ebene des Dreiecks $A_0B_0C_0$ errichtet, bezeichnet; eine bemerkenswerthe Beziehung zwischen der kleinen Achse p und diesem Lothe, zumal sich nach den Entwickelungen *Jacobis* für die Ausdrücke $\frac{u_0 v_0 w_0}{\mu_0}$ und $\frac{\mu}{\mu_0}$ eine einfache geometrische Deutung ergiebt.

Es möge eine kurze Herleitung dieser von *Jacobi* gegebenen Resultate im Anschluss an die eben gefundenen Gleichungen hier ihre Stelle finden.

Es seien D_0, E_0, F_0 Punkte, welche den Punkten A_0, B_0, C_0 des Ellipsoids in der Weise entsprechen, dass man aus den x-, y- und z-Coordinaten der letzteren die zugehörigen Coordinaten der ersteren erhält, wenn man dieselben resp. mit $\frac{p}{m}$, $\frac{p}{n}$, 1 multiplicirt. Diese Punkte D_0, E_0, F_0 werden also bestimmt durch die Gleichungen:

$$(24.)\qquad D_0:\begin{cases} x = p\alpha, \\ y = p\beta, \\ z = p\gamma, \end{cases} \quad E_0:\begin{cases} x = p\alpha_1, \\ y = p\beta_1, \\ z = p\gamma_1, \end{cases} \quad F_0:\begin{cases} x = p\alpha_2, \\ y = p\beta_2, \\ z = p\gamma_2 \end{cases}$$

und liegen vermöge der Beziehungsgleichungen (5.) zwischen den Constanten α, β, γ auf der dem Ellipsoid concentrischen Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = p^2:$$

ferner seien D, E, F die Projectionen der Punkte D_0, E_0, F_0 auf die xy-Ebene; es ergiebt sich dann sofort, dass u_0, v_0, w_0 und u, v, w resp. übereinkommen mit den Quadraten der Seiten der Dreiecke $D_0E_0F_0$ und DEF, und dass μ_0 und μ die Quadrate der vierfachen Dreiecke $D_0E_0F_0$ und DEF sind. Es ist demnach

$$\frac{u_0 v_0 w_0}{\mu_0} = r_0^2 \quad \text{und} \quad \frac{\mu}{\mu_0} = \cos^2\varphi,$$

wenn man mit r_0 den Radius des dem Dreieck $D_0E_0F_0$ umschriebenen Kreises und mit φ den Winkel der Ebenen $D_0E_0F_0$ und DEF bezeichnet. Wenn ferner l die Länge ist des Lothes vom Mittelpunkte der Hilfskugel auf die Ebene des Dreiecks $D_0E_0F_0$, so ist

$$l = \frac{p.[\alpha, \beta, \gamma]}{\sqrt{[\beta, \gamma]^2 + [\gamma, \alpha]^2 + [\alpha, \beta]^2}} \quad \text{und} \quad \cos\varphi = \frac{[\alpha, \beta]}{\sqrt{[\beta, \gamma]^2 + [\gamma, \alpha]^2 + [\alpha, \beta]^2}};$$

auf ähnliche Weise ergiebt sich:

$$h = \frac{mnp[\alpha,\beta,\gamma]}{N} \quad \text{und} \quad \cos i = \frac{mn[\alpha,\beta]}{N},$$

wo

$$N = \sqrt{n^2p^2[\beta,\gamma]^2+p^2m^2[\gamma,\alpha]^2+m^2n^2[\alpha,\beta]^2},$$

d. h.

$$\frac{h}{\cos i} = \frac{l}{\cos\varphi},$$

so dass die Gleichung (23.) sich folgendermassen gestaltet:

$$(25.) \qquad p^2 = r_0^2+l^2:$$

in der That die Gleichung, auf welche sich die von *Jacobi* (S. 207) gegebene Construction der kleinsten Halbachse p des Ellipsoids bezieht. Diese Halbachse kommt alsdann überein mit dem Radius R derjenigen dem Dreieck $D_0E_0F_0$ umschriebenen Kugel, deren Mittelpunkt in der Ebene des Dreiecks DEF liegt. Für den Fall des einflächigen und zweiflächigen Hyperboloids gestattet die Gleichung (23.) und demnach auch die Gleichung (25.) eine ähnliche Deutung, indem den Ausdrücken $\frac{u_0v_0w_0}{\mu_0}$ und $\frac{\mu}{\mu_0}$ analoge Grössenbeziehungen als beim Ellipsoid zukommen; es mögen darum der Kürze wegen die Bezeichnungen

$$(26.) \qquad \frac{u_0v_0w_0}{\mu_0} = r_0^2, \qquad \frac{\mu h^2}{\mu_0\cos^2 i} = l^2, \qquad r_0^2+l^2 = R^2$$

durchweg beibehalten werden. Diese Ausdrücke, in welchen nur die bekannten Grössen u_0, v_0, w_0, μ_0, μ und i vorkommen, können als von vornherein bestimmbar zur Discussion der entstehenden Fläche benutzt werden, sobald auch für den Mittelpunkt der Fläche eine Construction angegeben ist, d. h. wenn h, die Länge des von diesem Mittelpunkte auf die Ebene des Dreiecks $A_0B_0C_0$ gefällten Lothes, als bekannt angesehen werden kann.

Dieser *Mittelpunkt C der Fläche* ergiebt sich einfach aus dem Verhältniss, in welchem die Seiten des Dreiecks ABC, welches der Lage nach bekannt ist, durch die Verbindungslinien OA, OB, OC getheilt werden, d. h. aus dem Verhältniss der Dreiecke

$$OBC:OCA:OAB = (\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1):(\alpha_2\beta-\alpha\beta_2):(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta).$$

Es ist (11.)

$$\begin{aligned} u_0+2\zeta_1\zeta_2 &= 2p^2(1-\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2), \\ v_0+2\zeta_2\zeta &= 2p^2(1-\alpha_2\alpha-\beta_2\beta), \\ w_0+2\zeta\zeta_1 &= 2p^2(1-\alpha\alpha_1-\beta\beta_1): \end{aligned}$$

zu diesen Gleichungen kann man als identisch hinzunehmen:

$$2\zeta_i\zeta_i = 2p^2(1-\alpha_i\alpha_i-\beta_i\beta_i).$$

Wenn man jetzt die Determinante

$$T = \begin{vmatrix} 0, & k_0, & k_1, & k_2 \\ 1, & 2\zeta\zeta, & w_0+2\zeta\zeta_1, & v_0+2\zeta\zeta_2 \\ 1, & w_0+2\zeta_1\zeta, & 2\zeta_1\zeta_1, & u_0+2\zeta_1\zeta_2 \\ 1, & v_0+2\zeta_2\zeta, & u_0+2\zeta_2\zeta_1, & 2\zeta_2\zeta_2 \end{vmatrix}$$

in Rechnung zieht, so ergiebt sich

$$\frac{\partial T}{\partial k_0} = -\begin{vmatrix} 1, & w_0+2\zeta\zeta_1, & v_0+2\zeta\zeta_2 \\ 1, & 2\zeta_1\zeta_1, & u_0+2\zeta_1\zeta_2 \\ 1, & u_0+2\zeta_2\zeta_1, & 2\zeta_2\zeta_2 \end{vmatrix}$$

$$= -[u_0(v_0+w_0-u_0)+2u_0(\zeta\zeta_1+\zeta\zeta_2-2\zeta_1\zeta_2)-2(\zeta_1-\zeta_2)(\zeta_1 v_0-\zeta_2 w_0)];$$

andererseits ergiebt sich, wenn man die Elemente der Determinante durch die Grössen p und α, β, γ ausdrückt:

$$\frac{\partial T}{\partial k_0} = -4p^4\begin{vmatrix} 1, & 1-\alpha\alpha_1-\beta\beta_1, & 1-\alpha\alpha_2-\beta\beta_2 \\ 1, & 1-\alpha_1\alpha_1-\beta_1\beta_1, & 1-\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2 \\ 1, & 1-\alpha_2\alpha_1-\beta_2\beta_1, & 1-\alpha_2\alpha_2-\beta_2\beta_2 \end{vmatrix}$$

$$= -4p^4(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1).[\alpha,\beta],$$

und in analoger Weise die Werthe von $\frac{\partial T}{\partial k_1}$ und $\frac{\partial T}{\partial k_2}$ durch cyklisches Fortschreiten der Indices, so dass das gesuchte Verhältniss wird:

$$(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1):(\alpha_2\beta-\alpha\beta_2):(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta) = \frac{\partial T}{\partial k_0}:\frac{\partial T}{\partial k_1}:\frac{\partial T}{\partial k_2},$$

wo $\frac{\partial T}{\partial k_0}$, $\frac{\partial T}{\partial k_1}$, $\frac{\partial T}{\partial k_2}$ nach der *Jacobi*schen Bezeichnung der Reihe nach zu ersetzen sind durch die Gewichte (α), (β), (γ), nämlich:

$$(27.)\quad \begin{cases} (\alpha) = u_0(v_0+w_0-u_0)+2u_0(\zeta\zeta_1+\zeta\zeta_2-2\zeta_1\zeta_2)-2(\zeta_1-\zeta_2)(\zeta_1 v_0-\zeta_2 w_0), \\ (\beta) = v_0(w_0+u_0-v_0)+2v_0(\zeta_1\zeta_2+\zeta_1\zeta-2\zeta_2\zeta)-2(\zeta_2-\zeta)(\zeta_2 w_0-\zeta u_0), \\ (\gamma) = w_0(u_0+v_0-w_0)+2w_0(\zeta_2\zeta+\zeta_2\zeta_1-2\zeta\zeta_1)-2(\zeta-\zeta_1)(\zeta u_0-\zeta_1 v_0). \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (24.) und der sich daran anschliessenden Definition der Punkte D, E, F als Projectionen der Punkte D_0, E_0, F_0 auf die xy-Ebene ergiebt sich die Proportion

$$OEF:OFD:ODE = (\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1):(\alpha_2\beta-\alpha\beta_2):(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)$$

und demnach auch

$$OEF:OFD:ODE = OBC:OCA:OAB,$$

demgemäss lässt sich die von *Jacobi* eingeführte Hilfskugel zugleich zur Construction des Mittelpunktes des Ellipsoids benutzen, und zwar in folgender Weise:

In den Eckpunkten D, E, F des Dreiecks, welches aus den Längen $EF=\sqrt{u}$, $FD=\sqrt{v}$, $DE=\sqrt{w}$ construirt ist, errichte man resp. die Lothe ζ, ζ_1, ζ_2, lege durch die freien Endpunkte derselben D_0, E_0, F_0 den Kreis, errichte im Mittelpunkte dieses Kreises ein Loth auf der zugehörigen Ebene, welches die Ebene DEF im Punkte O_1 durchschneiden mag, und verbinde O_1 mit den Eckpunkten des Dreiecks DEF, so ergiebt sich als Mittelpunkt des Ellipsoids derjenige Punkt O der Ebene des Dreiecks ABC, für welchen die Proportion stattfindet:

$$OBC:OCA:OAB = O_1EF:O_1FD:O_1DE.$$

Als die Summe der Gewichte (α), (β), (γ), welche *Jacobi* durch μ bezeichnet hat, ergiebt sich aus (27.)

$$(28.)\qquad \mu = \mu_0-4M,$$

wo

$$(29.)\qquad \begin{cases} M = u_0(\zeta-\zeta_1)(\zeta-\zeta_2)+v_0(\zeta_1-\zeta_2)(\zeta_1-\zeta)+w_0(\zeta_2-\zeta)(\zeta_2-\zeta_1) \\ \text{oder auch} \\ M = u\,(\zeta-\zeta_1)(\zeta-\zeta_2)+v\,(\zeta_1-\zeta_2)(\zeta_1-\zeta)+w\,(\zeta_2-\zeta)(\zeta_2-\zeta_1), \end{cases}$$

und μ die frühere Bedeutung behält, nämlich

$$\mu = -u^2-v^2-w^2+2vw+2wu+2uv;$$

zu diesem Resultate gelangt man entweder dadurch, dass man in den Gleichungen (27.) und (28.) die Grössen u_0, v_0, w_0 durch die Grössen u, v, w ersetzt, nämlich

$$(30.)\qquad \begin{cases} u_0 = a^2-a_1^2+(\zeta_1-\zeta_2)^2 = u+(\zeta_1-\zeta_2)^2, \\ v_0 = b^2-b_1^2+(\zeta_2-\zeta\,)^2 = v+(\zeta_2-\zeta\,)^2, \\ w_0 = c^2-c_1^2+(\zeta\,-\zeta_1)^2 = w+(\zeta\,-\zeta_1)^2, \end{cases}$$

oder durch eine selbständige Herleitung der Ausdrücke für die Gewichte (α), (β), (γ) unter Zugrundelegung der Gleichungen

$$u+\zeta_1^2+\zeta_2^2 = 2p^2(1-\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2),$$
$$v+\zeta_2^2+\zeta^2 = 2p^2(1-\alpha_2\alpha\,-\beta_2\beta\,),$$
$$w+\zeta^2+\zeta_1^2 = 2p^2(1-\alpha\,\alpha_1-\beta\,\beta_1),$$

durch welches Verfahren sich die *Jacobi*schen Werthe von (α), (β), (γ) (S. 203) ergeben. Endlich kann man auch unmittelbar zur Gleichung (28.) gelangen, indem man die Werthe von u_0, v_0, w_0 aus (30.) in den Ausdruck von μ_0 (12.) einsetzt.

Der Werth von M (29.) gestattet in derselben Weise, wie *Jacobi* bei einem ähnlichen Ausdruck (S. 193) gezeigt hat, folgende Umformung: setzt man

$$\zeta_1-\zeta_2=\delta,\quad \zeta_2-\zeta=\delta_1,\quad \zeta-\zeta_1=\delta_2,$$

so wird

$$M=-(u\delta_1\delta_2+v\delta_2\delta+w\delta\delta_1),$$

und weil $\delta+\delta_1+\delta_2=0$ ist, also von den Grössen δ die eine, z. B. δ, ein anderes Vorzeichen haben muss, als die beiden anderen, so ergiebt sich durch Elimination von δ:

$$\begin{aligned} M &= -[u\delta_1\delta_2-v\delta_2^2-w\delta_1^2-(v+w)\delta_1\delta_2] \\ &= -[(u-(\sqrt{v}+\sqrt{w})^2)\delta_1\delta_2-(v\delta_2-w\delta_1)^2] \\ &= \delta_1\delta_2[(\sqrt{v}+\sqrt{w})^2-u]+(v\delta_2-w\delta_1)^2; \end{aligned}$$

weil nun δ_1 und δ_2 nach der Annahme dasselbe Vorzeichen haben, so ist M positiv, wenn $\sqrt{v}+\sqrt{w}>\sqrt{u}$ ist, d. h. wenn sich aus den Längen $\sqrt{u}$, $\sqrt{v}$, $\sqrt{w}$ ein Dreieck construiren lässt, oder wenn μ (20.) positiv ist. Die Doppelgleichung (29.) zeigt, dass hierbei auch μ durch μ_0 ersetzt werden kann. Aus der Gleichung (28.)

$$\mu_0 = \mu+4M$$

folgt demnach, dass *jedem positiven Werthe von μ stets ein positiver Werth von μ_0 zugehört.*

Noch ist für das Folgende die Bemerkung wichtig, dass *die Fälle, wo μ_0 positiv und von den Grössen u_0, v_0, w_0 nur eine einzige, z. B. w_0, oder zwei derselben, z. B. u_0 und v_0, negativ sind, nicht stattfinden können, weil sich alsdann μ_0 darstellen lässt unter der Form*

$$(31.)\qquad -2w_0(u_0+v_0)-(u_0-v_0)^2-w_0^2,$$

also jedenfalls negativ sein muss: *dasselbe gilt für den Zusammenhang der Grössen μ, u, v, w.*

Die Werthe von m^2 und n^2 ergeben sich sofort aus der Gleichung (21.): entnimmt man für dieselbe den Werth von $[\alpha,\beta]$ aus den Gleichungen (4.), so ergiebt sich

$$(32.)\qquad \frac{p^4}{(m^2-p^2)(n^2-p^2)} = \frac{\mu}{16\Delta_1^2},$$

wo Δ_1 die zweite Basis $A_1B_1C_1$ bezeichnet: aus den Gleichungen (21.) und (32.) erhält man alsdann

$$(33.)\qquad m^2+n^2 = \frac{p^2}{\mu}(16\Delta_2^2-16\Delta_1^2+\mu),$$

einen Ausdruck, dessen Vorzeichen *Jacobi* (S. 194) für den Fall, wo u, v, w, μ und p^2 positiv sind, als positiv nachgewiesen hat, und welcher sich wegen des Werthes

$$\mu = 16\Delta_z^2 + 16\Delta_1^2 - 2N,$$

wo

$$N = -a^2 a_1^2 - b^2 b_1^2 - c^2 c_1^2 + 2b^2 c_1^2 + 2b_1^2 c^2 + 2c^2 a_1^2 + 2c_1^2 a^2 + 2a^2 b_1^2 + 2a_1^2 b^2,$$

auch folgendermassen darstellen lässt

$$(34.)\qquad m^2 + n^2 = \frac{2p^2}{\mu}(16\Delta_z^2 - N),$$

wo, wenn $a > a_1,\ b > b_1,\ c > c_1$, auch $16\Delta_z^2 > N$,
und wenn $a < a_1,\ b < b_1,\ c < c_1$, auch $16\Delta_z^2 < N$.

Nunmehr ist die quadratische Gleichung, deren Wurzeln m^2 und n^2 sind, weil sowohl das Product (21.) als die Summe (33.) dieser Grössen bekannt ist, leicht herzustellen:

$$(35.)\qquad \mu . x^2 - 2p^2(16\Delta_z^2 - N)x + 16p^4 . \Delta_z^2 = 0.$$

Die Discriminante dieser Gleichung lässt sich auf die Form bringen:

$$4a_1^2 b_1^2 c_1^2 \left[a_1^2\left(\frac{a^2}{a_1^2} - \frac{b^2}{b_1^2}\right)\left(\frac{a^2}{a_1^2} - \frac{c^2}{c_1^2}\right) + b_1^2\left(\frac{b^2}{b_1^2} - \frac{c^2}{c_1^2}\right)\left(\frac{b^2}{b_1^2} - \frac{a^2}{a_1^2}\right) + c_1^2\left(\frac{c^2}{c_1^2} - \frac{a^2}{a_1^2}\right)\left(\frac{c^2}{c_1^2} - \frac{b^2}{b_1^2}\right)\right],$$

d. h. dieselbe ist stets positiv, wie aus der *Jacobi*schen Darstellungsweise (S. 193) hervorgeht. Darum ist *die Aufgabe, zu einem Dreieck $A_0B_0C_0$ in einer der Lage nach gegebenen Ebene ein zweites Dreieck $A_1B_1C_1$ zu construiren, so dass die Eckpunkte beider Dreiecke resp. conjugirte Punkte werden confocaler Flächen (F_0) und (F_1), von denen (F_1) sich auf eine Grenzfläche reducirt, stets löslich.*

Die Gleichung (35.) hat eine unendlich grosse Wurzel, wenn μ *gleich Null* wird: alsdann wird demnach von den beiden Halbachsen der Fläche, welche in die Ebene der Grenzfläche zu liegen kommen, die eine unendlich lang, d. h. diese Grenzfläche (F_1) ist ein von einer Parabel oder einem System zweier parallelen Geraden ausgeschnittenes Stück der Ebene (E), oder was dasselbe ist, die Fläche (F_0) wird ein Paraboloid oder ein Cylinder. Dieser Fall erfordert eine besondere Untersuchung (s. §§. 13, 14). Endlichen Werthen von μ entsprechen die centrischen Flächen, nämlich das Ellipsoid, die beiden Hyperboloide und als Uebergangsfläche der Kegel*), und zwar werden dieselben im Einzelnen durch folgende Verhältnisse bedingt:

---

*) Es sei $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} + \frac{z^2}{p^2} = 0$ die Gleichung des Kegels: alsdann bleiben zur Bestimmung der Dreiecke $A_0B_0C_0$, $A_1B_1C_1$ und ABC die Gleichungen (3.), (4.) und (6.) un-

Erster Hauptfall.

Es sei μ positiv: so ist nach (28.) auch μ_0 positiv, und haben sowohl m^2 und n^2 (21.) als auch m^2-p^2 und n^2-p^2 (32.) gleiche Vorzeichen; mit Rücksicht auf Gleichung (23.) kann alsdann:

1) *$u_0v_0w_0$ positiv sein.* In diesem Falle sind sowohl p^2 (23.) als auch u_0, v_0, w_0 (31.) positiv, d. h. die Seiten der beiden Basisdreiecke $a_0 > a_1$, $b_0 > b_1$, $c_0 > c_1$, und weil sich hier, wo μ_0, μ und p^2 positiv sind, die Construction der Grössen μ_0 und μ mit Anwendung der concentrischen Hilfskugel (24.) ausführen lässt, d. h. die Quadrate der Differenzen der Projectionsperpendikel $(\zeta_1-\zeta_2)^2$, $(\zeta_2-\zeta)^2$, $(\zeta-\zeta_1)^2$ kleiner sind als die Quadrate der zugehörigen Seiten u_0, v_0, w_0 des zu projicirenden Dreiecks $D_0E_0F_0$, so sind auch die Werthe u, v, w (30.) positiv, d. h. die Seiten $a > a_1$, $b > b_1$, $c > c_1$, folglich $\Delta_x > \Delta_1$, und demgemäss m^2+n^2 positiv, (33.) folglich m^2 und n^2 selbst positiv (21.), d. h. die entstehende Fläche ist ein *Ellipsoid*. Es kann

2) *$u_0v_0w_0$ negativ sein;* für diese Annahme sind nothwendig (31.) u_0, v_0, w_0 und umsomehr u, v, w (30.) negativ: dagegen kann hier p^2 sowohl positiv als negativ sein, und zwar vermöge der Gleichungen (25.) und (26.), wenn

a) $r_0^2+l^2 > 0$ ist, so ist p^2 positiv, und weil u, v, w negativ sind, d. h. $a < a_1$, $b < b_1$, $c < c_1$, folglich auch $16\Delta_x^2 < N$ und demnach (34.) m^2+n^2 und ebenso m^2 und n^2 selbst negativ, die Fläche also ein *zweifaches Hyperboloid,* dessen reelle Achse senkrecht zur Ebene (E) der zweiten Basis ist. Wenn

b) $r_0^2+l^2 = 0$, so wird p^2 gleich Null, die Fläche also ein *Kegel,* und zwar, weil m^2 und n^2 gleiche Vorzeichen haben, dessen Schnitte parallel der Ebene (E) Ellipsen sind. Ist endlich

c) $r_0^2+l^2 < 0$, d. h. p^2 negativ, so ist, weil auch hier $16\Delta_x^2 < N$ ist, vermöge Gleichung (34.) m^2+n^2 negativ, d. h. sind auch

---

geändert bestehen: nur die Gleichung (5.) wird die folgende

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = \alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2 = \alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2 = 0;$$

die sich daran anschliessenden Entwickelungen lassen sich darum ebenfalls fast ohne alle Aenderung auf den Kegel übertragen, besonders behalten die Gleichungen (21.) und (33.) ihre Bedeutung zur Bestimmung der Werthe von $\frac{m^2}{p^2}$ und $\frac{n^2}{p^2}$: die Gleichung (25.) dagegen verwandelt sich in $r_0^2+l^2 = 0$.

m^2 und n^2 selbst negativ: es wird also die Fläche ein *einfaches Hyperboloid,* dessen imaginäre Achse die Ebene (E) senkrecht durchschneidet.

Zweiter Hauptfall.

Es sei μ negativ: so haben m^2 und n^2 (21.), sowie (m^2-p^2) und (n^2-p^2) (32.) entgegengesetzte Vorzeichen, d. h. die Flächenschnitte parallel der Ebene (E) der zweiten Basis sind Hyperbeln. Dagegen kann sein

1) μ_0 *positiv* und

a) $u_0 v_0 w_0$ *positiv,* alsdann sind (31.) u_0, v_0, w_0 selbst positiv und
wenn $r_0^2+l^2>0$ ist, so ist p^2 positiv, also die Fläche ein *einfaches Hyperboloid,*
wenn $r_0^2+l^2=0$ ist, so wird $p^2=0$, die Fläche also ein *Kegel,*
wenn $r_0^2+l^2<0$, so wird p^2 negativ, die Fläche also ein *zweiflächiges Hyperboloid;* wenn

b) $u_0 v_0 w_0$ *negativ* ist, so sind (31.) u_0, v_0, w_0 selbst negativ und p^2 negativ, die Fläche also ein *zweifaches Hyperboloid.* Es kann

2) μ_0 *negativ* sein und

a) $u_0 v_0 w_0$ positiv:
wenn $r_0^2+l^2>0$ ist, so ist p^2 negativ, also die Fläche ein *zweifaches Hyperboloid,*
wenn $r_0^2+l^2=0$ ist, so ist $p^2=0$, die Fläche also ein *Kegel,* endlich
wenn $r_0^2+l^2<0$ ist, so ist p^2 positiv, die Fläche also ein *einfaches Hyperboloid,*

b) wenn $u_0 v_0 w_0$ *negativ* ist, so ist p^2 nothwendig positiv, die Fläche also ein *einfaches Hyperboloid.*

Wenn also μ von Null verschieden ist, d. h. wenn von den Quadratwurzeln aus den Differenzen der Quadrate der entsprechenden Seiten der Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ keine gleich der Summe der beiden anderen ist, so ist die Fläche

1) *ein Ellipsoid,*

wenn sowohl u_0, v_0, w_0 als u, v, w positiv sind, d. h. sowohl die Seiten der ersten Basis $A_0B_0C_0$ als die ihrer Projection auf die Ebene (E) ABC grösser sind als die entsprechenden Seiten der zweiten Basis $A_1B_1C_1$, und wenn sowohl μ_0 als μ positiv sind, d. h. wenn sich aus den Quadratwurzeln aus den Differenzen der Quadrate der entsprechenden Seiten der Dreiecke ABC und

$A_1B_1C_1$, folglich umsomehr der Dreiecke $A_0B_0C_0$ und $A_1B_1C_1$ Dreiecke construiren lassen;

2) *ein einflächiges Hyperboloid,* und zwar

a) dessen Schnitte parallel der Ebene (E) *Ellipsen sind,* wenn $r_0^2+l^2<0$ und sowohl u_0, v_0, w_0 als u, v, w negativ sind, d. h. die Seiten sowohl der ersten Basis $A_0B_0C_0$ als umsomehr des Dreiecks ABC kleiner sind als die entsprechenden Seiten der zweiten Basis $A_1B_1C_1$, und sowohl μ_0 als μ positiv sind,

b) dessen Schnitte parallel der Ebene (E) *Hyperbeln sind,* wenn μ negativ ist und

entweder μ_0 positiv ist und $r_0^2+l^2>0$, in welchem Falle die Seiten des Dreiecks $A_0B_0C_0$ alle grösser sind als die entsprechenden Seiten des Dreiecks $A_1B_1C_1$,

oder wenn μ_0 negativ ist und von den Seiten des Dreiecks $A_0B_0C_0$ eine einzige oder alle drei grösser sind als die entsprechenden Seiten des Dreiecks $A_1B_1C_1$, aber $r_0^2+l^2<0$ ist,

oder wenn μ_0 negativ ist und von den Seiten des Dreiecks $A_0B_0C_0$ eine einzige oder alle drei kleiner sind als die entsprechenden Seiten des Dreiecks $A_1B_1C_1$;

3) *ein zweiflächiges Hyperboloid,* und zwar

a) dessen Schnitte parallel der Ebene (E) *Ellipsen sind,* wenn $r_0^2+l^2>0$ und u, v, w und u_0, v_0, w_0 negativ, d. h. die Seiten des Dreiecks $A_0B_0C_0$, also umsomehr des Dreiecks ABC kleiner sind als die entsprechenden Seiten des Dreiecks $A_1B_1C_1$, und wenn sowohl μ_0 als μ positiv sind;

b) dessen Schnitte parallel der Ebene (E) *Hyperbeln sind,* wenn μ negativ ist und

entweder μ_0 positiv ist und $r_0^2+l^2<0$, in welchem Falle die Seiten des Dreiecks $A_0B_0C_0$ grösser sind als die entsprechenden Seiten von $A_1B_1C_1$,

oder wenn μ_0 positiv ist und die Seiten des Dreiecks $A_0B_0C_0$ kleiner sind als die entsprechenden Seiten des Dreiecks $A_1B_1C_1$,

oder wenn μ_0 negativ ist und $r_0^2+l^2>0$, und von den Seiten der ersten Basis $A_0B_0C_0$ nur eine einzige oder alle drei grösser sind als die entsprechenden Seiten der zweiten Basis $A_1B_1C_1$.

Ist $r_0^2+l^2=0$, so wird die Fläche

4) *ein Kegel,* und zwar

a) dessen Schnitte parallel der Ebene (E) Ellipsen sind, wenn μ positiv ist, in welchem Falle auch μ_0 positiv ist, und die Seiten sowohl des Dreiecks $A_0B_0C_0$ als umsomehr des Dreiecks ABC kleiner sind als die entsprechenden Seiten des Dreiecks $A_1B_1C_1$,

b) dessen Schnitte parallel der Ebene (E) Hyperbeln sind, wenn μ negativ ist; alsdann ist *entweder* μ_0 positiv, und sind die Seiten des Dreiecks $A_0B_0C_0$ grösser als die entsprechenden des Dreiecks $A_1B_1C_1$, *oder* es ist μ_0 negativ und von den Seiten des Dreiecks $A_0B_0C_0$ entweder nur eine einzige oder alle drei grösser als die entsprechenden Seiten des Dreiecks $A_1B_1C_1$.

Im Allgemeinen ist hierzu zu bemerken, dass die unter *a*) und *b*) abgesonderten Fälle der letzten drei Flächenarten insofern wesentlich zu unterscheiden sind, als sich bei ihnen je die eine oder die andere Grenzfläche der zugehörigen Fläche ergiebt. Dasselbe gilt für die mit einem Mittelpunkt versehenen *Umdrehungsflächen,* welche als besondere Fälle der bisher betrachteten Flächen auftreten. Man hat zu unterscheiden:

1) *die Umdrehungsflächen, deren Kreisschnitte der Ebene (E) parallel sind,* d. h. das *abgeplattete Sphäroid,* dessen Grenzfläche ein Kreis in der Ebene (*E*) ist, das *zweifache Umdrehungshyperboloid* und den *Umdrehungskegel,* beide mit der Ebene (*E*) in ihrer ganzen Ausdehnung als Grenzfläche, endlich das *einfache Umdrehungshyperboloid* mit dem ausserhalb des Focalkreises liegenden Theil der Ebene (*E*) als Grenzfläche. Für alle diese Flächen werden m^2 und n^2 einander gleich, d. h. hat die Gleichung (35.) zwei gleiche Wurzeln, d. h. muss die Discriminante (36.) verschwinden, was, wie *Jacobi* (S. 194) gezeigt hat, stattfindet, wenn

$$a:b:c = a_1:b_1:c_1$$

ist, d. h. *wenn das Dreieck ABC, die Projection nämlich der ersten Basis auf die Ebene (E), ähnlich ist der zweiten Basis* $A_1B_1C_1$.

2) *Die Umdrehungsflächen, deren Kreisschnitte die Ebene (E) senkrecht durchschneiden,* d. h. deren Grenzfläche sich auf ein begrenztes oder unbegrenztes Stück der in dieser Ebene liegenden Umdrehungsachse reducirt, d. h. das verlängerte Sphäroid, die beiden Umdrehungshyperboloide und der Umdrehungskegel, deren Schnitte parallel der Ebene (*E*) Hyperbeln sind: für diese Flächen wird p^2 eine Wurzel der Gleichung (35.), d. h. *muss* Δ_1 *verschwinden, also von den Seiten der zweiten Basis eine gleich der Summe der beiden anderen sein.* In der That ist dies der einzige Fall, wo sich die

Grenzfläche, auf welcher ja die Eckpunkte A_1, B_1, C_1 liegen sollen, in eine gerade Linie zusammenzieht. Endlich

3) *die Kugel* ergiebt sich, wenn sich das Dreieck Δ_1 auf einen Punkt reducirt: alsdann reducirt sich die Grenzfläche selbst auf den Mittelpunkt der Kugel.

Im Uebrigen *gelten für diese Umdrehungsflächen dieselben unterscheidenden Merkmale, als sich vorher für die allgemeinen dreiachsigen Flächen ergeben haben.*

Das Paraboloid.

§. 13. Es seien A_0, B_0, C_0 als Eckpunkte der ersten Basis beliebige Punkte des Paraboloids

$$(1.)\qquad \frac{y^2}{n'}+\frac{z^2}{p'} = 2x,$$

wo $n' = \frac{n^2}{m}$ und $p' = \frac{p^2}{m}$ die Parameter der beiden Hauptparabeln in der xy- und xz-Ebene sind: ferner seien A_1, B_1, C_1 als Eckpunkte der zweiten Basis die conjugirten Punkte des Grenzparaboloids:

$$(2.)\qquad \frac{y^2}{n'-p'} = 2x-p', \quad z = 0,$$

und zwar bestimmt durch die Gleichungen

$$(3.)\qquad A_0:\begin{cases} x = m\alpha = \xi, \\ y = n\beta = \eta, \\ z = p\gamma = \zeta, \end{cases} \quad B_0:\begin{cases} x = m\alpha_1 = \xi_1, \\ y = n\beta_1 = \eta_1, \\ z = p\gamma_1 = \zeta_1, \end{cases} \quad C_0:\begin{cases} x = m\alpha_2 = \xi_2, \\ y = n\beta_2 = \eta_2, \\ z = p\gamma_2 = \zeta_2 \end{cases}$$

und

$$(4.)\qquad A_1:\begin{cases} x = m\alpha+\frac{p'}{2}, \\ y = \sqrt{n^2-p^2}.\beta, \\ z = 0, \end{cases} \quad B_1:\begin{cases} x = m\alpha_1+\frac{p'}{2}, \\ y = \sqrt{n^2-p^2}.\beta_1, \\ z = 0, \end{cases} \quad C_1:\begin{cases} x = m\alpha_2+\frac{p'}{2}, \\ y = \sqrt{n^2-p^2}.\beta_2, \\ z = 0, \end{cases}$$

wo

$$(5.)\qquad \beta^2+\gamma^2 = 2\alpha, \quad \beta_1^2+\gamma_1^2 = 2\alpha_1, \quad \beta_2^2+\gamma_2^2 = 2\alpha_2.$$

Ferner seien A, B, C die Projectionen der Eckpunkte A_0, B_0, C_0 der ersten Basis auf die Ebene (E) der zweiten Basis, d. h. gegeben durch die Gleichungen

$$(6.)\qquad A:\begin{cases} x = m\alpha, \\ y = n\beta, \\ z = 0, \end{cases} \quad B:\begin{cases} x = m\alpha_1, \\ y = n\beta_1, \\ z = 0, \end{cases} \quad C:\begin{cases} x = m\alpha_2, \\ y = n\beta_2, \\ z = 0, \end{cases}$$

so kann man als gegeben ansehen die beiden Basisdreiecke und die Lothe von den Eckpunkten der ersten Basis auf die Ebene (E), nämlich

$$(7.)\qquad A_0A = \zeta = p\gamma,\quad B_0B = \zeta_1 = p\gamma_1,\quad C_0C = \zeta_2 = p\gamma_2,$$

woraus sich sofort für die Seiten des Dreiecks ABC ergiebt:

$$(8.)\qquad \begin{cases} a^2 = a_0^2-(\zeta_1-\zeta_2)^2 = m^2(\alpha_1-\alpha_2)^2+n^2(\beta_1-\beta_2)^2, \\ b^2 = b_0^2-(\zeta_2-\zeta\;)^2 = m^2(\alpha_2-\alpha\;)^2+n^2(\beta_2-\beta\;)^2, \\ c^2 = c_0^2-(\zeta\;-\zeta_1)^2 = m^2(\alpha\;-\alpha_1)^2+n^2(\beta\;-\beta_1)^2; \end{cases}$$

dagegen sind zu bestimmen die Werthe der beiden Parameter n' und p', die Richtung der Achsen und die Lage des Scheitelpunktes des Paraboloids.

Aus den Gleichungen:

$$(10.)\qquad \begin{cases} a_0^2 = m^2(\alpha_1-\alpha_2)^2+n^2(\beta_1-\beta_2)^2+p^2(\gamma_1-\gamma_2)^2, \\ b_0^2 = m^2(\alpha_2-\alpha\;)^2+n^2(\beta_2-\beta\;)^2+p^2(\gamma_2-\gamma\;)^2, \\ c_0^2 = m^2(\alpha\;-\alpha_1)^2+n^2(\beta\;-\beta_1)^2+p^2(\gamma\;-\gamma_1)^2, \\ a_1^2 = m^2(\alpha_1-\alpha_2)^2+(n^2-p^2)(\beta_1-\beta_2)^2, \\ b_1^2 = m^2(\alpha_2-\alpha\;)^2+(n^2-p^2)(\beta_2-\beta\;)^2, \\ c_1^2 = m^2(\alpha\;-\alpha_1)^2+(n^2-p^2)(\beta\;-\beta_1)^2 \end{cases}$$

ergeben sich zunächst durch Subtraction die folgenden:

$$(11.)\qquad \begin{cases} u_0 = a_0^2-a_1^2 = p^2[(\beta_1-\beta_2)^2+(\gamma_1-\gamma_2)^2] \\ \qquad\qquad\qquad = 2p^2(\alpha_1+\alpha_2-\beta_1\beta_2-\gamma_1\gamma_2), \\ v_0 = b_0^2-b_1^2 = 2p^2(\alpha_2+\alpha\;-\beta_2\beta\;-\gamma_2\gamma\;), \\ w_0 = c_0^2-c_1^2 = 2p^2(\alpha\;+\alpha_1-\beta\;\beta_1-\gamma\;\gamma_1) \end{cases}$$

und ebenso durch Subtraction der Gleichungen (8.) und (10.):

$$(12.)\qquad \begin{cases} u = a^2-a_1^2 = p^2(\beta_1-\beta_2)^2, \\ v = b^2-b_1^2 = p^2(\beta_2-\beta\;)^2, \\ w = c^2-c_1^2 = p^2(\beta\;-\beta_1)^2, \end{cases}$$

woraus

$$(13.)\qquad \sqrt{u}+\sqrt{v}+\sqrt{w} = 0 \quad \text{d. h.} \quad \mu = 0,$$

in der That die Bedingung, auf welche schon früher (S. 228) hingewiesen worden ist.

Aus den Gleichungen (12.) ergiebt sich sofort *die Richtung der Achse* des Paraboloids: weil nämlich

$$(14.)\qquad \beta_1-\beta_2:\beta_2-\beta:\beta-\beta_1 = \sqrt{u}:\sqrt{v}:\sqrt{w},$$

so sind dadurch die Verhältnisse der Abschnitte bekannt, in welche durch die

von den Eckpunkten des Dreiecks ABC aus mit der Achse parallel gezogenen Geraden die jedesmaligen Gegenseiten dieses Dreiecks zerfallen. Die Kenntniss der Achsenrichtung führt weiter zu den Projectionen der Seiten des Dreiecks ABC und demnach auch der ersten Basis auf eine zur Achse des Paraboloids senkrechte Ebene. Nennt man nämlich die Punkte, in welchen die durch die Eckpunkte A, B, C mit der Achse parallel gezogenen Geraden die entsprechenden Gegenseiten a, b, c des Dreiecks ABC durchschneiden, resp. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, so kann man die Projectionen irgend zweier Seiten, z. B. der Seiten a und b in einer zur Achse parallelen Richtung etwa ansehen als die Höhen der Dreiecke $CB\mathfrak{B}$ und $CA\mathfrak{A}$ für die Grundlinien $B\mathfrak{B}$ und $A\mathfrak{A}$, weil nun

$$ABC : CB\mathfrak{B} : CA\mathfrak{A} = \sqrt{uv} : u : v,$$

d. h. die beiden Dreiecke $CB\mathfrak{B}$ und $CA\mathfrak{A}$ sofort durch das gegebene Dreieck ABC oder Δ_z darstellbar sind, so kommt die Aufgabe schliesslich hinaus auf die Berechnung der Linien $A\mathfrak{A}$ und $B\mathfrak{B}$. Diese Berechnung führt zu den Werthen

$$(15.)\quad \begin{cases} A\mathfrak{A}^2 = \dfrac{N}{u}, \quad B\mathfrak{B}^2 = \dfrac{N}{v}, \quad \text{und ebenso} \quad C\mathfrak{C}^2 = \dfrac{N}{w}, \\ \text{wo} \\ N = -(a^2\sqrt{vw} + b^2\sqrt{wu} + c^2\sqrt{uv}) \end{cases}$$

stets positiv ist: denn vermöge der Gleichung (13.) müssen von den drei Grössen $\sqrt{u}$, $\sqrt{v}$, $\sqrt{w}$ zwei dasselbe Zeichen haben, etwa $\sqrt{v}$ und $\sqrt{w}$, so dass sich N folgendermassen darstellen lässt:

$$N = \sqrt{vw}[(b+c)^2 - a^2] + (b\sqrt{w} - c\sqrt{v})^2:$$

nur für die Annahme $b+c = a$, d. h. wenn das Dreieck ABC sich auf eine gerade Linie reducirt, welcher Fall später besonders behandelt werden wird, kann der Werth von N verschwinden: derselbe wird alsdann nämlich

$$N = (b\sqrt{w} - c\sqrt{v})^2,$$

also gleich Null, wenn

$$\frac{b^2}{c^2} = \frac{v}{w} = \frac{b^2 - b_1^2}{c^2 - c_1^2},$$

d. h.

$$b : c = b_1 : c_1,$$

folglich auch

$$b + b_1 : c + c_1 \quad \text{d. h.} \quad a : a_1 = b : b_1 = c : c_1;$$

so dass sich also die Seiten des Dreiecks $A_1B_1C_1$ als proportional ergeben

den Seiten a, b, c, d. h. auch die zweite Basis sich auf eine gerade Linie reducirt. Von diesem besonderen Falle also abgesehen, erhält man als die gesuchten *Projectionen* a', b', c' *der Seiten* a, b, c *auf eine zur Achse senkrechte Ebene*

$$(16.)\qquad a'^2 = \frac{4u.\Delta_z^2}{N},\qquad b'^2 = \frac{4v.\Delta_z^2}{N},\qquad c'^2 = \frac{4w.\Delta_z^2}{N}$$

und demnach als die *Projectionen der Seiten des Dreiecks* $A_0B_0C_0$ auf eine solche Ebene:

$$(17.)\quad a_0'^2 = \frac{4u.\Delta_z^2}{N}+(\zeta_1-\zeta_2)^2,\quad b_0'^2 = \frac{4v.\Delta_z^2}{N}+(\zeta_2-\zeta)^2,\quad c_0'^2 = \frac{4w.\Delta_z^2}{N}+(\zeta-\zeta_1)^2.$$

Auch das Dreieck Δ_x, d. h. die Projection des Dreiecks $A_0B_0C_0$ auf die yz-Ebene, ist jetzt als bekannt anzusehen. Dies vorausgesetzt, erhält man durch die Entwickelung des Werthes von μ_0, welchem hier dieselbe Bedeutung wie in §. 12 beigelegt ist, einen einfachen Ausdruck für *das Verhältniss der beiden Parameter* n' *und* p'*:* es wird nämlich, wenn man

$$\alpha_i+\alpha_k-\beta_i\beta_k-\gamma_i\gamma_k = c_{ik}$$

setzt, wo also $c_{ik} = c_{ki}$, indem man für u_0, v_0, w_0 die Werthe aus den Gleichungen (11.) in die Determinante

$$\mu_0 = -\begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 0, & w_0, & v_0 \\ 1, & w_0, & 0, & u_0 \\ 1, & v_0, & u_0, & 0 \end{vmatrix}$$

einsetzt und den Factor $2p^2$ absondert:

$$\mu_0 = -4p^4\begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & c_{00}, & c_{01}, & c_{02} \\ 1, & c_{10}, & c_{11}, & c_{12} \\ 1, & c_{20}, & c_{21}, & c_{22} \end{vmatrix},$$

in welcher Determinante die Elemente mit gleichen Indices vermöge der Gleichungen (5.) verschwinden. Nach Gleichung (9.) des §. 12 wird demnach

$$\mu_0 = 4p^4(S_1+S_2),$$

wo

$$S_1 = \begin{vmatrix} c_{00}, & c_{01}, & c_{02} \\ c_{10}, & c_{11}, & c_{12} \\ c_{20}, & c_{21}, & c_{22} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad S_2 = \begin{vmatrix} 1-c_{00}, & 1-c_{01}, & 1-c_{02} \\ 1-c_{10}, & 1-c_{11}, & 1-c_{12} \\ 1-c_{20}, & 1-c_{21}, & 1-c_{22} \end{vmatrix}.$$

Bringt man die Elemente von S_2 unter die Form

$$1-c_{ik} = 1.1-\alpha_i.1-1.\alpha_k+\beta_i.\beta_k+\gamma_i.\gamma_k,$$

so erhält man durch Anwendung des Gesetzes der Multiplication von Determinanten als Werth dieser Determinante:

$$S_2 = [\beta,\gamma]^2-S_1$$

und demnach, weil $[\beta,\gamma] = \frac{2\Delta_x}{np}$:

$$(18.)\qquad \mu_0 = 16\Delta_x^2.\frac{p^2}{n^2} \quad \text{oder} \quad \frac{n^2}{p^2} = \frac{n'}{p'} = \frac{16\Delta_x^2}{\mu_0}.$$

Das Verhältniss der beiden Parameter n' und p' kommt also seinem Zeichen nach mit μ_0 überein, d. h. den positiven Werthen von μ_0 entspricht das elliptische Paraboloid, den negativen Werthen von μ_0 das hyperbolische Paraboloid, verschwindet μ_0, so wird das Verhältniss der Parameter $\frac{n'}{p'}$ unendlich, d. h. wird die Fläche ein parabolischer Cylinder. Wegen des vorhin berechneten Werthes von Δ_x ist nunmehr auch das Verhältniss der beiden Parameter als bekannt anzusehen; nur für die Annahme $\mu_0 = 0$ ist eine neue Entwickelung erforderlich. Dieser Fall ist zunächst ausgeschlossen.

Um jetzt den *Werth eines der beiden Parameter* selbst zu berechnen, bilde man etwa aus den den Gleichungen (11.) entnommenen Elementen

$$e_{ik} = -2p^2(\beta_i\beta_k+\gamma_i\gamma_k) = u_0-2p^2(\alpha_i+\alpha_k),$$

zu welchen noch für gleiche Indices vermöge der Gleichungen (5.) hinzukommt

$$e_{ii} = -2p^2(\beta_i\beta_i+\gamma_i\gamma_i) = -2p^2(\alpha_i+\alpha_i),$$

die Determinante

$$\begin{vmatrix} e_{00}, & e_{01}, & e_{02} \\ e_{10}, & e_{11}, & e_{12} \\ e_{20}, & e_{21}, & e_{22} \end{vmatrix},$$

so verschwindet dieselbe, wenn man für e_{ik} die ersten Werthe in β und γ einsetzt: nimmt man dagegen für e_{ik} die zweiten Werthe in u_0, v_0, w_0 und α, so wird dieselbe:

$$\begin{vmatrix} -2p^2(\alpha_0+\alpha_0), & w_0-2p^2(\alpha_0+\alpha_1), & v_0-2p^2(\alpha_0+\alpha_2) \\ w_0-2p^2(\alpha_1+\alpha_0), & -2p^2(\alpha_1+\alpha_1), & u_0-2p^2(\alpha_1+\alpha_2) \\ v_0-2p^2(\alpha_2+\alpha_0), & u_0-2p^2(\alpha_2+\alpha_1), & -2p^2(\alpha_2+\alpha_2) \end{vmatrix};$$

durch Entwickelung dieser Determinante erhält man darum die Gleichung

$$2u_0v_0w_0-4p^2[u_0(v_0+w_0-u_0)\alpha+v_0(w_0+u_0-v_0)\alpha_1+w_0(u_0+v_0-w_0)\alpha_2]$$
$$+8p^4[u_0(\alpha-\alpha_1)(\alpha-\alpha_2)+v_0(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha)+w_0(\alpha_2-\alpha)(\alpha_2-\alpha_1)] = 0,$$

oder

$$(19.)\quad \begin{cases} u_0 v_0 w_0 - 2p'[u_0(v_0+w_0-u_0)\xi + v_0(w_0+u_0-v_0)\xi_1 + w_0(u_0+v_0-w_0)\xi_2] \\ \quad + 4p'^2[u_0(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2) + v_0(\xi_1-\xi_2)(\xi_1-\xi) + w_0(\xi_2-\xi)(\xi_2-\xi_1)] = 0. \end{cases}$$

Dieser Gleichung lässt sich für den Fall des elliptischen Paraboloids eine einfache geometrische Deutung geben. Man zeichnet nämlich das Dreieck $D_0E_0F_0$, welches zu Seiten hat u_0, v_0, w_0, d. h. die Quadratwurzeln aus den Differenzen der Quadrate der entsprechenden Seiten der ersten und zweiten Basis, und welches darum nur für positive Werthe von μ_0, d. h. beim elliptischen Paraboloid, möglich ist, errichte alsdann in den Eckpunkten D_0, E_0, F_0 auf der Ebene desselben resp. die Lothe ξ, ξ_1, ξ_2, so ergeben die freien Endpunkte derselben, D_2, E_2, F_2, verbunden ein zweites Dreieck, dessen Seiten u_2, v_2, w_2 durch folgende Gleichungen bestimmt sind:

$$\begin{aligned} u_2 &= u_0 + (\xi_1-\xi_2)^2, \\ v_2 &= v_0 + (\xi_2-\xi\ )^2, \\ w_2 &= w_0 + (\xi\ -\xi_1)^2: \end{aligned}$$

bezeichnet man dann das Quadrat des vierfachen Inhalts dieses Dreiecks, dem Früheren analog, durch μ_2, so ergiebt sich zwischen μ_2 und μ_0 eine Gleichung, welche der im §. 12 zwischen μ_0 und μ gefundenen (28.) ganz analog ist, nämlich

$$(20.)\quad \mu_2-\mu_0 = 4[u_0(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2) + v_0(\xi_1-\xi_2)(\xi_1-\xi) + w_0(\xi_2-\xi)(\xi_2-\xi_1)];$$

wenn man ferner durch φ den Winkel der Ebenen der beiden Dreiecke $D_0E_0F_0$ und $D_2E_2F_2$ bezeichnet, so ist

$$\frac{u_0(v_0+w_0-u_0)\xi + v_0(w_0+u_0-v_0)\xi_1 + w_0(u_0+v_0-w_0)\xi_2}{\mu_0}\cdot\cos\varphi$$

die Entfernung des Schwerpunktes der Punkte D_0, E_0, F_0 von der Ebene des Dreiecks $D_2E_2F_2$, wenn man in diesen Punkten resp. die Gewichte $u_0(v_0+w_0-u_0)$, $v_0(w_0+u_0-v_0)$, $w_0(u_0+v_0-w_0)$ anbringt, d. h. die Entfernung des Mittelpunktes des dem Dreieck $D_0E_0F_0$ umschriebenen Kreises von der Ebene des Dreiecks $D_2E_2F_2$: bezeichnet man dieses Loth durch l_2, so lässt sich die Gleichung (20.) folgendermassen darstellen:

$$u_0v_0w_0 - 2p'.l_2\cdot\frac{\mu_0}{\cos\varphi} + p'^2(\mu_2-\mu_0) = 0,$$

und weil

$$\mu_2 = \frac{\mu_0}{\cos^2\varphi} \quad \text{und} \quad \frac{u_0v_0w_0}{\mu_0} = r_0^2,$$

$$(21.)\quad r_0^2.\cos^2\varphi = 2p'.l_2\cos\varphi - p'^2.\sin^2\varphi.$$

Es lässt sich noch eine zweite ganz ähnliche quadratische Gleichung für p' entwickeln, welche die eben construirten Dreiecke $D_0E_0F_0$ und $D_2E_2F_2$ in nahen Zusammenhang mit dem Paraboloid selbst bringt, etwa durch folgendes Verfahren.

Man führe als Hilfsfläche zur Construction des Parameters p' ein Umdrehungsparaboloid (P_2) ein, welches in dem Zusammenhange mit dem zu findenden allgemeinen elliptischen Paraboloid (P) steht, dass man aus den y-Coordinaten jedes Punktes des letzteren die y-Coordinaten des zugehörigen Punktes des ersteren findet, wenn man dieselben mit $\frac{p}{n}$ multiplicirt, während die x- und z-Coordinaten der entsprechenden Punkte beider Flächen dieselben sind, so dass also für alle solche Punkte sowohl die Entfernungen von der gemeinschaftlichen Tangentialebene im Scheitelpunkte als von der das Grenzparaboloid enthaltenden Hauptebene (E) übereinstimmen. Die den Punkten A_0, B_0, C_0 von (P) entsprechenden Punkte von (P_2) können dann als die früher D_2, E_2, F_2 genannten Punkte angenommen werden, nämlich aus den Gleichungen dieser Punkte:

$$(22.)\qquad D_2:\begin{cases}x = m\alpha,\\ y = p\beta,\\ z = p\gamma,\end{cases}\quad E_2:\begin{cases}x = m\alpha_1,\\ y = p\beta_1,\\ z = p\gamma_1,\end{cases}\quad F_2:\begin{cases}x = m\alpha_2,\\ y = p\beta_2,\\ z = p\gamma_2,\end{cases}$$

wo die Grössen α, β und γ den Gleichungen (5.) genügen, ergeben sich als Ausdrücke der Quadrate der Seiten des Dreiecks $D_2E_2F_2$:

$$(23.)\qquad \begin{cases}E_2F_2^2 = p^2[(\beta_1-\beta_2)^2+(\gamma_1-\gamma_2)^2]+m^2(\alpha_1-\alpha_2)^2 = u_0+(\xi_1-\xi_2)^2 = u_2,\\ F_2D_2^2 = p^2[(\beta_2-\beta\,)^2+(\gamma_2-\gamma\,)^2]+m^2(\alpha_2-\alpha\,)^2 = v_0+(\xi_2-\xi\,)^2 = v_2,\\ D_2E_2^2 = p^2[(\beta\,-\beta_1)^2+(\gamma\,-\gamma_1)^2]+m^2(\alpha\,-\alpha_1)^2 = w_0+(\xi\,-\xi_1)^2 = w_2.\end{cases}$$

Die Projection des Dreiecks $D_2E_2F_2$ auf die yz-Ebene ist das Dreieck $D_0E_0F_0$. Nunmehr ergiebt sich für die Determinante

$$(24.)\qquad \mu_2 = -\begin{vmatrix}0, & 1, & 1, & 1\\ 1, & 0, & w_2, & v_2\\ 1, & w_2, & 0, & u_2\\ 1, & v_2, & u_2, & 0\end{vmatrix},$$

wenn man in derselben statt der Elemente u_2, v_2, w_2 ihre Werthe

$$c_{ik} = 2p^2[\alpha_i+\alpha_k-\beta_i\beta_k-\gamma_i\gamma_k]+m^2[\alpha_i-\alpha_k]^2$$

einführt, weil $c_{ik} = c_{ki}$ und $c_{ii} = 0$ ist, mit Anwendung der in §. 12 Gleichung (9.) eingeführten Bezeichnung:

$$\mu_2 = S_1+S_2,$$

wo

$$S_1 = \begin{vmatrix} c_{00}, & c_{01}, & c_{02} \\ c_{10}, & c_{11}, & c_{12} \\ c_{20}, & c_{21}, & c_{22} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad S_2 = \begin{vmatrix} 1-c_{00}, & 1-c_{01}, & 1-c_{02} \\ 1-c_{10}, & 1-c_{11}, & 1-c_{12} \\ 1-c_{20}, & 1-c_{21}, & 1-c_{22} \end{vmatrix}.$$

Die Elemente von S_2 lassen sich vortheilhaft, wie folgt, darstellen:

$$1-c_{ik} = e_{ik} = 1.1-2p^2\alpha_i.1-2p^2.\alpha_k-m^2\alpha_i^2.1-m^2\alpha_k^2+2m^2\alpha_i\alpha_k+2p^2\beta_i\beta_k+2p^2\gamma_i\gamma_k,$$

woraus sich nach dem Satze über die Multiplication von Determinanten ergiebt:

$$S_2 = 4p^4[\beta,\gamma]^2+4p^2m^2[\gamma,\alpha]^2+4m^2p^2[\alpha,\beta]^2-S_1,$$

d. h. es wird

$$(25.)\qquad \mu_2 = 4p^2(p^2[\beta,\gamma]^2+m^2[\gamma,\alpha]^2+m^2[\alpha,\beta]^2).$$

Ferner wird

$$2u_0v_0w_0 = \begin{vmatrix} 0, & w_0, & v_0 \\ w_0, & 0, & u_0 \\ v_0, & u_0, & 0 \end{vmatrix} = 8p^6 \begin{vmatrix} d_{00}, & d_{01}, & d_{02} \\ d_{10}, & d_{11}, & d_{12} \\ d_{20}, & d_{21}, & d_{22} \end{vmatrix},$$

wo

$$d_{ik} = \alpha_i.1+1.\alpha_k-\beta_i\beta_k-\gamma_i\gamma_k,$$

d. h. es wird

$$(26.)\qquad 2u_0v_0w_0 = 8p^6\{[\alpha,\beta]^2+[\gamma,\alpha]^2+2[\beta,\gamma].[\alpha,\beta,\gamma]\}.$$

Dies vorausgesetzt, sei die Gleichung der durch die Punkte D_2, E_2, F_2 bestimmten Ebene

$$Ax+By+Cz = D,$$

wo also vermöge der Gleichungen (22.):

$$A = p^2[\beta,\gamma], \quad B = pm[\gamma,\alpha], \quad C = mp[\alpha,\beta], \quad D = mp^2[\alpha,\beta,\gamma],$$

alsdann ist

$$A^2+B^2+C^2 = p^2\{p^2[\beta,\gamma]^2+m^2[\gamma,\alpha]^2+m^2[\alpha,\beta]^2\}:$$

folglich wenn man die Gleichung (26.) durch $\frac{8p^4}{m^2} = 8p'^2$ dividirt, dann auf beiden Seiten das Glied $p^4[\beta,\gamma]^2$ addirt und endlich durch

$$p^2\{p^2[\beta,\gamma]^2+m^2[\gamma,\alpha]^2+m^2[\alpha,\beta]^2\} = A^2+B^2+C^2 = \frac{\mu_2}{4}$$

dividirt:

$$(27.)\qquad \frac{u_0v_0w_0}{\mu_2.p'^2}+\frac{p^4[\beta,\gamma]^2}{A^2+B^2+C^2} = 1+\frac{2p^2m^2[\beta,\gamma].[\alpha,\beta,\gamma]}{A^2+B^2+C^2}.$$

Weil nun φ den Winkel bezeichnet der Ebene des Dreiecks $D_2E_2F_2$ mit der Ebene des Dreiecks $D_0E_0F_0$, d. h. mit der yz-Ebene, so ist

$$\cos\varphi = \frac{p^2[\beta,\gamma]}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

und wenn l_1 das Loth bedeutet, vom Anfangspunkte der Coordinaten, d. h. dem Scheitelpunkte des Paraboloids, auf die Ebene $D_2E_2F_2$ gefällt, so dass sich ergiebt:

$$l_1 = \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{mp^2.[\alpha,\beta,\gamma,]}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

so lässt sich die Gleichung (27.) ersetzen durch:

$$\frac{\mathfrak{u}_0\mathfrak{v}_0\mathfrak{w}_0}{\mu_2.p'^2}+\cos^2\varphi = 1+\frac{2}{p'}\cos\varphi.l_1,$$

oder weil noch $\mu_2\cos^2\varphi = \mu_0$ ist und $\frac{\mathfrak{u}_0\mathfrak{v}_0\mathfrak{w}_0}{\mu_0} = r_0^2$:

$$(28.)\quad r_0^2\cos^2\varphi = 2p'l_1.\cos\varphi+p'^2.\sin^2\varphi.$$

Aus den beiden Gleichungen (21.) und (28.) ergiebt sich

$$2p'\sin^2\varphi = 2\cos\varphi(l_2-l_1),$$

d. h.

$$p' = (l_2-l_1)\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi},$$

wo das Vorzeichen vor l_1 entgegengesetzt zu nehmen ist, wenn die beiden Lothe l_1 und l_2 auf entgegengesetzten Seiten der Ebene $D_2E_2F_2$ liegen, d. h. wenn die Verbindungslinie des Scheitelpunktes des Paraboloids mit dem Mittelpunkte des dem Dreieck $D_0E_0F_0$ umschriebenen Kreises die Ebene des Dreiecks $D_2E_2F_2$ durchschneidet. Nennt man diese Verbindungslinie l, so erhält man, weil dieselbe, erforderlichen Falls verlängert, die Durchschnittslinie der Ebene $D_2E_2F_2$ mit der yz-Ebene senkrecht durchschneidet,

$$l_2-l_1 = l.\sin\varphi,$$

woraus endlich

$$(29.)\quad p' = l.\operatorname{ctg}\varphi,$$

d. h. *wenn man vom Mittelpunkte des dem Dreieck $D_0E_0F_0$ umschriebenen Kreises ein Loth fällt auf die Ebene des Dreiecks $D_2E_2F_2$ und dasselbe bis zur Durchschneidung mit der xy-Ebene, d. h. der Ebene (E) im Punkte T verlängert, so ist p', der Parameter des Umdrehungsparaboloids (P_2) oder des Hauptschnittes der xz-Ebene des elliptischen Paraboloids (P), gleich der Entfernung des Punktes T vom Scheitelpunkte S des Paraboloids.*

Oder auch unabhängig von der bisher noch nicht ausgeführten Construction des Scheitelpunktes des Paraboloids, lässt sich der Parameter p' der zur Ebene (E) senkrechten Schnitte, wenn von dem Paraboloid die drei Punkte A_0, B_0, C_0, sowie deren Projectionen A, B, C auf die Hauptebene (E) und das Drei-

eck $A_1B_1C_1$, welches zu Eckpunkten die auf der Grenzfläche des zu construirenden Paraboloids liegenden conjugirten Punkte von A_0, B_0, C_0 hat, das Dreieck $A_1B_1C_1$ nur der Grösse nach, gegeben sind, folgendermassen construiren:

1) theile man durch gerade, durch die Eckpunkte des Dreiecks ABC in der Ebene (E) gezogene Linien die Seiten desselben im Verhältniss der Quadratwurzeln aus den Differenzen der Quadrate der Seiten der beiden Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$, nämlich $\sqrt{u}:\sqrt{v}:\sqrt{w}$ (14.), welche Linien $A\mathfrak{A}$, $B\mathfrak{B}$, $C\mathfrak{C}$ wegen der Bedingung (13.) parallel sind;

2) construire man mit den Quadratwurzeln aus den Differenzen der Quadrate der entsprechenden Seiten der beiden Dreiecke $A_0B_0C_0$ und $A_1B_1C_1$, nämlich $\sqrt{u_0}$, $\sqrt{v_0}$, $\sqrt{w_0}$, in einer beliebigen Ebene das Dreieck $D_0E_0F_0$, errichte in den Eckpunkten desselben als Lothe die Projectionsperpendikel der Punkte A_0, B_0, C_0 auf eine zu den Linien $A\mathfrak{A}$, $B\mathfrak{B}$, $C\mathfrak{C}$ senkrechte Ebene, $D_0D_1 = A_0A'_0$, $E_0E_1 = B_0B'_0$, $F_0F_1 = C_0C'_0$, und lege durch die Punkte D_1, E_1, F_1 die Ebene $(\mathfrak{E}_1)$;

3) construire man in der Ebene des Dreiecks D_0, E_0, F_0 die drei Punkte D, E, F, welche von D_0, E_0, F_0 resp. die Entfernungen A_0A, B_0B, C_0C haben und in einer zu den Verbindungslinien D_0D, E_0E, F_0F senkrechten Linie (G) liegen, und lege durch diese Gerade (G) die zur Ebene $D_0E_0F_0$ senkrechte Ebene $(\mathfrak{E})$;

4) fälle man vom Mittelpunkte M_0 des dem Dreieck $D_0E_0F_0$ umschriebenen Kreises Lothe auf die Ebene $(\mathfrak{E}_1)$ und auf die Durchschnittsgerade der beiden Ebenen $(\mathfrak{E}_1)$ und $D_0E_0F_0$, welche resp. die Ebene $(\mathfrak{E})$ und die Gerade (G) in den Punkten T und S treffen mögen, so ist TS der gesuchte Parameter p' des Paraboloids.

Der Parameter n' der der Ebene (E) parallelen Schnitte des Paraboloids ergiebt sich einfach aus p' vermittelst der Proportion (18.):

$$n':p' = (A'_0B'_0C'_0)^2:(D_0E_0F_0)^2.$$

Hieran schliesst sich beim elliptischen Paraboloid folgende *Construction des Scheitelpunktes:* Durch den Punkt S der geraden Linie (G) ist in der Ebene $(\mathfrak{E})$ ein Punkt der Achse des Umdrehungsparaboloids (P_2), auf welchem die Punkte D_2, E_2, und F_2 liegen, bestimmt; man kann darum durch die Projection irgend eines dieser Punkte auf die Achse aus den bekannten Eigenschaften der Subnormale und Subtangente der Parabel den Scheitelpunkt derselben, d. h. auch des zugehörigen Umdrehungsparaboloids, wie folgt, finden:

Von einem beliebigen der Punkte D_2, E_2 oder F_2, z. B. von D_2, fälle

man das Loth auf die Linie ST (vergl. 4)), es heisse $D_2 D_3$, trage von D_3 aus auf ST die Länge p' ab gleich TQ, verbinde Q mit D_2 und errichte in der Ebene QD_3D_2 auf QD_2 im Punkte Q das Loth, welches ST im Punkte R durchschneiden mag, so ist der Mittelpunkt S_2 der Linie RD_3 der Scheitelpunkt des Paraboloids (P_2): denn $D_3 Q$ ist als Subnormale gleich dem Parameter p' und $D_3 R$ als Subtangente der durch die Ebene $Q D_3 D_2$ bestimmten Parabel doppelt so gross als $S_2 D_3$, die Entfernung des Scheitelpunktes vom Fusspunkte des von einem Punkte D_2 des Umdrehungsparaboloids auf die Achse gefällten Lothes $D_2 D_3$.

Nunmehr kommen die beiden Paraboloide (P_1) und (P_2) in den x-Coordinaten, d. h. in allen in der Richtung der Achse gemessenen Distanzen entsprechender Punkte überein, darum ist $D_3 S_2$ zugleich die Entfernung des Fusspunktes A_3 des von A_0 auf die Achse des Paraboloids (P) gefällten Lothes vom Scheitelpunkte (S_0) dieses Paraboloids.

Endlich *die Achse des Paraboloids* (P), oder der Punkt, in welchem dieselbe die Ebene $A_0' B_0' C_0'$ (vergl. 2)) durchschneidet, ergiebt sich aus der *Lage des Mittelpunktes* M' desjenigen dem Dreieck $A_0' B_0' C_0'$ umschriebenen Kegelschnittes, welcher zugleich die Projection des Durchschnittes der Ebene $A_0 B_0 C_0$ mit dem Paraboloid (P) ist. Aus der gegenseitigen Beziehung der Punkte A_0, B_0, C_0 (3.) und D_2, E_2, F_2 (22.) geht hervor, dass dieser Mittelpunkt M' dem Mittelpunkte M_0 des dem Dreieck $D_0 E_0 F_0$ umschriebenen Kreises, d. h. der Projection des Durchschnittes der Ebene $D_2 E_2 F_2$ mit dem Paraboloid (P_2) in der Richtung der Achse*) entspricht, also erstens dieselbe z-Coordinate hat, d. h. in derselben Höhe über die Ebene (E) als M_0 über $(\mathfrak{E})$ liegt, und dass zweitens M' die Distanzen der z-Coordinaten der Punkte A_0', B_0', C_0' in demselben Verhältnisse theilt als der Punkt M_0 die Distanzen der z-Coordinaten der Punkte D_0, E_0, F_0. Hieraus lässt sich der Mittelpunkt M' leicht construiren.

Bezeichnet man nunmehr die Projectionen der Punkte M' und M_0 resp. auf die Ebene (E) und $(\mathfrak{E})$ durch N' und N_0, so verhalten sich die Abstände der Achsen der beiden Paraboloide (P) und (P_2) von N' und N_0, wie die y-Coordinaten der entsprechenden Punkte beider Flächen, d. h. wie $n:p$ oder $\sqrt{n'}:\sqrt{p'}$, woraus die Lage der Achse hervorgeht.

---

*) Die Projectionen der ebenen Schnitte eines beliebigen Paraboloids auf eine zur Achse senkrechte Ebene sind ähnliche und ähnlich liegende Kegelschnitte, die Projectionen der Schnitte des Umdrehungsparaboloids Kreise.

Man erhält durch eine ganz analoge Construction den Parameter der xz-Ebene und den Scheitelpunkt *des hyperbolischen Paraboloids*

$$(P')\qquad \frac{y^2}{n^2}-\frac{z^2}{p^2} = \frac{2x}{m},$$

wenn man von dem *gleichseitig-hyperbolischen Paraboloid*

$$(P'_2)\qquad y^2-z^2 = 2p'x$$

als Hilfsfläche ausgeht, welches sich aus dem allgemeinen Paraboloid (P') ergiebt, indem man mit unveränderter Beibehaltung der x- und z-Coordinaten, die y-Coordinaten mit $\frac{p}{n}$ multiplicirt. Die Gleichungen (22.) für die den Punkten A_0, B_0, C_0 von (P') entsprechenden Punkte D_2, E_2, F_2 von (P_2) behalten ihre frühere Form: nur die Beziehungsgleichungen zwischen den Grössen α, β, γ werden:

$$\beta^2-\gamma^2 = 2\alpha,\quad \beta_1^2-\gamma_1^2 = 2\alpha_1,\quad \beta_2^2-\gamma_2^2 = 2\alpha_2.$$

Es sei nunmehr die Gleichung der durch die Punkte D_2, E_2, F_2 gelegten Ebene $(\mathfrak{E}_2)$:

$$Ax+By+Cz = D,$$

so wird die Projection des Durchschnittes dieser Ebene mit dem Paraboloid (P'_2):

$$x = 0,\quad A(y^2-z^2) = 2p'(D-By-Cz),$$

d. h. eine gleichseitige Hyperbel, deren Mittelpunkt M'_0 die Coordinaten

$$x = 0,\quad y = -\frac{B}{A}p',\quad z = \frac{C}{A}p',$$

also vom Scheitelpunkte S', dem Anfangspunkte der Coordinaten, die Entfernung

$$l' = \frac{p'\sqrt{B^2+C^2}}{A}$$

hat, woraus sich ergiebt

$$(30.)\qquad p' = \frac{A.l'}{\sqrt{B^2+C^2}} = l'.\operatorname{ctg}\varphi',$$

wenn man den Winkel der Ebene $(\mathfrak{E}_2)$ mit der yz-Ebene durch φ' bezeichnet: dasselbe Resultat wie in Gleichung (29.). Um aber zu den Punkten D_2, E_2, F_2 (vergl. S. 258) zu gelangen, hat man hier ein Dreieck zu Grunde zu legen, welches zu Seiten hat die Quadratwurzeln aus

$$(31.)\qquad \begin{cases} U = u_0-2u = p^2[(\beta_1-\beta_2)^2+(\gamma_1-\gamma_2)^2], \\ V = v_0-2v = p^2[(\beta_2-\beta\ )^2+(\gamma_2-\gamma\ )^2], \\ W = w_0-2w = p^2[(\beta\ -\beta_1)^2+(\gamma\ -\gamma_1)^2], \end{cases}$$

welche übereinkommen mit den Projectionen der Seiten des Dreiecks $D_2E_2F_2$ auf eine zur Achse senkrechte Ebene.

Von diesem Dreieck $D_0E_0F_0$, welches zu Seiten hat $\sqrt{a_0^2+a_1^2-2a^2}$, $\sqrt{b_0^2+b_1^2-2b^2}$, $\sqrt{c_0^2+c_1^2-2c^2}$, ausgehend, construirt man wie früher (S. 261) zuerst die gerade Linie (G), dann M_0', den Mittelpunkt derjenigen dem Dreieck $D_0E_0F_0$ umschriebenen gleichseitigen Hyperbel, deren reelle Achse der Geraden (G) parallel ist, und weiter verfolgt man Schritt für Schritt denselben Weg als früher, um zuerst zu p', dann zu einem Punkte der Achse und endlich zum Scheitelpunkt des Paraboloids (P') zu gelangen.

Es bleibt nun noch übrig, den Parameter p' durch die ursprünglich gegebenen Grössen, nämlich die Seiten der Dreiecke $A_0B_0C_0$, $A_1B_1C_1$, ABC und die Lothe von den Punkten A_0, B_0, C_0 auf die Ebene (E), ζ, ζ_1, ζ_2, auszudrücken.

Weil die Ebene $(\mathfrak{E}_2)$ durch die Punkte D_2, E_2, F_2 (22.) geht, so findet zwischen den Constanten A, B, C ihrer Gleichung die Beziehung statt:

$$A:B:C = \Delta_2(x):\Delta_2(y):\Delta_2(z),$$

wo $\Delta_2(x)$, $\Delta_2(y)$, $\Delta_2(z)$ die Projectionen des Dreiecks $D_2E_2F_2$ auf die yz-, zx-, xy-Ebene bedeuten. Diese Dreiecke sind bekannt; denn weil die Quadrate der Seiten des Dreiecks $D_2E_2F_2$ sind u_2, v_2, w_2 (23.), so sind die Quadrate der Seiten des Dreiecks $\Delta_2(x)$ für den Fall des elliptischen Paraboloids u_0, v_0, w_0 und beim hyperbolischen Paraboloid u_0-2u, v_0-2v, w_0-2w (31.): ferner sind die Quadrate der Seiten des Dreiecks $\Delta_2(y)$:

$$m^2(\alpha_1-\alpha_2)^2+p^2(\gamma_1-\gamma_2)^2 = a_0^2-\frac{n^2}{p^2}u,$$

$$m^2(\alpha_2-\alpha\,)^2+p^2(\gamma_2-\gamma\,)^2 = b_0^2-\frac{n^2}{p^2}v,$$

$$m^2(\alpha\,-\alpha_1)^2+p^2(\gamma\,-\gamma_1)^2 = c_0^2-\frac{n^2}{p^2}w$$

und endlich des Dreiecks $\Delta_2(z)$:

$$m^2(\alpha_1-\alpha_2)^2+p^2(\beta_1-\beta_2)^2 = a^2-\frac{n^2-p^2}{p^2}u,$$

$$m^2(\alpha_2-\alpha\,)^2+p^2(\beta_2-\beta\,)^2 = b^2-\frac{n^2-p^2}{p^2}v,$$

$$m^2(\alpha\,-\alpha_1)^2+p^2(\beta\,-\beta_1)^2 = c^2-\frac{n^2-p^2}{p^2}w,$$

also mit Berücksichtigung der Gleichungen (17.) und (18.) als bekannt anzusehen; demgemäss ist auch der Werth von

$$(32.)\qquad \operatorname{ctg}\varphi = \frac{A}{\sqrt{B^2+C^2}} = \frac{\Delta_2(x)}{\sqrt{[\Delta_2(y)]^2+[\Delta_2(z)]^2}}\;[=\operatorname{ctg}\varphi']$$

sofort durch die gegebenen Grössen auszudrücken.

Endlich die Entfernung des Mittelpunktes M_0 des dem Dreieck $D_0E_0F_0$ umschriebenen Kreises von der Ebene (E) ergiebt sich durch die Gleichung

$$(33.)\qquad l = \frac{u_0(v_0+w_0-u_0)\zeta+v_0(w_0+u_0-v_0)\zeta_1+w_0(u_0+v_0-w_0)\zeta_2}{\mu_0},$$

und ebenso wird beim hyperbolischen Paraboloid die Entfernung des Mittelpunktes derjenigen dem Dreieck $D_0E_0F_0$ umschriebenen gleichseitigen Hyperbel, deren reelle Achse der Ebene (E) parallel ist,

$$(34.)\qquad l' = \frac{U(V+W-U)\zeta+V(W+U-V)\zeta_1+W(U+V-W)\zeta_2}{-U^2-V^2-W^2+2VW+2WU+2UV},$$

wo $\sqrt{U}$, $\sqrt{V}$, $\sqrt{W}$ als Seiten des Dreiecks $D_0E_0F_0$ durch die Gleichungen (31.) definirt sind, d. h. dieselben Werthe haben, wie $\sqrt{u_0}$, $\sqrt{v_0}$, $\sqrt{w_0}$ (11.) beim elliptischen Paraboloid, wenn man das Zeichen von p^2 unbeachtet lässt. Setzt man diese Werthe für l und φ, resp. für l' und φ', in die Gleichungen (29.) und (30.) ein, so ergiebt sich p' sowohl für das elliptische als für das hyperbolische Paraboloid durch die in der anfänglichen Aufgabe gegebenen Bestimmungsstücke ausgedrückt.

Bezeichnet man den Zähler in den Ausdrücken für l und l' durch Z, so dass also für das eine oder andere Paraboloid:

$$(35.)\qquad \begin{cases} Z = u_0(v_0+w_0-u_0)\zeta+v_0(w_0+u_0-v_0)\zeta_1+w_0(u_0+v_0-w_0)\zeta_2 \\ \text{oder} \\ Z = U(V+W-U)\zeta+V(W+U-V)\zeta_1+W(U+V-W)\zeta_2, \end{cases}$$

so ergiebt sich für die Annahme $Z=0$, dass l und l' unabhängig von dem Werthe von φ, bezüglich von φ', d. h. von der Neigung der Ebene $(\mathfrak{E}_2)$ gegen die yz-Ebene oder die Achse des Paraboloids, folglich auch unabhängig von der Neigung der Ebene der ersten Basis $A_0B_0C_0$ gegen die Ebene (E) verschwinden, folglich auch p' gleich Null wird, während das Verhältniss der Parameter p' und n', d. h. der Quadrate der Halbachsen der Flächenschnitte senkrecht zur Achse einen endlichen Werth beibehalten kann. In diesem Falle liegen die Mittelpunkte der Projectionen aller beliebigen Flächenschnitte auf eine zur Achse senkrechte Ebene zugleich auf der Ebene (E), und weil man in den Ausdrücken von Z, wie sich später zeigen wird, die Factoren ζ, ζ_1, ζ_2 ohne Aenderung des Werthes von Z durch die Factoren η, η_1, η_2 ersetzen kann,

zugleich auf der z-Achse der Fläche, d. h. diese Projectionen sind concentrische (ähnliche und ähnlich liegende) Kegelschnitte: die Fläche wird also ein *Cylinder*.

Wenn das Verhältniss von $\frac{p^2}{n^2}$ (18.) gleich ± 1 wird, so werden die Flächenschnitte des Paraboloids senkrecht zur Achse Kreise oder gleichseitige Hyperbeln, die Fläche also wird

1) *ein elliptisches Umdrehungsparaboloid,* wenn μ_0 positiv ist, und Δ_x, die Projection der ersten Basis auf eine zur Achse senkrechte Ebene, zu Seiten hat $\sqrt{u}$, $\sqrt{v}$, $\sqrt{w}$. Die Fläche wird

2) *ein gleichseitig-hyperbolisches Paraboloid,* wenn μ_0 negativ ist, und die Seiten von Δ_x die Längen haben $\sqrt{u_0-2u}$, $\sqrt{v_0-2v}$, $\sqrt{w_0-2w}$.

Der Cylinder.

§. 14. Es seien A_0, B_0, C_0 als Eckpunkte der ersten Basis beliebige Punkte des Cylinders

$$(1.)\quad \frac{y^2}{n^2}+\frac{z^2}{p^2} = 1,$$

und A_1, B_1, C_1 als Eckpunkte der zweiten Basis die conjugirten Punkte des Grenzcylinders

$$(2.)\quad \frac{y^2}{n^2-p^2} < 1, \quad z=0$$

und zwar bestimmt durch die Gleichungen

$$(3.)\quad A_0:\begin{cases} x = m\alpha = \xi, \\ y = n\beta = \eta, \\ z = p\gamma = \zeta, \end{cases} \quad B_0:\begin{cases} x = m\alpha_1 = \xi_1, \\ y = n\beta_1 = \eta_1, \\ z = p\gamma_1 = \zeta_1, \end{cases} \quad C_0:\begin{cases} x = m\alpha_2 = \xi_2, \\ y = n\beta_2 = \eta_2, \\ z = p\gamma_2 = \zeta_2 \end{cases}$$

und

$$(4.)\quad A_1:\begin{cases} x = m\alpha, \\ y = \sqrt{n^2-p^2}.\beta, \\ z = 0, \end{cases} \quad B_1:\begin{cases} x = m\alpha_1, \\ y = \sqrt{n^2-p^2}.\beta_1, \\ z = 0, \end{cases} \quad C_1:\begin{cases} x = m\alpha_2, \\ y = \sqrt{n^2-p^2}.\beta_2, \\ z = 0, \end{cases}$$

wo

$$(5.)\quad \beta^2+\gamma^2 = \beta_1^2+\gamma_1^2 = \beta_2^2+\gamma_2^2 = 1.$$

Sind wie früher a_0, b_0, c_0 und a_1, b_1, c_1 bezüglich die Seiten der ersten und zweiten Basis, und ist das Dreieck ABC mit den Seiten a, b, c die Projection der ersten Basis auf die Ebene (E) des Grenzcylinders, so

dienen zur Bestimmung der Längen a, b, c die Gleichungen

$$(6.)\quad \begin{cases} a^2 = a_0^2-(\zeta_1-\zeta_2)^2 = m^2(\alpha_1-\alpha_2)^2+n^2(\beta_1-\beta_2)^2, \\ b^2 = b_0^2-(\zeta_2-\zeta\ )^2 = m^2(\alpha_2-\alpha\ )^2+n^2(\beta_2-\beta\ )^2, \\ c^2 = c_0^2-(\zeta\ -\zeta_1)^2 = m^2(\alpha\ -\alpha_1)^2+n^2(\beta\ -\beta_1)^2, \end{cases}$$

während als gegeben anzunehmen sind die Werthe von a_0^2, b_0^2, c_0^2 und a_1^2, b_1^2, c_1^2, welche mit denen in den Gleichungen (10.) des §. 13 übereinkommen; dasselbe gilt für die aus diesen Gleichungen herzuleitenden von u_0, v_0, w_0 und u, v, w (§. 13, Gll. (11.) und (12.)), und es ergiebt sich demnach auch hier zwischen den letzteren drei Grössen die Relation

$$(7.)\quad \sqrt{u}+\sqrt{v}+\sqrt{w} = 0, \quad \text{d. h.} \quad \mu = 0.$$

Um nunmehr die den Cylinder vom Paraboloid unterscheidende Bedingung zu erhalten, bilde man den im vorigen Paragraphen (Gl. 35) bei dem Schlusswerthe des Parameters p' vorkommenden Ausdruck

$$(8.)\quad Z = u_0(v_0+w_0-u_0)\zeta+v_0(w_0+u_0-v_0)\zeta_1+w_0(u_0+v_0-w_0)\zeta_2.$$

Setzt man in diesen Ausdruck für u_0, v_0, w_0 bezüglich ihre Werthe ein:

$$(9.)\quad \begin{cases} u_0 = p^2[(\beta_1-\beta_2)^2+(\gamma_1-\gamma_2)^2] = 2p^2(1-\beta_1\beta_2-\gamma_1\gamma_2), \\ v_0 = p^2[(\beta_2-\beta\ )^2+(\gamma_2-\gamma\ )^2] = 2p^2(1-\beta_2\beta\ -\gamma_2\gamma\ ), \\ w_0 = p^2[(\beta\ -\beta_1)^2+(\gamma\ -\gamma_1)^2] = 2p^2(1-\beta\ \beta_1-\gamma\ \gamma_1) \end{cases}$$

und ebenso für ζ, ζ_1, ζ_2 die Werthe $p\gamma$, $p\gamma_1$, $p\gamma_2$, so reducirt sich der Werth von Z auf Null; dasselbe gilt für den analog gebildeten Ausdruck

$$(10.)\quad Y = u_0(v_0+w_0-u_0)\eta+v_0(w_0+u_0-v_0)\eta_1+w_0(u_0+v_0-w_0)\eta_2.$$

Es dienen also die Gleichungen

$$(11.)\quad Z = 0 \quad \text{und} \quad Y = 0,$$

von denen die eine die andere bedingt, zur Unterscheidung des Cylinders und des Paraboloids, wie bereits gegen Ende des letzten Paragraphen bemerkt worden ist. Ebendaselbst ist auch bereits die geometrische Bedeutung dieser beiden Gleichungen (11.) dahin festgestellt worden, *dass die Mittelpunkte aller Flächenschnitte des Cylinders auf der Achse liegen.*

Die *Richtung der Achse des Cylinders* ist auch hier durch die Gleichungen

$$(12.)\quad u = p^2(\beta_1-\beta_2)^2, \quad v = p^2(\beta_2-\beta)^2, \quad w = p^2(\beta-\beta_1)^2$$

bestimmt, aus denen sich ergiebt

$$(13.)\quad (\beta_1-\beta_2):(\beta_2-\beta):(\beta-\beta_1) = \sqrt{u}:\sqrt{v}:\sqrt{w}.$$

Diese Gleichung lässt sich ebenfalls sofort aus den Beziehungen der beiden Dreiecke $A_0B_0C_0$ und $D_2E_2F_2$ herleiten: weil nämlich für die Eckpunkte dieser Dreiecke die z-Coordinaten übereinstimmen, so verhalten sich ihre Projectionen auf die yz-Ebene, nämlich die Dreiecke Δ_x und $\sqrt{\frac{\mu_0}{16}}$ resp. $\sqrt{\frac{M}{16}}$, wie die y-Coordinaten der entsprechenden Punkte, d. h. wie die Halbachsen n und p.

Den positiven Werthen von μ_0 entspricht der *elliptische Cylinder,* den negativen Werthen von μ_0 der *hyperbolische Cylinder.*

Die Construction der (unendlichen) Achse des Cylinders und der beiden Querachsen lässt sich in beiden Fällen ohne Schwierigkeit ausführen:

1) *Es sei μ_0 positiv und $u_0v_0w_0$ positiv,* d. h. u_0, v_0, w_0 selbst positiv (§. 12, Gl. (31.)), so sind n^2 und p^2 beide positiv, d. h. wird die Fläche ein *elliptischer Cylinder.* Alsdann erhält man

zunächst, wie beim Paraboloid, in der Ebene (E) die Richtung der Achse des Cylinders, indem man durch gerade, durch die Eckpunkte des Dreiecks ABC gezogene Linien die Seiten desselben im Verhältniss der Quadratwurzeln aus den Differenzen der Quadrate der Seiten der beiden Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$, nämlich $\sqrt{u}:\sqrt{v}:\sqrt{w}$, theilt, welche Linien $A\mathfrak{A}$, $B\mathfrak{B}$, $C\mathfrak{C}$ wegen der Bedingung (7.) einander parallel sind;

alsdann construire man mit den Quadratwurzeln aus den Differenzen der Quadrate der entsprechenden Seiten der beiden Dreiecke $A_0B_0C_0$ und $A_1B_1C_1$, nämlich $\sqrt{u_0}$, $\sqrt{v_0}$, $\sqrt{w_0}$, in einer beliebigen Ebene das Dreieck $D_0E_0F_0$, so ist der Radius r_0 des diesem Dreieck umschriebenen Kreises die kleine Querachse (p) des elliptischen Cylinders, welche eine zur Ebene (E) senkrechte Lage erhält;

ferner ziehe man in der Ebene des Dreiecks $D_0E_0F_0$ durch den Mittelpunkt M_0 des diesem Dreieck umschriebenen Kreises diejenige gerade Linie, deren Entfernungen von den Endpunkten D_0, E_0, F_0, nämlich D_0D, E_0E, F_0F, bezüglich gleich sind den Linien A_0A, B_0B, C_0C, welche Construction durch die Bedingung $Z=0$ ermöglicht wird, und projicire die Eckpunkte des Dreiecks ABC auf eine zur Achse senkrechte Linie in den Punkten A', B', C':

so ergiebt sich n, die grosse Querachse des Cylinders, welche also in die Ebene (E) zu liegen kommt, durch die Proportion:

$$n:r_0 = EF:B'C' (= FD:C'A' = DE:A'B'),$$

und M', der Punkt, in welchem die unendliche Achse des Cylinders die

Ist p^2 negativ, d. h. (C) ein hyperbolischer Cylinder, so wird die Hilfsfläche (C_2) unter Festhaltung der früheren Beziehungen von (C) und (C_2) ein *gleichseitig-hyperbolischer Cylinder,* im Uebrigen bleibt Alles ungeändert, ausser dass sich für die Quadrate der Seiten der Projection des Dreiecks $D_2E_2F_2$ auf die yz-Ebene andere Ausdrücke ergeben, nämlich (vergl. §. 13, Gl. (31.))

$$(17.)\quad \begin{cases} E_0F_0^2 = p^2\,[(\beta_1-\beta_2)^2+(\gamma_1-\gamma_2)^2] = u_0-2u = U, \\ F_0D_0^2 = p^2\,[(\beta_2-\beta\,)^2+(\gamma_2-\gamma\,)^2] = v_0-2v = V, \\ D_0E_0^2 = p^2\,[(\beta\,-\beta_1)^2+(\gamma\,-\gamma_1)^2] = w_0-2w = W, \end{cases}$$

d. h.

$$Z = U(V+W-U)\zeta+V(W+U-V)\zeta_1+W(U+V-W)\zeta_2 = 0$$

und

$$Y = U(V+W-U)\eta+V(W+U-V)\eta_1+W(U+V-W)\eta_2 = 0$$

(vergl. §. 13, Gl. (35.)) bedeuten ebenfalls, dass der Mittelpunkt des Durchschnittes der Hilfsfläche (C_2) mit der Ebene des Dreiecks $D_2E_2F_2$, folglich auch des Durchschnittes des Cylinders (C) mit der Ebene der ersten Basis $A_0B_0C_0$, auf der Achse des Cylinders liegt.

Mit Bezugnahme auf die Eigenschaft des Cylinders, dass alle ebenen Schnitte desselben auf eine zur Achse senkrechte Ebene nicht bloss concentrisch sondern auch congruent sind, kann man aus der Hilfsfläche sofort die Halbachsen der Schnitte von (C) senkrecht zur Achse herleiten: weil nämlich die Cylinder (C) und (C_2) in den z-Coordinaten übereinkommen, so ist entweder der Radius der Kreisschnitte von (C_2) zugleich die kleine Achse der zur Achse senkrechten Schnitte des (elliptischen) Cylinders (C), oder das Quadrat der Achse der gleichseitigen Hyperbelschnitte von (C_2) zugleich, abgesehen vom Vorzeichen, das Quadrat der imaginären Achse der zur Achse senkrechten Schnitte des (hyperbolischen) Cylinders (C_2), nämlich

$$(18.)\quad r_0^2 = \frac{u_0\,v_0\,w_0}{\mu_0}, \quad \text{resp.} \quad r_0^2 = \frac{U\,V\,W}{M},$$

wo M das 16fache Quadrat des Flächeninhalts des aus den Seiten $\sqrt{U}$, $\sqrt{V}$, $\sqrt{W}$ gebildeten Dreiecks $D_0E_0F_0$ bedeutet.

Dasselbe Resultat ergiebt sich aus der Umformung der Determinante μ_0 oder M nach der früher bereits wiederholt zur Anwendung gekommenen Methode (vergl. §. 12, Gl. (13.) und §. 13, Gl. (25.)); behandelt man diese Determinante wie in §. 13, Gl. (18.), so gelangt man zu demselben Resultate wie dort, nämlich dass

$$(19.)\quad \frac{n^2}{p^2} = \frac{16\Delta_x^2}{\mu_0} = \frac{16\Delta_x^2}{M}.$$

Diese Gleichung lässt sich ebenfalls sofort aus den Beziehungen der beiden Dreiecke $A_0B_0C_0$ und $D_2E_2F_2$ herleiten: weil nämlich für die Eckpunkte dieser Dreiecke die z-Coordinaten übereinstimmen, so verhalten sich ihre Projectionen auf die yz-Ebene, nämlich die Dreiecke Δ_x und $\sqrt{\frac{\mu_0}{16}}$ resp. $\sqrt{\frac{M}{16}}$, wie die y-Coordinaten der entsprechenden Punkte, d. h. wie die Halbachsen n und p.

Den positiven Werthen von μ_0 entspricht der *elliptische Cylinder,* den negativen Werthen von μ_0 der *hyperbolische Cylinder.*

Die Construction der (unendlichen) Achse des Cylinders und der beiden Querachsen lässt sich in beiden Fällen ohne Schwierigkeit ausführen:

1) *Es sei μ_0 positiv und $u_0v_0w_0$ positiv,* d. h. u_0, v_0, w_0 selbst positiv (§. 12, Gl. (31.)), so sind n^2 und p^2 beide positiv, d. h. wird die Fläche ein *elliptischer Cylinder.* Alsdann erhält man

zunächst, wie beim Paraboloid, in der Ebene (E) die Richtung der Achse des Cylinders, indem man durch gerade, durch die Eckpunkte des Dreiecks ABC gezogene Linien die Seiten desselben im Verhältniss der Quadratwurzeln aus den Differenzen der Quadrate der Seiten der beiden Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$, nämlich $\sqrt{u}:\sqrt{v}:\sqrt{w}$, theilt, welche Linien $A\mathfrak{A}$, $B\mathfrak{B}$, $C\mathfrak{C}$ wegen der Bedingung (7.) einander parallel sind;

alsdann construire man mit den Quadratwurzeln aus den Differenzen der Quadrate der entsprechenden Seiten der beiden Dreiecke $A_0B_0C_0$ und $A_1B_1C_1$, nämlich $\sqrt{u_0}$, $\sqrt{v_0}$, $\sqrt{w_0}$, in einer beliebigen Ebene das Dreieck $D_0E_0F_0$, so ist der Radius r_0 des diesem Dreieck umschriebenen Kreises die kleine Querachse (p) des elliptischen Cylinders, welche eine zur Ebene (E) senkrechte Lage erhält;

ferner ziehe man in der Ebene des Dreiecks $D_0E_0F_0$ durch den Mittelpunkt M_0 des diesem Dreieck umschriebenen Kreises diejenige gerade Linie, deren Entfernungen von den Endpunkten D_0, E_0, F_0, nämlich D_0D, E_0E, F_0F, bezüglich gleich sind den Linien A_0A, B_0B, C_0C, welche Construction durch die Bedingung $Z=0$ ermöglicht wird, und projicire die Eckpunkte des Dreiecks ABC auf eine zur Achse senkrechte Linie in den Punkten A', B', C':

so ergiebt sich n, die grosse Querachse des Cylinders, welche also in die Ebene (E) zu liegen kommt, durch die Proportion:

$$n:r_0 = EF:B'C' (= FD:C'A' = DE:A'B'),$$

und M', der Punkt, in welchem die unendliche Achse des Cylinders die

Gerade $A'B'C'$ durchschneidet, theilt die Distanzen der Punkte A', B', C' in demselben Verhältniss, in welchem M, die Projection von M_0 auf die Linie DEF, die Distanzen der entsprechenden Punkte D, E, F theilt.

2) *Es sei μ_0 negativ und $u_0 v_0 w_0$ positiv,* d. h. p^2 negativ und n^2 positiv, so wird die Fläche ein *hyperbolischer Cylinder,* dessen reelle Achse in der Ebene (E) liegt, oder *es sei μ_0 negativ und $u_0 v_0 w_0$ negativ,* d. h. p^2 positiv und n^2 negativ, so wird die Fläche ein hyperbolischer Cylinder, dessen reelle Achse die Ebene (E) senkrecht durchschneidet, alsdann hat man die eben angeführte Construction nur darin zu ändern, dass man nicht aus den Seiten $\sqrt{u_0}$, $\sqrt{v_0}$, $\sqrt{w_0}$ ein Dreieck construirt, sondern aus den Seiten

$$\sqrt{u_0-2u} = \sqrt{a_0^2+a_1^2-2a^2},$$
$$\sqrt{v_0-2v} = \sqrt{b_0^2+b_1^2-2b^2},$$
$$\sqrt{w_0-2w} = \sqrt{c_0^2+c_1^2-2c^2},$$

und diesem Dreieck anstatt des Kreises diejenige gleichseitige Hyperbel umschreibt, deren eine Hauptachse durch die Linie DEF dargestellt wird, und zwar, wenn $u_0 v_0 w_0$ positiv ist, die reelle Achse, wenn dagegen $u_0 v_0 w_0$ negativ ist, die imaginäre Achse.

Ist μ_0 (bezüglich M) gleich $16\Delta_x^2$, so wird das Verhältniss der Quadrate der Querachsen, abgesehen vom Vorzeichen, gleich 1, d. h. die Fläche ein Kreiscylinder oder ein gleichseitig-hyperbolischer Cylinder.

§. 15. Die bisher von der Betrachtung ausgeschlossene Annahme, dass μ und μ_0 zugleich verschwinden, führt (S. 256) zum *parabolischen Cylinder.* Wenn die Eckpunkte A_0, B_0, C_0 der ersten Basis auf einem solchen Cylinder

$$\frac{z^2}{p'} = 2x$$

angenommen sind, wo $p' = \frac{p^2}{m}$ (S. 252), und A_1, B_1, C_1, die Eckpunkte der zweiten Basis, als die conjugirten Punkte auf dem Grenzcylinder

$$z = 0, \quad x > \frac{p'}{2},$$

und zwar, wie bekannt, die correspondirenden Ecken beider Basen auf parallelen, zur Ebene des Grenzcylinders senkrechten Ebenen, so ergiebt sich, dass *die senkrechte Projection der ersten Basis auf die Ebene der zweiten,* — das Dreieck ABC, — *congruent und gleichliegend ist der zweiten Basis.*

Die *Richtung der Hauptachsen* wird bestimmt durch die Proportion

$$\alpha_1-\alpha_2 : \alpha_2-\alpha : \alpha-\alpha_1 = \zeta_1^2-\zeta_2^2 : \zeta_2^2-\zeta^2 : \zeta^2-\zeta_1^2,$$

wo die Grössen α und ζ dieselbe Bedeutung haben als früher (S. 252). Auch *der Parameter* p' ergiebt sich durch Entwickelungen, welche sich denen in §. 13 anschliessen lassen. Man erhält nämlich, unter Beibehaltung der daselbst eingeführten Bezeichnungen:

$$u_0 = a_0^2 - a_1^2 = (\zeta_1 - \zeta_2)^2,$$
$$v_0 = b_0^2 - b_1^2 = (\zeta_2 - \zeta\ )^2,$$
$$w_0 = c_0^2 - c_1^2 = (\zeta\ - \zeta_1)^2,$$

und weil die Punkte A_0, B_0, C_0 auf dem parabolischen Cylinder liegen:

$$u_0 = 2(p'\xi_1 + p'\xi_2 - \zeta_1\zeta_2),$$
$$v_0 = 2(p'\xi_2 + p'\xi - \zeta_2\zeta\ ),$$
$$w_0 = 2(p'\xi + p'\xi_1 - \zeta\,\zeta_1).$$

Bildet man jetzt die Determinante

$$2u_0v_0w_0 = \begin{vmatrix} 0, & w_0, & v_0 \\ w_0, & 0, & u_0 \\ v_0, & u_0, & 0 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} d_{00}, & d_{01}, & d_{02} \\ d_{10}, & d_{11}, & d_{12} \\ d_{20}, & d_{21}, & d_{22} \end{vmatrix},$$

wo

$$d_{ik} = p'\xi_i . 1 + p' 1 . \xi_k - \zeta_i\zeta_k, \quad \text{also} \quad d_{ii} = 0,$$

so ergiebt sich

$$2u_0v_0w_0 = 8p'^2[\xi, \zeta]^2$$

d. h.

$$u_0v_0w_0 = 16p'^2 . \varDelta_y^2 .$$

Durch diese Gleichung ist p', der Parameter des parabolischen Cylinders, bestimmt, weil $\varDelta_y$, die Projection der ersten Basis auf die xz-Ebene, welche durch die bereits construirte Achsenrichtung in ihrer Lage bekannt ist, sowie u_0, v_0, w_0 als gegebene Grössen zu betrachten sind.

Berlin, 1870.

Ueber eine Darstellung des Kreisbogens, des Logarithmus und des elliptischen Integrales erster Art durch unendliche Producte.

(Vorgetragen in der Sitzung der math.-phys. Klasse der K. Bayr. Akademie d. W. am 9. November 1867.)

(Von Herrn *Ludwig Seidel* in München.)

1.

Die Functionen arc cos x und log x sind einer Darstellung durch unendliche Producte fähig, auf die man, soviel ich weiss, noch nicht aufmerksam geworden ist, obgleich sie vor anderen Darstellungen, ausser ihrer höchst einfachen Ableitung, gewisse auszeichnende Eigenschaften voraus hat.

Wenn man die Gleichung

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \cos\tfrac{1}{2}\alpha\,\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\frac{1}{2}\alpha}$$

m mal anwendet, indem man stets den rechts stehenden Quotienten wieder transformirt, so ergiebt sich

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{4}\alpha\cos\tfrac{1}{8}\alpha\ldots\cos\frac{\alpha}{2^m}\,\frac{\sin\frac{\alpha}{2^m}}{\frac{\alpha}{2^m}},$$

Lässt man hier m über alle Grenzen wachsen, und ist festgestellt (was eigentlich Sache des Uebereinkommens über die Einheit der Kreisbogen ist), dass das Verhältniss eines unendlich abnehmenden Arcus zu seinem Sinus Eins zur Grenze hat, so erhält man sofort

$$\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{4}\alpha\cos\frac{1}{8}\alpha\ldots\text{ in inf.}}.$$

Die verschiedenen rechts auftretenden trigonometrischen Functionen sind aber *algebraisch* durch eine einzige darstellbar. Setzt man

$$\cos\alpha = x$$

und

$$\cos\frac{\alpha}{2^r} = x_r,$$

so ist nehmlich

$$
\text{(I.)} \quad \left\{
\begin{aligned}
x_1 &= \sqrt{\tfrac{1}{2}(1+x)},\\
x_2 &= \sqrt{\tfrac{1}{2}(1+x_1)},\\
x_3 &= \sqrt{\tfrac{1}{2}(1+x_2)}\\
&\text{etc.},
\end{aligned}\right.
$$

und man hat nach dieser Bezeichnung

$$\text{(II.)} \quad \arccos x = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x_1 x_2 x_3 \ldots}.$$

Die Convergenz der Wurzeln x_1, x_2, ... gegen die Einheit ist so rasch, dass man z. B. mit $x=0$ den Werth von $\log \pi$ auf fünf Decimalen genau erhält aus der Berechnung von acht Factoren des Nenners, deren Logarithmen sich fast à vue der Reihe nach hinschreiben lassen, wenn man Tafeln hat, die (wie die *Wittstein*schen oder auch die *August*schen Additions-Logarithmen) für echte Brüche x den $\log(1+x)$ zum Argumente $\log x$ sogleich geben. — Die Convergenz des *Wallis*schen Productes für π ist ohne Vergleich langsamer; übrigens bietet unser Product, welches zu gegebenen goniometrischen Functionen den Bogen darstellt, mit dem bekannten anderen, welches umgekehrt den Sinus durch eine Reihe algebraisch vom Bogen abhängiger Factoren ausdrückt, die bemerkenswerthe Analogie, dass nach beiden das Verhältniss $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ eine Formel von besonders einfacher Gesetzmässigkeit erhält.

Das theoretische Interesse der Gleichung (II.) liegt vornehmlich darin, dass sie den zu gegebenem Cosinus gehörigen Bogen *in seiner ganzen Vieldeutigkeit* darstellt. In der That ergiebt sich unserer Ableitung nach die nehmliche Formel, man mag unter α von den verschiedenen zum $\cos\alpha = x$ gehörigen Arcus verstehen, welchen man will. Nur fallen, je nach Verschiedenheit der Wahl, die Vorzeichen bestimmter x_r und in Folge dessen auch die absoluten Werthe der später kommenden x_{r+1}, x_{r+2}, ... verschieden aus. Umgekehrt ist es erlaubt zur Herstellung des Ausdrucks (II.) jede einzelne der Grössen $x_r = \sqrt{\frac{1}{2}(1+x_{r-1})}$ (sowie auch die $\sqrt{1-x^2}$) nach Belieben positiv oder negativ zu wählen, — mit der einzigen Beschränkung, dass von *irgend welcher* Stelle ab alle späteren x positiv genommen werden müssen. Diese Einschränkung (begründet in der Bedeutung der x_r als Cosinus von Bogen, die zuletzt unendlich klein werden) ist nehmlich unerlässliche Bedingung für die Convergenz des unendlichen Productes $x_1 x_2 x_3 \ldots$ gegen einen von Null verschiedenen Werth: sie wird also durch die Form der Gleichung (II.)

von selbst vorgeschrieben. So oft man demnach ausser dem Vorzeichen von $\sqrt{1-x^2}$ noch diejenigen einer endlichen Anzahl der $x_1 x_2 \ldots$ nach Belieben feststellt, erhält man aus (II.) Einen der unendlich vielen Werthe von $\arccos x$, — bei jeder Disposition über die Doppelzeichen einen anderen, — und nur dann den absolut kleinsten, zwischen $\pm\pi$ gelegenen Bogen α_0, (dessen Vorzeichen mit demjenigen seines Sinus $\sqrt{1-x^2}$ übereinstimmt), wenn man alle Grössen $x_1 x_2 \ldots$ positiv nimmt. In dieser Beziehung beweist man leicht folgende allgemeine Regel: Bezeichnet A den absoluten Werth von α_0, d. h. den kleinsten positiven Werth von $\arccos x$, und sind x_a, x_b, $x_c, \ldots x_s$, x_t (geordnet nach steigenden Indices, und in *endlicher* Anzahl gegeben) diejenigen unter den Grössen x_1, x_2, $\ldots$, welche man negativ nehmen will, so giebt bei dieser Disposition die Gleichung (II.) für den Arcus den Werth

$$\alpha = \pm(A-2^a\pi+2^b\pi-2^c\pi+\cdots\pm 2^t\pi),$$

wo in den Klammern die Zeichen beständig wechseln, und vor denselben dasjenige von α_0 oder von $\sqrt{1-x^2}$ massgebend ist*). So zum Beispiel, falls $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ gesetzt und auch $\sqrt{1-x^2}$ negativ angenommen wird, findet man den Werth $\alpha_0=-\frac{3\pi}{4}$, wenn x_1, x_2, $\ldots$ alle positiv bestimmt werden, dagegen den Werth $22,7765\ldots=\frac{29\pi}{4}=-\frac{3\pi}{4}+8\pi$, wenn man unter den letzteren Grössen noch x_3, und zwar diese allein, negativ wählt.

In so ferne die charakteristische Vieldeutigkeit der Transscendenten $\arccos x$ *in ihrem ganzen Umfange* sich wiedergegeben findet durch algebraische Vieldeutigkeit der Formel (II.), — während die bekannten Ausdrücke durch Reihen (die auch nicht so allgemein convergiren) dem Bogen seine auszeichnendste Eigenschaft abstreifen, — ist man berechtigt zu sagen, dass das unendliche Product einen der Natur dieser Function mehr accommodaten Ausdruck abgiebt, als die Reihen**).

---

*) Will man die Regel umkehren, um direct diejenige Wahl der Vorzeichen zu erkennen, die der Differenz $\alpha-\alpha_0$ einen vorgeschriebenen Werth $\pm 2m\pi$ giebt, so ist zu beachten, dass jede ganze Zahl (hier die gerade $2m$) auf zwei verschiedene Arten in die Form $2^t-2^s+\cdots$ (nach fallenden Potenzen von 2 geordnet) sich bringen lässt. Jede der beiden Darstellungen erhält man aus der anderen, wenn man in dieser statt des letzten Gliedes $\pm 2^a$ den Ausdruck setzt $\pm(2^{a+1}-2^a)$, und die Wahl ist unter beiden so zu treffen, dass das niedrigste Glied von $\alpha-\alpha_0=\pm 2m\pi$ entgegengesetztes Vorzeichen erhält mit α_0, oder mit $\sqrt{1-x^2}$.

**) Wenn man in (II.) $x=0$ setzt, und den Werth, welchen der Ausdruck bei einer beliebigen Disposition über die Zeichen erhält, dividirt durch denjenigen, welcher

2.

Die analoge Formel für den Logarithmus erhält man aus (II.) unmittelbar mittelst der Substitution $\alpha = i\log y$, oder $x = \frac{1}{2}\left(y+\frac{1}{y}\right)$. Will man diesen Uebergang nicht machen, etwa in der Absicht den Zusammenhang, der zwischen beiderlei Arten von Functionen durch das Imaginäre statt findet, selbst aus der Uebereinstimmung der zwei unendlichen Producte zu erweisen, so benutzt man die Formel

$$y-y^{-1} = (y^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}})(y^{\frac{1}{2}}-y^{-\frac{1}{2}}),$$

welche, wiederholt auf sich selbst angewendet, giebt

$$y-y^{-1} = (y^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}})(y^{\frac{1}{4}}+y^{-\frac{1}{4}})(y^{\frac{1}{8}}+y^{-\frac{1}{8}})\dots(y^{\frac{1}{2^m}}+y^{-\frac{1}{2^m}})(y^{\frac{1}{2^m}}-y^{-\frac{1}{2^m}}),$$

und erhält, indem man mit den beiden Termen dieser Gleichung in die beiden Seiten der Gleichung $\log y = 2^m \log y^{\frac{1}{2^m}}$ dividirt:

$$\frac{\log y}{y-y^{-1}} = \frac{1}{\frac{1}{2}(y^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}})}\frac{1}{\frac{1}{2}(y^{\frac{1}{4}}+y^{-\frac{1}{4}})}\cdots\frac{1}{\frac{1}{2}(y^{\frac{1}{2^m}}+y^{-\frac{1}{2^m}})}\frac{\log y^{\frac{1}{2^m}}}{y^{\frac{1}{2^m}}-y^{-\frac{1}{2^m}}}.$$

Lässt man jetzt m über alle Grenzen wachsen, so nähert sich $y^{\frac{1}{2^m}}$ schliesslich der Eins, vorausgesetzt, dass y positiv ist, und dass man den gebrochenen Potenzen dieser Grösse ihre reellen positiven Werthe beilegt. Setzt man $y^{\frac{1}{2^m}} = 1+\zeta$ (wo $\zeta \pm$ sein kann), so geht der letzte Factor zur Rechten über in die Form $\frac{\log(1+\zeta)}{2\zeta}\frac{1+\zeta}{1+\frac{1}{2}\zeta}$, deren Grenzwerth, für unendlich abnehmende ζ, einzuführen ist. Dieser Werth ist $\frac{1}{2}M$, wenn man mit M, unter Voraussetzung dass der reelle Werth des Logarithmus festgehalten wird, die Grenze von $\frac{\log(1+\zeta)}{\zeta}$ (d. i. den Modulus des Logarithmen-Systems) bezeichnet. (Die Existenz der so definirten Constanten M lässt sich leicht ohne Anwendung unendlicher Reihen erweisen). Hiernach geht unsere Gleichung für unendlich grosse m über in die Form

$$\text{(III.)}\quad \log y = \frac{\frac{1}{2}(y-y^{-1}).M}{\frac{1}{2}(y^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}}).\frac{1}{2}(y^{\frac{1}{4}}+y^{-\frac{1}{4}}).\frac{1}{2}(y^{\frac{1}{8}}+y^{-\frac{1}{8}})\dots\text{ in inf.}}$$

---

lauter positiven Zeichen entspricht, so repräsentirt der Quotient alle ungeraden Zahlen; man erhält daher einen Ausdruck für *alle ganzen Zahlen,* wenn man noch ± 1 hinzufügt und halbirt. Dasselbe lässt sich auch auf etwas andere Art erreichen.

Der Ausdruck convergirt unmittelbar, und rasch, für das ganze reelle Gebiet der Logarithmen und zeichnet sich dadurch aus vor anderen Darstellungen derselben Function. Das *natürliche* Logarithmen-System charakterisirt sich dabei durch den Werth 1 des Factors M; für jedes andere System kann der Werth dieser Constanten, wenn etwa statt seiner der Werth des Logarithmus irgend einer bestimmten Zahl vorgeschrieben ist, selbst aus der Gleichung (III.) gefunden werden. Diese Gleichung spricht auch direct gewisse fundamentale Eigenschaften der Logarithmen aus: unter Anderem lässt sie erkennen, dass bei unendlich wachsendem oder unendlich abnehmendem y der Logarithmus unendlich klein bleibt gegen jede noch so niedrige positive oder resp. negative Potenz von y. Denn weil im Nenner die Summe der Exponenten gleichen Vorzeichens, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$, gegen Eins selbst convergirt, so gehört der Ausdruck $\log y$ im einen wie im anderen Falle keiner Ordnung von y oder $\frac{1}{y}$ mehr an, deren Exponent noch so wenig von Null verschieden wäre. — Die imaginäre Vieldeutigkeit des Logarithmus wird durch unsere Ableitung der Gleichung (III.) nicht unmittelbar evident: sie tritt aber aus der (reellen) Vieldeutigkeit des Ausdruckes in (II.) sofort hervor, wie die Concordanz zwischen beiden erkannt worden ist. Setzt man nehmlich in (III.) zur Abkürzung

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\left(y+\frac{1}{y}\right) &= x, \\ \tfrac{1}{2}(y^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}}) &= x_1, \\ \tfrac{1}{2}(y^{\frac{1}{4}}+y^{-\frac{1}{4}}) &= x_2, \\ &\text{etc.,} \end{aligned}$$

so hat man, gerade so wie in (I.), allgemein

$$x_{r+1} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1+x_r)}.$$

Daher kann man auch umgekehrt die einzelnen Factoren des Productes in (II.) explicite ohne Häufung von Radicalen und ohne die algebraische Form aufzugeben, darstellen, wenn man zu dem dort gegebenen cosinus x die Hilfsgrösse y einführt, definirt durch die Gleichung $\frac{1}{2}\left(y+\frac{1}{y}\right)=x$. Zwar wird nach derselben, wenn x ein echter Bruch ist, y complex, aber die Werthe $x_1 = \frac{1}{2}(y^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}}), \ldots.\ x_m = \frac{1}{2}(y^{\frac{1}{2^m}}+y^{-\frac{1}{2^m}})$ bleiben reell. Indessen würde der Ausdruck (II.) durch diese Substitution an Klarheit verlieren, weil nach derselben wohl die Vielheit der reellen Werthe jedes einzelnen Factors x_r sogleich zu erkennen, aber nicht mehr, wie aus den Gleichungen (I.), direct

zu ersehen wäre, dass man jedem Factor, sobald der unmittelbar vorausgehende bestimmt ist, unter den 2^r reellen Werthen, deren er an und für sich fähig ist, nur mehr Einen von den beiden sich entgegengesetzten geben darf, die zum Werth des vorausgehenden passen.

Für die numerische Anwendung der Gleichung (III.) bildet das gleichzeitige Auftreten positiver und negativer gebrochener Potenzen von y in derselben eine Unbequemlichkeit. Sie wird vermieden, wenn man die Factoren x_1, x_2, ... des Nenners nach dem Algorithmus (I.) berechnet (indem man alle Wurzeln positiv nimmt): man kann aber auch in (III.) nach Belieben die negativen oder die positiven Potenzen dadurch wegbringen, dass man den Zähler mit y, den Nenner mit $y^{\frac{1}{2}}\, y^{\frac{1}{4}}\, y^{\frac{1}{8}} \ldots$ entweder multiplicirt oder dividirt, wodurch folgende Doppelgleichung entsteht:

$$\text{(IV.)} \qquad \log y \left\{ \begin{aligned} &= \frac{M(y-1)}{\frac{1}{2}(1-y^{\frac{1}{2}})\cdot\frac{1}{2}(1+y^{\frac{1}{4}})\cdot\frac{1}{2}(1+y^{\frac{1}{8}})\ldots}, \\ &= \frac{M(1-y^{-1})}{\frac{1}{2}(1+y^{-\frac{1}{2}})\cdot\frac{1}{2}(1+y^{-\frac{1}{4}})\cdot\frac{1}{2}(1+y^{-\frac{1}{8}})\ldots}. \end{aligned} \right.$$

Jede von beiden Formen ist, immer unter Voraussetzung dass alle Wurzeln reell und positiv genommen werden, brauchbar für alle positiven y. Wollte man sich denken, dass eine ganze Reihe von Logarithmen erst zu berechnen wäre, so könnte man sich die Bildung unserer Producte noch sehr erleichtert denken durch eine Hilfstafel, welche die Quadratwurzeln solcher Zahlen, die der 1 nahe liegen, direct ergäbe: man würde dann selbst für sehr grosse oder sehr kleine y nur einige wenige der ersten Wurzeln direct auszuziehen haben, weil die Grössen $y^{\frac{1}{\infty}}$ sehr rasch gegen Eins convergiren. Zu den Gleichungen (II.) und (III.) ist noch zu bemerken, dass in ihnen (vorausgesetzt man sei in Formel (II.) bis dahin vorgegangen, wo alle weiteren x positiv genommen werden) jeder folgende Factor des Nenners näher an 1 liegt, als die Quadratwurzel des unmittelbar vorausgehenden: nennt man diesen f, so liegt also das Product aller späteren näher an 1, als $f^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots}$, d. h. als f selbst, sodass man an jeder Stelle genau weiss, wie viel höchstens durch die Vernachlässigung aller folgenden Factoren gefehlt werden kann. Unter den beiden Formen in (IV.) hat für jedes y die Eine noch die nehmliche Eigenschaft, und zwar diejenige, in welche die zu 1 addirten gebrochenen Potenzen von y grösser als 1 sind. Endlich beweist man auch, dass, wenn

einmal in Gleichung (II.) oder (III.) ein einzelner Factor f des Nenners von 1 nur mehr um eine kleine Grösse „erster Ordnung“ verschieden ist, alsdann unter der vorhin ausgesprochenen Voraussetzung bis auf Grössen „zweiter Ordnung“ der nächstfolgende mit $f^{\frac{1}{4}}$, der diesem folgende mit $f^{\frac{1}{16}}$, etc., also das Product aller späteren mit $\sqrt[3]{f}$ übereinstimmt. In den beiden Formen (IV.) dagegen ist unter gleichen Voraussetzungen der auf f folgende Factor bis auf kleine Grössen zweiter Ordnung gleich $f^{\frac{1}{2}}$, der nächste gleich $f^{\frac{1}{4}}$, etc. und das Product dieser aller gleich f selbst. Durch diese Bemerkung wird die numerische Anwendung der Formeln noch wesentlich abgekürzt; wegen des Näheren beziehe ich mich auf die vollkommen analogen Erörterungen am Schlusse dieses Aufsatzes.

3.

Das elliptische Integral erster Art theilt mit den Functionen Arcus und Logarithmus die Eigenschaft, sich halbiren zu lassen, — oder genauer gesagt die Eigenschaft, dass seine Hälfte wieder darstellbar ist als eine Function der ursprünglichen Art, gehörig zu einem Werthe der Veränderlichen, welcher aus dem gegebenen Anfangswerthe derselben algebraisch berechnet werden kann. Setzt man nach den bekannten Bezeichnungen

$$u = F(\lambda) = \int_0^\lambda \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}},$$
$$\lambda = \operatorname{am} u,$$

so finden sich

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \operatorname{am} \tfrac{1}{2} u, \\ \lambda_2 &= \operatorname{am} \tfrac{1}{4} u, \\ &\vdots \\ \lambda_m &= \operatorname{am} \frac{u}{2^m} \end{aligned}$$

zu gegebenem λ der Reihe nach durch ihre Sinus; man hat, wenn

$$\Delta\lambda = \sqrt{1-k^2\sin\lambda^2} \qquad \text{ist,}$$

$$\begin{aligned} \sin\lambda_1^2 &= \frac{2\sin\frac{1}{2}\lambda^2}{1+\Delta\lambda}, \\ \sin\lambda_2^2 &= \frac{2\sin\frac{1}{2}\lambda_1^2}{1+\Delta\lambda_1}, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Durch Einführung von Hilfswinkeln werden diese Ausdrücke bequemer: setzt man nehmlich (da k ein echter Bruch ist)

$$\text{(V.)}\quad \begin{cases} k\sin\lambda \;= \sin\varDelta, \\ k\sin\lambda_1 = \sin\varDelta_1, \\ k\sin\lambda_2 = \sin\varDelta_2, \\ \qquad\text{etc.,} \end{cases}$$

so wird

$$\text{(VI.)}\quad \begin{cases} \sin\lambda_1 = \dfrac{\sin\frac{1}{2}\lambda}{\cos\frac{1}{2}\varDelta}, & \sin\varDelta_1 = \dfrac{\sin\frac{1}{2}\varDelta}{\cos\frac{1}{2}\lambda}, \\ \sin\lambda_2 = \dfrac{\sin\frac{1}{2}\lambda_1}{\cos\frac{1}{2}\varDelta_1}, & \sin\varDelta_2 = \dfrac{\sin\frac{1}{2}\varDelta_1}{\cos\frac{1}{2}\lambda_1}, \\ \qquad\text{etc.} & \qquad\text{etc.} \end{cases}$$

Da nun für ein sehr grosses m oder für ein sehr kleines λ_m das Verhältniss zwischen $\frac{u}{2^m} = F(\lambda_m)$ und λ_m, oder auch das Verhältniss zwischen $\frac{u}{2^m}$ und $\sin\lambda_m$ sich der Einheit ohne Ende nähert, so hat man

$$u = F\lambda = \lim_{m=\infty}(2^m \sin\lambda_m).$$

Dass diese Gleichung für die numerische Berechnung des Integrales sich verwerthen lässt, aber mit Vortheil nur dann, wenn man den Kunstgriff einer besonderen Art von Interpolation von mässigen Werthen auf das Unendliche hinzunimmt, findet man erörtert bei *Schellbach,* Lehre von den elliptischen Integralen etc. §§. 118 und 160, wo übrigens der Bogen λ_m statt seines Sinus beibehalten ist. Man kann indess die Formel durch eine analoge Transformation wie die für die Herleitung der Gleichungen (II.) und (III.) benutzten, leicht in eine Gestalt überführen, in welcher sie bei zunehmendem m nicht mehr das Product eines unendlich wachsenden und eines unendlich abnehmenden Factors enthält, sondern dafür das einer wachsenden Zahl von Factoren, die nach 1 convergiren. Denn es ist identisch *)

$$2^m \sin\lambda_m = \sin\lambda \frac{2\sin\lambda_1}{\sin\lambda} \cdot \frac{2\sin\lambda_2}{\sin\lambda_1} \cdot \ldots \cdot \frac{2\sin\lambda_m}{\sin\lambda_{m-1}},$$

und weil zugleich nach (VI.)

$$\frac{2\sin\lambda_1}{\sin\lambda} = \frac{1}{\cos\frac{1}{2}\lambda\cos\frac{1}{2}\varDelta}$$

*) Natürlich könnte man, hier wie in den früheren Fällen, statt des Productes eine Reihe bilden: das Gesetz wird aber einfacher bei dem Product.

ist, etc. so erhält man:

$$\text{(VII.)} \qquad F(\lambda) = \frac{\sin\lambda}{\cos\frac{1}{2}\lambda\cos\frac{1}{2}\varDelta.\cos\frac{1}{2}\lambda_1\cos\frac{1}{2}\varDelta_1.\cos\frac{1}{2}\lambda_2\cos\frac{1}{2}\varDelta_2\ldots \text{ in inf.}}.$$

Zugleich hat man für das elliptische Integral *zweiter* Gattung, ebenfalls durch die wiederholte Halbirung (vergl. *Schellbach* §. 118)

$$\begin{aligned} E(\lambda) &= F(\lambda) - k^2(\sin\lambda\sin\lambda_1^2 + 2\sin\lambda_1\sin\lambda_2^2 + 4\sin\lambda_2\sin\lambda_3^2 + \cdots) \\ &= F(\lambda) - \quad (\sin\lambda\sin\varDelta_1^2 + 2\sin\lambda_1\sin\varDelta_2^2 + 4\sin\lambda_2\sin\varDelta_3^2 + \cdots), \end{aligned}$$

und eine ähnliche Gleichung kann für das Integral dritter Gattung aufgestellt werden (s. a. a. O. §. 141.).

Der Ausdruck zur Rechten in Gleichung (VII.) ist, abgesehen von der unendlichen Zahl seiner Factoren, eine algebraische Function von $\sin\lambda$, denn $\sin\varDelta$ und dann die sinus und cosinus der halbirten Winkel, wie sie zur Berechnung von $\sin\lambda_1$, $\sin\varDelta_1$ gebraucht werden, etc. ergeben sich algebraisch aus jenem, sodass das ganze Product verwandten Charakter, nur complicirtere Gestalt hat, wie dasjenige in der Gleichung für arccos. Die trigonometrische Form ist nur eingeführt ihrer besseren Uebersichtlichkeit und zugleich der Vortheile halber, die sie für die numerische Rechnung gewährt. Mag man aber die algebraische Natur der vorkommenden Uebergänge ins Auge fassen, oder die trigonometrische Gestalt, in welcher sie erscheinen, so bemerkt man leicht, dass der Ausdruck (VII.) von $F(\lambda)$ unendliche Vieldeutigkeit in zweierlei Richtung hat, und dieser Umstand verleiht ihm sein Interesse.

Die verschiedenen Grössen $\varDelta$, λ_1, $\varDelta_1$, λ_2, $\varDelta_2$, ..., wie sie nach und nach in der Rechnung auftreten, werden durch ihre Sinus bestimmt. Um die Analogie schon von Anfang an herzustellen, können wir uns denken, dass auch von der ursprünglichen Grösse λ eigentlich der Sinus das Gegebene sei, wie dies in der That der Fall ist, wenn das elliptische Integral ursprünglich mit der algebraischen Form der zu integrirenden Function vorlag. In der Rechnung treten nun zunächst auf $\sin\frac{1}{2}\lambda$ und $\cos\frac{1}{2}\lambda$; von diesen beiden Grössen ist die Summe der Quadrate bekannt, gleich 1, und das doppelte Product gleich $\sin\lambda$: es ist also klar, dass man nicht allein die Vorzeichen von beiden zugleich umkehren, sondern auch ihre beiderseitigen Werthe mit einander vertauschen kann, sodass jede von beiden Grössen vier Werthe im Ganzen hat. Die Zweideutigkeit des Vorzeichens hat auf die absoluten Werthe der weiter in der Rechnung auftretenden Grössen keinen Einfluss: sie entspricht der Doppeldeutigkeit des Radicales $\varDelta\lambda$ und braucht nicht weiter besprochen zu werden. Es bleibt also dann noch übrig, die Willkür in der Austheilung zweier

gegebenen Werthe zwischen $\sin\frac{1}{2}\lambda$ und $\cos\frac{1}{2}\lambda$. Eine vollkommen analoge Willkür findet statt bei der Austheilung der zwei Zahlenwerthe von $\sin\frac{1}{2}\Lambda$ und $\cos\frac{1}{2}\Lambda$, von welchen ebenfalls die Quadratsumme 1 und das doppelte Product $k\sin\lambda$ gegeben ist; man wird also (abgesehen vom Vorzeichen) bereits vier gleich berechtigte Werthe für $\sin\lambda_1$ erhalten. Weil dabei $\sin\Lambda$ der Null näher liegt als $\sin\lambda$, so werden, wie man leicht erkennt, die absoluten Werthe des Paares für $\sin\frac{1}{2}\lambda$ und $\cos\frac{1}{2}\lambda$ eingeschlossen von denjenigen des Paares $\sin\frac{1}{2}\Lambda$ und $\cos\frac{1}{2}\Lambda$. Wenn man daher dem $\sin\frac{1}{2}\lambda$ nach Belieben einen seiner beiden Werthe zutheilt, zugleich aber für $\cos\frac{1}{2}\Lambda$ den (absolut genommen) grösseren der beiden hier zulässigen Werthe wählt, so erhält man nach (VI.) jedesmal echte Brüche für $\sin\lambda_1$ und $\sin\Lambda_1$, und die Rechnung kann mit jedem der beiden Werthe von $\sin\frac{1}{2}\lambda$ im Gebiet reeller Grössen weiter geführt werden. Nimmt man dagegen für $\cos\frac{1}{2}\Lambda$ den kleineren seiner beiden Werthe, d. i. den absolut kleinsten (und also für $\sin\frac{1}{2}\Lambda$ den absolut grössten) unter den vier Werthen von $\sin\frac{1}{2}\lambda$, $\cos\frac{1}{2}\lambda$, $\sin\frac{1}{2}\Lambda$, $\cos\frac{1}{2}\Lambda$, so werden, *wie auch* $\sin\frac{1}{2}\lambda$, $\cos\frac{1}{2}\lambda$ *gewählt sein mögen,* $\sin\lambda_1$ und $\sin\Lambda_1$ grösser als 1, daher $\sin\frac{1}{2}\lambda_1$, $\cos\frac{1}{2}\lambda_1$ etc. complex, und man betritt damit das Feld des Imaginären, in welches man mit gleichem Rechte auch bei jedem späteren ähnlichen Uebergang (wieder auf zweierlei Art) ausbiegen kann. Während also die Doppelwahl, die schon in Bezug auf die Grössen $\sin\frac{1}{2}\lambda_r$, $\cos\frac{1}{2}\lambda_r$ an unendlich vielen Stellen offen steht, für sich bereits zu einer unendlichen Anzahl (reeller) Werthe führt, tritt bei Benutzung der analogen Freiheit in Betreff der Grössen $\sin\frac{1}{2}\Lambda_r$, $\cos\frac{1}{2}\Lambda_r$ auch in der zweiten (imaginären) Richtung die unendliche Mannigfaltigkeit hinzu, — sowie es der bekannten Natur der Function $F(\lambda)$ zukommt. Natürlich muss dabei vorbehalten werden die Erfüllung der Convergenzbedingung für das unendliche Product. In Bezug auf diese werde ich nun zeigen, dass sie dann immer und nur dann realisirt ist, wenn man die Regel einhält, wie auch die reellen oder complexen Werthe einer beliebigen Anzahl von Grössen $\sin\lambda_1$, $\sin\lambda_2, \dots$ $\sin\lambda_m$ und $\sin\Lambda_1$, $\sin\Lambda_2, \dots$ $\sin\Lambda_m$ am Anfang genommen worden sein mögen, *von irgend einer, wenn auch noch so späten Stelle ab* allen später auftretenden $\sin\frac{1}{2}\lambda_m$, $\sin\frac{1}{2}\Lambda_m$ etc. unter den zwei zur Auswahl stehenden Werthen immer den vom kleineren Modulus, und dagegen den $\cos\frac{1}{2}\lambda_m$, $\cos\frac{1}{2}\Lambda_m$ etc. denjenigen vom grösseren Modulus zuzutheilen. Diese Vorschrift entspricht vollkommen der in §. 1 aufgestellten, nach welcher dort nur eine endliche Anzahl unter den Grössen x_1, x_2, ... negativ genommen werden durfte.

4.

Für den Convergenzbeweis handelt es sich zunächst darum, die Moduln zweier aufeinander folgenden, im allgemeinen complexen Grössen $\sin\lambda_r^2$ und $\sin\lambda_{r+1}^2$ mit einander zu vergleichen. Da keine Verwechselung zu besorgen ist, werde ich hier die angehängten Indices weglassen, und einfach λ, $\varLambda$ statt λ_r, $\varLambda_r$ und λ', $\varLambda'$ statt λ_{r+1}, $\varLambda_{r+1}$ schreiben.

Es sei gegeben

$$\sin\lambda^2 = \varrho e^{\varphi i}, \quad \text{also} \quad \sin\varLambda^2 = k^2\varrho e^{\varphi i}.$$

Setzt man

$$\cos\lambda^2 = \sigma e^{\psi i},$$

so findet sich

$$\sigma = \sqrt{1+\varrho^2-2\varrho\cos\varphi} \qquad \text{(positiv)},$$

$$2\sin\tfrac{1}{2}\lambda^2 = 1-\cos\lambda = 1-\sqrt{\sigma}\, e^{\frac{\psi i}{2}}$$

$$= 1-\sqrt{\sigma}\cos\frac{\psi}{2} - i\sqrt{\sigma}\sin\frac{\psi}{2}\cdot$$

Hiernach ist

$$(\operatorname{mod} 2\sin\tfrac{1}{2}\lambda^2)^2 = 1+\sigma-2\sqrt{\sigma}\cos\frac{\psi}{2}$$

und ebenso

$$(\operatorname{mod} 2\cos\tfrac{1}{2}\lambda^2)^2 = 1+\sigma+2\sqrt{\sigma}\cos\frac{\psi}{2}\cdot$$

Das Product dieser beiden Grössen ist ϱ^2; man kann nach Belieben die Eine oder die andere zur grösseren machen, da ψ um 2π, also $\frac{\psi}{2}$ um π nach Willkür verändert werden darf. Wir nehmen, gemäss der bereits ausgesprochenen Forderung, an, dass man das dritte Glied in unserem letzten Ausdrucke wirklich positiv, also im vorausgehenden negativ macht: man hat dann

$$(1.) \qquad (\operatorname{mod} 2\cos\tfrac{1}{2}\lambda^2)^2 > 1+\sigma$$

und folglich

$$(2.) \qquad (\operatorname{mod} 2\sin\tfrac{1}{2}\lambda^2)^2 < \frac{\varrho^2}{1+\sigma}\cdot$$

Vollkommen ähnliche Ungleichheiten bestehen für $\cos\frac{1}{2}\varLambda^2$, $\sin\frac{1}{2}\varLambda^2$, nur dass in ihnen $k^2\varrho$ an die Stelle der Grösse ϱ tritt (die auch auf den Werth von σ influirt), weil $\sin\varLambda^2 = k^2\sin\lambda^2$ ist.

σ^2 liegt immer zwischen $(1+\varrho)^2$ und $(1-\varrho)^2$; für die positive Grösse σ selbst stellt sich die untere Schranke, auf die es hier ankommt, verschieden (weil sie immer positiv genommen werden muss) je nachdem $\varrho \gtreqless 1$ ist; in der weiteren Betrachtung müssen desshalb drei Hauptfälle getrennt werden.

Erster Fall. Es seien ϱ und $k^2\varrho$ beide grösser als 1. Alsdann ist σ grösser als $\varrho-1$, oder $1+\sigma$ grösser als ϱ, man hat daher

$$(\operatorname{mod} 2\cos\tfrac{1}{2}\lambda^2)^2 > \varrho,$$
$$(\operatorname{mod} 2\sin\tfrac{1}{2}\lambda^2)^2 < \varrho$$

und ebenso

$$(\operatorname{mod} 2\cos\tfrac{1}{2}\Lambda^2)^2 > k^2\varrho.$$

Folglich wird nach (VI.)

$$(\operatorname{mod}\sin\lambda'^2)^2 = \left(\operatorname{mod}\frac{2\sin\frac{1}{2}\lambda^2}{2\cos\frac{1}{2}\Lambda^2}\right)^2 < \frac{1}{k^2}$$

und

$$\operatorname{mod}\sin\lambda'^2 < \frac{1}{k},$$

also

$$\operatorname{mod}\sin\Lambda'^2 < k.$$

Es werden also, wenn man von den Grössen $\sin\lambda^2$, $\sin\Lambda^2$ (deren Moduln ϱ und $k^2\varrho$ waren) übergeht zu den nächstfolgenden ähnlichen Grössen (die durch die Accente signirt sind) entweder die Moduln von beiden, oder doch gewiss der Modul von $\sin\Lambda'^2$ zu echten Brüchen gemacht, wodurch man von unserem ersten Falle entweder sogleich zum dritten, oder zum zweiten gelangt.

Zweiter Fall. Es sei $\varrho>1$ aber $k^2\varrho<1$. Hier hat man $\sigma>\varrho-1$, dagegen die ähnliche bei der Betrachtung von $\cos\frac{1}{2}\Lambda$, $\sin\frac{1}{2}\Lambda$ auftretende Grösse $\sigma'>1-k^2\varrho$. Folglich ist

$$(\operatorname{mod} 2\sin\tfrac{1}{2}\lambda^2)^2 < \varrho,$$
$$(\operatorname{mod} 2\cos\tfrac{1}{2}\Lambda^2)^2 > 2-k^2\varrho$$

und hiernach

$$\operatorname{mod}\sin\lambda'^2 < \sqrt{\frac{\varrho}{2-k^2\varrho}}.$$

Setzt man $k^2\varrho$, welches ein echter Bruch ist, gleich $1-\varepsilon$, so ist der Ausdruck zur linken, d. h. die Grösse, welche jetzt an die Stelle von ϱ tritt, kleiner als $\frac{\sqrt{\varrho}}{\sqrt{1+\varepsilon}}$, also umsomehr kleiner als $\frac{\varrho}{\sqrt{1+\varepsilon}}$, also hat sich durch den Uebergang zum nächstfolgenden λ der Modul in einem stärkeren Verhältniss als in dem von 1 zum echten Bruch $\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}$ verkleinert. Da nun, wenn man von hier wieder zum nächstfolgenden λ'' übergeht, das nämliche sich wiederholt, nur an die Stelle von $\varepsilon=1-k^2\varrho$ jetzt etwas *grösseres* tritt, so muss bei dem neuen Uebergang der Modul wieder in einem stärkeren Verhältniss als dem von $1:\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}$ sich

verkleinern, und so fort, so dass jedenfalls nach einer endlichen Anzahl von Uebergängen man zum folgenden Falle gelangt.

Dritter Fall. Es seien ϱ und $k^2\varrho$ beide kleiner als 1. In diesem Falle ist $\sigma > 1-\varrho$, also

$$(\text{mod}\, 2\cos\tfrac{1}{2}\lambda^2)^2 > 2-\varrho,$$
$$(\text{mod}\, 2\sin\tfrac{1}{2}\lambda^2)^2 < \frac{\varrho^2}{2-\varrho}$$

und ebenso

$$(\text{mod}\, 2\cos\tfrac{1}{2}\Lambda^2)^2 > 2-k^2\varrho,$$

also

$$\text{mod}\sin\lambda'^2 < \frac{\varrho}{\sqrt{(2-\varrho)(2-k^2\varrho)}}.$$

Da nun hier $2-\varrho > 1$ und $2-k^2\varrho > 2-k^2 = 1+k'^2$ ist, so verkleinert sich also der Modul, wenn man von λ zum nächstfolgenden λ' übergeht, in stärkerem Verhältniss als in demjenigen von $1:\frac{1}{\sqrt{1+k'^2}}$, und so bei jedem folgenden Uebergang weiter, sodass die Moduln der Grössen $\sin\lambda^2$, $\sin\lambda'^2$, ... und ebenso der Grössen $\sin\Lambda^2$, $\sin\Lambda'^2$, ... schneller abnehmen, als die Glieder einer convergirenden geometrischen Reihe.

Wie man sieht, muss dieses Verhalten jedesmal zuletzt eintreten, wenn von gewisser Stelle an consequent die am Schlusse des vorigen Paragraphen ausgesprochene Vorschrift eingehalten wird: denn unser erster und zweiter Fall führen bei Fortsetzung der Operationen immer von selbst schliesslich auf den dritten *).

Hiermit ist nun die Convergenz des unendlichen Productes gegen einen von Null verschiedenen Werth gesichert. Denn betrachtet man für sich die beiden unendlichen Producte

$$\cos\tfrac{1}{2}\lambda\cos\tfrac{1}{2}\lambda_1\ldots \quad \text{und} \quad \cos\tfrac{1}{2}\Lambda\cos\tfrac{1}{2}\Lambda_1\ldots$$

oder lieber die Quadrate derselben

$$(1-\sin\tfrac{1}{2}\lambda^2)(1-\sin\tfrac{1}{2}\lambda_1^2)\ldots$$

und das analoge, so kann man, weil jedenfalls von gewisser Stelle an der letzte unserer Fälle gilt, in welchem $\text{mod}\sin\frac{1}{2}\lambda^2 < \frac{\varrho}{2\sqrt{2-\varrho}} < \frac{\varrho}{2}$ ist, von

*) Die ganz speciellen zwischen (I.) und (II.) oder zwischen (II.) und (III.) in der Mitte stehenden Fälle wo entweder ϱ oder $k^2\varrho$ gerade 1 wäre, habe ich übergangen, da sie keinerlei Schwierigkeit bieten. — Man bemerkt übrigens, dass die Schlüsse des gegenwärtigen Paragraphen sich auch unmittelbar auf den Fall erstrecken lassen, in welchem k^2 als complexe Grösse, mit einem Modul kleiner als 1, gegeben wäre.

dieser Stelle an die Logarithmen der einzelnen Factoren in convergirende Reihen entwickeln, und nach bekannten Betrachtungen ist die Convergenz des Productes gegen einen von Null verschiedenen Werth sicher, wenn die Reihe

$$\text{mod}\sin\tfrac{1}{2}\lambda^2 + \text{mod}\sin\tfrac{1}{2}\lambda_1^2 + \cdots$$

convergirt. Da aber die Glieder derselben (von gewisser Stelle an), wie man bemerkt, sicher kleiner sind als die Hälften der aufeinanderfolgenden ϱ, und da diese letzteren eine Reihe bilden, die schliesslich schneller als eine gewisse geometrische convergirt, so folgt, was zu beweisen war. (Ganz ebenso auch für das Product mit den $\varLambda$.)

Man kann endlich noch hinzufügen, dass, wenn man nicht von irgend welcher Stelle an consequent unsere Vorschrift einhalten wollte, d. h. wenn man *unendlich oft* von derselben abginge, die Divergenz des Ausdruckes in (VII.) nothwendige Folge sein würde. Denn derselbe kann einen von Null verschiedenen Werth nur darstellen, wenn die Factoren seines Nenners, also die Grössen $\cos\frac{1}{2}\lambda_r$, $\cos\frac{1}{2}\varLambda_r$, etc. nach Grösse und „Richtung" die Einheit zur Grenze haben, wobei zugleich die $\sin\frac{1}{2}\lambda_r$, $\sin\frac{1}{2}\varLambda_r$ sich zuletzt der Null nähern. Man muss also in dem Producte einen Abschnitt an so später Stelle machen können, dass hinter demselben kein einzelner Factor um mehr als eine beliebig kleine Grösse von 1 abweicht. War nun diese Bedingung bei einer beliebigen Reihe solcher Factoren erfüllt, und weicht man an der nächsten Stelle von unserer Regel ab, so muss man hier dem $\cos\frac{1}{2}\lambda$ oder dem $\cos\frac{1}{2}\varLambda$ denjenigen Werth zutheilen, welcher nach unserer Vorschrift dem $\sin\frac{1}{2}\lambda$ oder $\sin\frac{1}{2}\varLambda$ zugekommen wäre; dieser aber hat (wenn die nächst vorhergehenden Factoren bereits sehr nahe mit 1 übereinstimmen) einen sehr kleinen Modul, sodass in (VII.) plötzlich wieder ein sehr grosser Factor auftreten würde. Unbeschadet der Convergenz kann dies *beliebig* oft geschehen, aber nicht *unendlich* oft; es muss also von irgend einer Stelle an unsere Regel aufrecht bleiben.

5.

Es ist noch die Art bemerkenswerth, wie das unendliche Product für $F(\lambda)$ die Eine Dimension der unendlichen Vielheit seiner Werthe verliert, wenn k gleich 0 oder gleich 1 wird. Im ersten Falle sind alle $\sin\varLambda = 0$, man hat also unter $\cos\frac{1}{2}\varLambda$ und $\sin\frac{1}{2}\varLambda$ die (absoluten) Werthe 0 und 1 zu vertheilen. Wollte man aber auch nur Einmal dem Cosinus den kleineren Werth, 0, geben, um die reelle Bahn zu verlassen, so würde im Nenner des Ausdrucks (VII.)

ein Factor verschwinden und die Formel unbrauchbar machen. Es bleibt also in diesem Falle nur die *reelle* Vieldeutigkeit übrig. — Wenn dagegen $k=1$ ist, so sind alle $\sin\lambda_r = \sin\varLambda_r$. Wenn man nun an irgend einer Stelle nicht auch (den absoluten Werthen nach) $\sin\frac{1}{2}\lambda_r = \sin\frac{1}{2}\varLambda_r$ und $\cos\frac{1}{2}\lambda_r = \cos\frac{1}{2}\varLambda_r$ machen, sondern also $\sin\frac{1}{2}\lambda_r = \cos\frac{1}{2}\varLambda_r$ und $\cos\frac{1}{2}\lambda_r = \sin\frac{1}{2}\varLambda_r$ setzen wollte, so würde man erhalten $\sin\lambda_{r+1} = \sin\varLambda_{r+1} = 1$; hiermit hätte man nun für die Sinus und Cosinus der halbirten Winkel nicht ein Paar aus verschiedenen Werthen, sondern gleiche Werthe $\frac{1}{\sqrt{2}}$, und eben diesen Zahlenwerth würden auch die (Sinus und) Cosinus der Hälften aller späteren λ und $\varLambda$ annehmen, womit der Ausdruck (VII.) divergiren würde*). Man ist also im gegenwärtigen Falle genöthigt, die doppelte Alternative, welche sonst an jeder Stelle bei dem Uebergang von $\sin\lambda$, $\sin\varLambda$ zu den Sinus und Cosinus der halben Winkel offen steht, auf eine *einfache* zu reduciren, da man überall bei $\varLambda$ in gleichem Sinne wie bei λ disponiren muss. Darnach behält der Ausdruck (abgesehen vom Doppelzeichen des Ganzen) einen einzigen reellen Werth, der sich ergiebt, wenn man überall die absoluten Werthe von $\cos\frac{1}{2}\lambda$, $\cos\frac{1}{2}\varLambda$ grösser nimmt als die der Sinus; die einfach unendliche Vieldeutigkeit liegt hier ganz in *imaginärer* Richtung, weil man in diese sofort einlenkt, sowie auch nur Einmal der $\cos\frac{1}{2}\lambda$, $\cos\frac{1}{2}\varLambda$ kleiner gewählt wird, als der zugehörige Sinus. Die Identificirung der für die beiden Grenzfälle giltigen Werthe mit den Formeln (II.) und (III.) lasse ich bei Seite. —

6.

Da unser Product sehr geeignet scheint, bei der wirklichen Berechnung elliptischer Integrale gute Dienste zu leisten, so füge ich noch ein paar Bemerkungen bei über seine vortheilhafteste Benützung. Ich setze dabei voraus, dass man auf dem reellen Wege geblieben ist, und habe zunächst den Fall im Auge, bei welchem alle $\cos\frac{1}{2}\lambda$, $\cos\frac{1}{2}\varLambda$ grösser genommen werden als die Sinus, — wie dies ja wenigstens von gewisser Stelle an immer, — bei der Berechnung des primären Werthes des Integrals aber schon von Anfang an der Fall sein wird. Es sei zuerst erwähnt, dass man numerisch die consecutiven λ, $\varLambda$, statt aus den Relationen (VI.), vortheilhafter aus folgenden gleichgeltenden berechnen wird:

---

*) Der Grenzfall $k=1$ bildet nehmlich für unseren Convergenzbeweis eine Ausnahme, weil hier k und $1:\sqrt{1+k'^2}$ nicht echte Brüche sind, wie bei der Erörterung von Fall I. und III. vorausgesetzt.

$$\sin\lambda_1 = \frac{\sin\lambda}{2\cos\frac{1}{2}\lambda\cos\frac{1}{2}\varLambda}, \qquad \sin\varLambda_1 = \frac{\sin\varLambda}{2\cos\frac{1}{2}\lambda\cos\frac{1}{2}\varLambda},$$

$$\sin\lambda_2 = \frac{\sin\lambda_1}{2\cos\frac{1}{2}\lambda_1\cos\frac{1}{2}\varLambda_1}, \qquad \sin\varLambda_2 = \frac{\sin\varLambda_1}{2\cos\frac{1}{2}\lambda_1\cos\frac{1}{2}\varLambda_1},$$

etc. | etc.

(wobei immer $\sin\varLambda_r = k\sin\lambda_r$); denn die Producte $\cos\frac{1}{2}\lambda\,\cos\frac{1}{2}\varLambda$ werden ohnedies gebraucht, und man hat bei dieser Art vorzugehen zu den kleinen Winkeln immer nur Logarithmen der Cosinus, nicht der Sinus, aufzuschlagen, braucht daher auch die Winkel λ_r, $\varLambda_r$ selbst nur mit dem mässigen Grade von Genauigkeit anzuschreiben, welcher hierzu ausreicht.

Man bemerkt ferner, dass das Product $\cos\frac{1}{2}\lambda\,\cos\frac{1}{2}\varLambda$ unter Voraussetzung unserer Dispositionsweise eine gerade Function von λ ist, deren Reihenentwicklung mit dem Gliede 1 beginnt. Dieselbe Function ist $\cos\frac{1}{2}\lambda_1\cos\frac{1}{2}\varLambda_1$ von der Grösse λ_1; da nun diese letztere selbst eine ungerade Function von λ ist, deren Reihenentwicklung anfängt mit $\frac{1}{2}\lambda$, so ist klar, dass, wenn man Alles nach steigenden Potenzen von λ entwickelt denkt, in dem Ausdrucke von $\cos\frac{1}{2}\lambda_1\cos\frac{1}{2}\varLambda_1$ der Werth des zunächst auf 1 folgenden Gliedes zweiter Ordnung $\frac{1}{4}$ vom Werthe des analogen Gliedes in $\cos\frac{1}{2}\lambda\cos\frac{1}{2}\varLambda$ sein wird; und eben dieses Verhalten wird sich wiederholen, wenn man, nach λ_1 entwickelnd, die Producte $\cos\frac{1}{2}\lambda_1\cos\frac{1}{2}\varLambda_1$ und $\cos\frac{1}{2}\lambda_2\cos\frac{1}{2}\varLambda_2$ mit einander vergleicht, u. s. w. Hiernach wird sich $\cos\frac{1}{2}\lambda_1\cos\frac{1}{2}\varLambda_1$ von $\sqrt[4]{\cos\frac{1}{2}\lambda\cos\frac{1}{2}\varLambda}$ erst in den Gliedern vierter Ordnung unterscheiden; ebenso $\cos\frac{1}{2}\lambda_2\cos\frac{1}{2}\varLambda_2$ von $\sqrt[4]{\cos\frac{1}{2}\lambda_1\cos\frac{1}{2}\varLambda_1}$, u. s. w. Es drängt sich daher die Bemerkung auf, dass die Factoren unseres unendlichen Productes viel rascher als in der ersten Form gegen 1 convergiren werden, wenn man den Ausdruck so schreibt:

$$\text{(VIII.)}\quad F(\lambda) = \frac{\sin\lambda}{(\cos\frac{1}{2}\lambda\cos\frac{1}{2}\varLambda)^{1+\frac{1}{3}}}\;\frac{(\cos\frac{1}{2}\lambda\cos\frac{1}{2}\varLambda)^{\frac{1}{3}}}{(\cos\frac{1}{2}\lambda_1\cos\frac{1}{2}\varLambda_1)^{1+\frac{1}{3}}}\;\frac{(\cos\frac{1}{2}\lambda_1\cos\frac{1}{2}\varLambda_1)^{\frac{1}{3}}}{(\cos\frac{1}{2}\lambda_2\cos\frac{1}{2}\varLambda_2)^{1+\frac{1}{3}}}\cdots,$$

indem jetzt die Logarithmen der einzelnen Brüche (abgesehen vom ersten) Grössen vierter Ordnung sind, statt solche der zweiten. Daraus ergiebt sich ferner, dass, wenn man nicht gar zu frühe abbricht, jetzt jeder folgende Logarithmus von dem vorausgehenden nahezu $\frac{1}{16}$ sein wird (weil im ersten Gliede seiner Entwicklung $(\frac{1}{2}\lambda_r)^4$ an die Stelle von λ_r^4 tritt). Bricht man also ab hinter einem Factor, dessen Logarithmus bereits klein ist, so wird jetzt die Summe der Logarithmen aller folgenden nur nahe $\frac{1}{15}$ vom zuletzt berücksichtigten Logarithmus betragen statt nahe $\frac{1}{3}$ wie in der ursprünglichen Form

des Productes. Man kann dies Verfahren, die Convergenz des Productes zu steigern, wiederholt anwenden, und dadurch für Fälle, in welchen sehr grosse Genauigkeit gefordert wäre, die Abweichungen der einzelnen Factoren von 1, oder die Logarithmen dieser Factoren, zu kleinen Grössen beliebig hohen Grades machen, die von Glied zu Glied abnehmen nahezu wie die entsprechend hohen Potenzen von $\frac{1}{2}$. Denn schreibt man z. B. unser Product in der ihm zuletzt gegebenen Gestalt der Kürze wegen so:

$$F(\lambda) = \frac{\sin\lambda}{(\cos\frac{1}{2}\lambda\cos\frac{1}{2}\varDelta)^{1+\frac{1}{3}}} P_1 P_2 P_3 \ldots,$$

so ist, wie bereits erörtert, in seinem Hauptgliede 4ter Ordnung schon $\log P_2$ übereinstimmend mit $\frac{1}{16}\log P_1 = \log \sqrt[16]{P_1}$; ebenso $\log P_3$ mit $\log\sqrt[16]{P_2}$ u. s. w.; stellt man daher das Product jetzt so:

$$\text{(IX.)} \qquad F(\lambda) = \frac{\sin\lambda\, P_1^{1+\frac{1}{15}}}{(\cos\frac{1}{2}\lambda\cos\frac{1}{2}\varDelta)^{1+\frac{1}{3}}} \, \frac{P_2^{1+\frac{1}{15}}}{P_1^{\frac{1}{15}}} \, \frac{P_3^{1+\frac{1}{15}}}{P_2^{\frac{1}{15}}} \cdots,$$

so sind nun die Logarithmen der einzelnen Factoren, sobald man weit genug gegangen ist, nur mehr kleine Grössen sechster Ordnung, und jeder folgende (weil in ihm $\lambda_{r+1} = \frac{1}{2}\lambda_r + \cdots$ an die Stelle von λ_r im vorausgehenden tritt) ist dann nur mehr nahe $\frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$ von dem vorausgehenden, u. s. w. Man sieht, dass diese Art der Transformation (die mit ähnlichem Nutzen bei unseren Gleichungen (II.) bis (IV.) vorgenommen werden kann, und deren Analogon auch bei unendlichen Reihen wie z. B. der oben angeführten für $F(\lambda) - E(\lambda)$ häufig gute Dienste leistet) sich so weit treiben lässt, als man will, jedesmal mit dem Erfolge, den Grad kleiner Grössen, welchem die Logarithmen der Factoren noch angehören, um zwei Einheiten zu steigern. Dies Verfahren bietet sich hier ganz von selbst dar; es steht übrigens in einer inneren Verwandtschaft mit der von Herrn *Schellbach* §. 160 seines Buches zu ähnlichem Zwecke angewandten *Stirling*schen Interpolation. — Ich führe noch, zu besserer Uebersicht über den Grad der Convergenz unserer Ausdrücke, die wichtigsten Zahlen für ein Beispiel an, welches dem eben genannten Autor entlehnt ist, die Berechnung nehmlich des Werthes von $F(\lambda)$ bei $k = \sin 75^0 = 0{,}9659\ldots$ und $\lambda = 47^0$. Man findet hier:

Index	log sin λ	log sin $\varLambda$	log sec $\frac{1}{2}\lambda$ sec $\frac{1}{2}\varLambda$
0	9.864 1275	9.849 0713	0.071 9013
1	9.634 9988	9.619 9426	0.021 0107
2	9.354 9795	9.339 9235	0.005 4843
3	9.059 4338	9.044 3776	0.001 3864
4	8.759 7902	8.744 7340	0.000 3476
5	8.459 1078	8.444 0516	0.000 0869

Da der Logarithmus des letzten der Producte bereits auf 7 Decimalen genau $\frac{1}{4}$ des vorausgehenden ist, so braucht man, um die mit den angewandten Tafeln erreichbare Genauigkeit vollständig zu erhalten, nur bis zu dem Factor $\sec\frac{1}{2}\lambda_4 \sec\frac{1}{2}\varLambda_4$ zu gehen und gemäss dem asymptotischen Gesetze dieser Factoren für die Summe der Logarithmen der späteren $\frac{1}{3}$ vom Logarithmus jenes letzten noch beizufügen. Man findet so

$$\log F(\lambda) = 9.9643737-10,$$

mit dem strengen Werthe, welcher nach *Schellbach* ist 9.9643738, noch genauer übereinstimmend, als sich in Folge der nothwendigen Unsicherheit der letzten Stelle erwarten liess. Würde man schon mit dem von λ_3, $\varLambda_3$ abhängigen Factor endigen, so fände man 9.9643723. Noch rascher wird natürlich die Annäherung, wenn man statt (VII.) eine der transformirten Gleichungen (VIII.) oder (IX.) anwendet; bei dem Gebrauche der ersteren werden die Logarithmen der consecutiven Factoren ähnlicher Bildung:

$$\begin{array}{r} 0.004\ 0472 \\ 3088 \\ 204 \\ 14, \end{array}$$

und da hier noch $\frac{1}{15}$ des letzten als Correction für die späteren Factoren hinzukommt, so erhält man, wenn bis λ_4, $\varLambda_4$ fortgegangen ist,

$$9.9643738,$$

zufällig *genau* richtig; hat man dagegen nur bis λ_3, $\varLambda_3$ gerechnet, so findet sich 9.9643737, und wenn man schon mit λ_2, $\varLambda_2$ endigt 9.9643725. — Wenn man endlich die Form (IX.) benutzt, so nehmen die Logarithmen der sich analogen Factoren ab nach der noch weit rascheren Progression

$$\begin{array}{r} 0.000\ 0596 \\ 14 \\ -1, \end{array}$$

und man findet, wenn die Rechnung bei λ_4, Λ_4 beendigt wurde, 9.9643738; bricht man mit Index 3 ab, so erhält man die Ziffer 9 statt 8 in der letzten Stelle, und wenn man schon nach λ_2, Λ_2 abschliesst, d. h. nachdem von den sich analogen Factoren nur der *erste* berechnet ist (wobei man dann hier $\frac{1}{63}$ seines Logarithmus als Ergänzung beizufügen hat), so kommt 9.9643734. Genau denselben Werth hat das von Herrn *Schellbach* a. a. O. besprochene Verfahren *mit Hilfe der Stirlingschen Interpolation* erst durch eine λ_4 noch einschliessende Rechnung ergeben.

München, 1871.

Note sur la surface du quatrième ordre douée de seize points singuliers et de seize plans singuliers.

(Par M. *A. Cayley* à Cambridge.)

L'équation de M. *Kummer* se transforme sans difficulté en celle-ci

$$\sqrt{\alpha x\left(\gamma'\gamma''y-\beta'\beta''z-\frac{w}{\alpha}\right)}+\sqrt{\beta y\left(\alpha'\alpha''z-\gamma'\gamma''x-\frac{w}{\beta}\right)}+\sqrt{\gamma z\left(\beta'\beta''x-\alpha'\alpha''y-\frac{w}{\gamma}\right)}=0$$

où

$$\alpha+\beta+\gamma=0,\quad \alpha'+\beta'+\gamma'=0,\quad \alpha''+\beta''+\gamma''=0.$$

Or cette équation rendue rationnelle prend, après toutes les réductions nécessaires, la forme suivante:

$$\begin{aligned} & w^2(x^2+y^2+z^2-2yz-2zx-2xy)\\ & +2w\,(\alpha\alpha'\alpha''(y^2z-yz^2)+\beta\beta'\beta''(z^2x-zx^2)+\gamma\gamma'\gamma''(x^2y-xy^2)+\theta xyz)\\ & +(\alpha\alpha'\alpha''yz+\beta\beta'\beta''zx+\gamma\gamma'\gamma''xy)^2 = 0,\end{aligned}$$

où, pour abréger, l'on a écrit

$$\begin{aligned}\theta &= (\beta-\gamma)\,\alpha'\alpha''+(\gamma-\alpha)\,\beta'\beta''+(\alpha-\beta)\,\gamma'\gamma''\\ &= (\beta'-\gamma')\,\alpha''\alpha+(\gamma'-\alpha')\,\beta''\beta+(\alpha'-\beta')\,\gamma''\gamma\\ &= (\beta''-\gamma'')\alpha\,\alpha'+(\gamma''-\alpha'')\beta\,\beta'+(\alpha''-\beta'')\gamma\,\gamma'\\ &= -\tfrac{1}{3}\{(\beta-\gamma)(\beta'-\gamma')(\beta''-\gamma'')+(\gamma-\alpha)(\gamma'-\alpha')(\gamma''-\alpha'')+(\alpha-\beta)(\alpha'-\beta')(\alpha''-\beta'')\},\end{aligned}$$

l'identité de ces différentes valeurs de θ étant facile à vérifier.

En représentant par $Aw^2+2Bw+C=0$ la forme rationnelle de l'équation de la surface on trouve pour le discriminant $AC-B^2$ de cette équation du second degré en w la valeur

$$AC-B^2 = 4\alpha\alpha'\alpha''\beta\beta'\beta''\gamma\gamma'\gamma''\,xyz\left(\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}\right)\left(\frac{x}{\alpha'}+\frac{y}{\beta'}+\frac{z}{\gamma'}\right)\left(\frac{x}{\alpha''}+\frac{y}{\beta''}+\frac{z}{\gamma''}\right).$$

L'équation de la surface rendue rationnelle est symétrique par rapport aux trois systèmes de quantités (α,β,γ), (α',β',γ'), $(\alpha'',\beta'',\gamma'')$; la forme irrationnelle de la même équation peut donc être présentée de trois manières différentes, savoir:



$$\sqrt{\alpha x\left(\gamma'\gamma''y-\beta'\beta''z-\frac{w}{\alpha}\right)}+\sqrt{\beta y\left(\alpha'\alpha''z-\gamma'\gamma''x-\frac{w}{\beta}\right)}+\sqrt{\gamma z\left(\beta'\beta''x-\alpha'\alpha''y-\frac{w}{\gamma}\right)} = 0,$$

$$\sqrt{\alpha' x\left(\gamma''\gamma y-\beta''\beta z-\frac{w}{\alpha'}\right)}+\sqrt{\beta' y\left(\alpha''\alpha z-\gamma''\gamma x-\frac{w}{\beta'}\right)}+\sqrt{\gamma' z\left(\beta''\beta x-\alpha''\alpha y-\frac{w}{\gamma'}\right)} = 0,$$

$$\sqrt{\alpha'' x\left(\gamma\gamma' y-\beta\beta' z-\frac{w}{\alpha''}\right)}+\sqrt{\beta'' y\left(\alpha\alpha' z-\gamma\gamma' x-\frac{w}{\beta''}\right)}+\sqrt{\gamma'' z\left(\beta\beta' x-\alpha\alpha' y-\frac{w}{\gamma''}\right)} = 0,$$

et l'on voit de plus que les équations des seize plans singuliers sont

$$x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad w=0,$$

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=0,\quad \frac{x}{\alpha'}+\frac{y}{\beta'}+\frac{z}{\gamma'}=0,\quad \frac{x}{\alpha''}+\frac{y}{\beta''}+\frac{z}{\gamma''}=0,$$

$$\gamma'\gamma''y-\beta'\beta''z-\frac{w}{\alpha}=0,\quad \alpha'\alpha''z-\gamma'\gamma''x-\frac{w}{\beta}=0,\quad \beta'\beta''x-\alpha'\alpha''y-\frac{w}{\gamma}=0,$$

$$\gamma''\gamma y-\beta''\beta z-\frac{w}{\alpha'}=0,\quad \alpha''\alpha z-\gamma''\gamma x-\frac{w}{\beta'}=0,\quad \beta''\beta x-\alpha''\alpha y-\frac{w}{\gamma'}=0,$$

$$\gamma\gamma' y-\beta\beta' z-\frac{w}{\alpha''}=0,\quad \alpha\alpha' z-\gamma\gamma' x-\frac{w}{\beta''}=0,\quad \beta\beta' x-\alpha\alpha' y-\frac{w}{\gamma''}=0,$$

les quantités α, β, γ, etc. étant liées entre elles par les trois équations

$$\alpha+\beta+\gamma=0,\quad \alpha'+\beta'+\gamma'=0,\quad \alpha''+\beta''+\gamma''=0.$$

Voilà ce me semble la forme la plus simple pour l'équation de cette surface.

Cambridge, le 23 février 1871.

Notiz zu dem Aufsatze: Beweis, dass eine für jeden reellen Werth von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Function $f(x)$ sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen lässt. Bd. 72, Seite 139 dieses Journals.

(Von Herrn *G. Cantor* in Halle.)

Im Folgenden will ich einige Bemerkungen dem obigen Aufsatze hinzufügen.

Durch die erste *) wird der Beweis, welchen ich a. a. O. für die Eindeutigkeit trigonometrischer Reihendarstellungen versuche, in gewisser Beziehung vereinfacht, indem er von dem für das Gebiet dieser Untersuchungen merkwürdigen Satze, welchen ich in einer vorhergehenden Arbeit aufstelle und streng beweise, unabhängig gemacht wird.

Unter u irgend eine feste Grösse verstehend, setze man in der Gleichung:

$$(1.)\qquad 0 = C_0 + C_1 + C_2 + \cdots$$

für x einmal $u+x$, das andere Mal $u-x$ und addire beide Gleichungen. Man erhält dadurch eine neue:

$$(1'.)\qquad 0 = e_0 + e_1 \cos x + e_2 \cos 2x + \cdots,$$

von welcher die Gültigkeit für jeden Werth von x eine unmittelbare Folge der unbeschränkten Gültigkeit von (1.) ist, die vorausgesetzt wurde. — Die Coefficienten von (1'.) $e_n = c_n \sin nu + d_n \cos nu$ werden aber mit wachsendem n schon aus dem Grunde unendlich klein, weil sie mit den Gliedern C_n von (1.), wenn in ihnen x gleich u gesetzt wird, übereinstimmen.

Werden daher die Schlüsse, welche im Aufsatze sich auf die Gleichung (1.) beziehen, ohne Aenderung auf (1'.) bezogen, so erhält man:

$$e_n = c_n \sin nu + d_n \cos nu = 0,$$

und man schliesst sodann, wegen der Willkürlichkeit der Grösse u auf das Verschwinden der Coefficienten c_n, d_n.

---

*) Ich verdanke sie einer gefälligen, mündlichen Mittheilung des Herrn Professor *Kronecker*.

Die zweite Bemerkung bezieht sich auf eine gewisse Erweiterung des die Eindeutigkeit betreffenden Satzes. So wie derselbe im Aufsatze bewiesen ist, lässt er sich wie folgt ausdrücken:

„Hat man *eine für jeden Werth* von x gültige, d. h. convergente Darstellung des Werthes Null durch eine trigonometrische Reihe (1.), so sind die Coefficienten c_n, d_n dieser Darstellung gleich Null".

Es lassen sich nun hierbei die Voraussetzungen in dem Sinne modificiren, dass man für gewisse Werthe von x entweder die Darstellung der Null durch (1.) oder die Convergenz der Reihe aufgiebt.

Sei $\dots x_{-1}, x_0, x_1, \dots$ die unendliche Werthreihe von x, (der Grösse nach mit dem Index steigend) für welche entweder die Convergenz der Reihe (1.) aufhört oder die rechte Seite einen von Null verschiedenen Werth annimmt, und seien die x_ν an die Beschränkung gebunden, in endlichen Intervallen in *nur endlicher Anzahl* vorzukommen; es geht alsdann aus dem Aufsatze hervor, dass die dort mit $F(x)$ bezeichnete Function in jedem Intervalle $(x_\nu \dots x_{\nu+1})$ einer linearen Function $k_\nu x + l_\nu$ gleich ist; und bleibt daher nur die Identität dieser linearen Functionen darzuthun, um die weiteren Schlüsse im Aufsatze auf $F(x)$ anwenden zu können, welche zum Verschwinden der Coefficienten c_n, d_n führen.

Dieser Nachweis der Identität geschieht für je zwei benachbarte Functionen $k_\nu x + l_\nu$, $k_{\nu+1} x + l_{\nu+1}$ und damit für alle durch das nämliche Verfahren, welches Herr Professor *Heine* bei einer analogen Frage in der Abhandlung: „Ueber trigonometrische Reihen", Bd. 71, Seite 353 dieses Journals einführt; man hat nur die Stetigkeit der Function $F(x)$, sowie den zweiten *Riemann*schen Satz in dessen Abhandlung (S. *Riemann*, über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe, Abh. d. Göttinger Gesellsch. Bd. 13) für den Werth $x_{\nu+1}$ von x in Betracht zu ziehen; man findet:

$$F(x_{\nu+1}) = k_\nu x_{\nu+1} + l_\nu \text{ und } \lim \frac{x_{\nu+1}(k_{\nu+1}-k_\nu) + l_{\nu+1} - l_\nu + \alpha(k_{\nu+1}-k_\nu)}{\alpha} = 0 \text{ für } \lim \alpha = 0,$$

was nur möglich ist, wenn $k_\nu = k_{\nu+1}$ und $l_\nu = l_{\nu+1}$. —

Diese Erweiterung des Satzes ist keineswegs die letzte; es ist mir gelungen, eine ebenfalls auf strengem Verfahren beruhende um Vieles weiter gehende Ausdehnung desselben zu finden, welche ich bei Gelegenheit mittheilen werde.

Schliesslich sei mir gestattet einen *Ausdruck* in der hier besprochenen Arbeit zu verändern.

Ich führe daselbst in einer Note den Satz an:

„Eine in einem Intervalle $(a \dots b)$ (incl. der Grenzen) der reellen Veränderlichen x gegebene, stetige Function $\varphi(x)$ erreicht das *Maximum* g der Werthe, welche sie annehmen kann, zum Mindesten für einen Werth x_0 der Veränderlichen, so dass $\varphi(x_0) = g$."

Ich verstand hierbei, wie aus dem Sinne hervorgeht, unter *Maximum* nicht den gewöhnlich mit diesem Worte verbundenen Begriff (in welchem das Erreichtwerden schon liegt), sondern die *obere Grenze* der Functionswerthe von $\varphi(x)$; und es würde dem entsprechend auch der letzte Ausdruck vorzuziehen sein. —

Aus dem Begriffe einer in einem endlichen Bereiche *gegebenen* (definirten) *Werthmenge* wird gefolgert, dass dieselbe stets eine obere Grenze besitzt, *d. i. eine Grösse g, welche eine solche Beziehung zur Werthmenge hat, dass bei beliebig angenommener positiver Grösse ε zum wenigsten ein Werth der Menge vorhanden ist, der grösser als $g-\varepsilon$ und kleiner oder gleich g ist, dass es aber keinen Werth der Menge giebt, welcher grösser wäre als g.* —

Nimmt man beispielsweise die Werthmenge, welche aus sämmtlichen Werthen einer in einem Intervalle $(a \dots b)$ (mit Einschluss der Grenzen) gegebenen, endlichen, eindeutigen Function $\varphi(x)$ besteht, so hat also diese Werthmenge eine obere Grenze g. Fügt man noch die Bedingung der durchgängigen Stetigkeit von $\varphi(x)$ hinzu, so folgert man weiter, dass die obere Grenze g von der Function auch erreicht wird, d. h. dass es einen Werth x_0 von x giebt, für welchen $\varphi(x_0) = g$. Dies ist der Sinn des angeführten Satzes, im Einklange mit der für ihn angeführten Quelle. —

Berlin, d. 6. Januar 1871.

Druckfehler.

In dem Aufsatze: Ueber einen die trigonometrischen Reihen betreffenden Lehrsatz Bd. 72 S. 130 dieses Journals

Seite 133 Z. 4 v. oben statt $(\Omega w - 2g - 1) < \frac{1}{4}$, lese man $(\Omega v - 2g - 1) < \frac{1}{4}$

- - Z. 5 - - - $(\Omega x - (2h+1)) < \frac{1}{8}$, - - $(\Omega w - 2h - 1) < \frac{1}{8}$.

Ueber eine eigenthümliche Form von Functionen einer complexen Variabeln und über transcendente Gleichungen, die keine Wurzeln haben.

(Vorgetragen in der Sitzung der math.-phys. Klasse der K. Bayr. Akademie d. W. am 6. März 1869.)

(Von Herrn *Ludwig Seidel* in München.)

1.

Im Folgenden bezeichnet einfach

$$\lim G$$

die Grenze, welcher sich eine von n abhängige Grösse G_n dann nähert, wenn das reell und positiv gedachte n über alle Grenzen wächst. Die Voraussetzung der Existenz einer solchen Grenze schliesst in sich die andere, dass es gleichgültig ist, ob n continuirlich oder discontinuirlich, z. B. durch ganze Zahlen fortschreitend, ohne Ende wächst; man kann daher $\lim G$ nach Belieben sofort durch eine der gewöhnlichen unendlichen Formen darstellen, z. B. als Reihe

$$\lim G = G_0 + (G_1 - G_0) + (G_2 - G_1) + \cdots$$

oder als Integral

$$\lim G = G_a + \int_a^\infty \frac{\partial G_n}{\partial n} dn$$

(vorausgesetzt, dass $\frac{\partial G_n}{\partial n}$ zwischen den positiven Grenzen a und ∞ eine continuirliche Function von n bleibt) u. s. w.; man könnte sonach im Folgenden, wo wir uns an die zuerst aufgestellte Schreibweise halten, dieselbe nach Belieben durch eine der anderen Formen ersetzen. Enthält G neben dem reellen n noch eine als complex angenommene Variable $x = u + vi = re^{\omega i}$, so wird übrigens $\lim G$ im Allgemeinen als eine transcendente Function von x anzusehen sein, auch wenn G_n diese Grösse nur algebraisch enthält.

2.

Nimmt man

$$\text{(I.)} \qquad G_n = \frac{n}{n + x^n},$$

so ist $\lim G = 1$ für alle x, deren Modul („absoluter Werth") $r \leqq 1$ ist, dagegen gleich Null für alle x, deren $r > 1$ *). Wenn man also für die Unbekannte x die Gleichung statuirt, nach welcher $\lim G$ irgend etwas anderes als Null oder Eins sein soll, so hat dieselbe *gar keine* Wurzel der complexen Form $u + vi$, *obgleich der Ausdruck* $\lim G$ *für alle* x *dieser Form endlich bestimmt ist.* Ich weiss nicht, ob man auf die Existenz derartiger transcendenter Gleichungen, welche sich der Analogie der algebraischen sowie derjenigen zahlreicher anderer transcendenter Gleichungen entziehen, schon geachtet hat. In unserem Beispiele könnte das spurlose Verschwinden aller Wurzeln für $n = \infty$ auf den ersten Anblick auffallen, da für jedes endliche n die Gleichung n Wurzeln hat: die Grenzen der Wurzeln der Gleichung $G_n = a$ sind hier nicht Wurzeln der Grenzgleichung $\lim G = a$, was sich durch den Umstand erklärt, dass sie im letzteren Ausdrucke auf unendlich hoher Potenz erscheinen. Wollte man übrigens $\lim G$ nicht als eine echte Function von x anerkennen, weil jene Grösse sich im Allgemeinen als Constante verhält und nur an der Peripherie des Kreises $r = 1$ springt, so liesse sich sofort etwa

$$\psi x + (\varphi x - \psi x) \lim G$$

an ihre Stelle setzen: dieser Ausdruck ist φx für $r \leqq 1$ und ψx für $r > 1$, er kann also keinem Werthe gleich gemacht werden, der so beschaffen ist, dass φx für kein $r \leqq 1$ und ψx für kein $r > 1$ ihn annimmt. Die durch den neuen Ausdruck repräsentirte, im Allgemeinen mit x überall veränderliche Function wird noch, wenn φx und ψx Functionen gewöhnlicher Art sind, bei $r = 1$ discontinuirlich sein, weil für solche Functionen nicht allgemein $\varphi(1 . e^{\omega i}) = \psi(1 . e^{\omega i})$ sein kann, ohne dass überhaupt $\varphi(re^{\omega i}) = \psi(re^{\omega i})$ wird; aus dem weiter Folgenden wird man indess entnehmen, dass auch Ausdrücke für *durchaus* continuirliche Functionen sich bilden lassen, die für keinen complexen Werth von x versagen, und doch gewisse, z. B. negative Werthe gar nie annehmen können.

Da, wo in der elementaren Mathematik die Frage nach den Quadratwurzeln negativer Zahlen zuerst auftritt, überzeugt man sich zwar, dass dieselben in dem vorher aufgestellten Gebiete der positiven und negativen Zahlen sich nicht finden, aber nicht, dass es ein Unsinn ist, sie zu postuliren. Ihre Definition durch dieses Postulat und ihre Einführung in die Rechnung hat sich

---

*) Der einfachere Ausdruck, bei welchem im Zähler und im ersten Gliede des Nenners 1 statt n gesetzt ist, wird hier vermieden wegen der Unbestimmtheit seines imaginären Bestandtheiles für $r = 1$.

denn auch als statthaft und sehr erfolgreich erwiesen. Nachdem sich nun zeigt, dass transcendente Gleichungen sich aufstellen lassen, die auch in dem erweiterten Felde des Complexen keine Wurzeln finden, so könnte man sich wohl denken, dass irgend eine Gleichung solcher Art zur Definition eines noch fremden Gebietes von Imaginären benutzt werden könnte, — obgleich bei der nothwendigen Complication der Definitionsgleichung von der Einführung solcher Formen in die Rechnung schwerlich ein umfassender Erfolg sich erwarten liesse. Gewiss ist aber, dass die besondere Transcendente, welche uns hier Gleichungen ohne complexe Wurzeln geliefert hat, zur Definition neuer Imaginären nicht dienen könnte, weil hier die Unmöglichkeit, die betreffende Gleichung zu erfüllen, Folge eines inneren Widerspruches derselben mit sich selbst ist, der deshalb hier vorkommen kann, weil eine Grenzgleichung $\lim G = a$ eigentlich mehrere (unendlich viele) Einzelgleichungen, geltend für die verschiedenen unendlich grossen Zahlen n, in sich enthält. Sollte nehmlich für einen Werth Z, der weder Null noch Unendlich ist, werden

$$\lim \frac{n}{n+x^n} = \frac{1}{1+Z},$$

so müsste man für ein unendliches n mit gleichem Rechte haben

$$\frac{x^n}{n} = Z \quad \text{und} \quad \frac{x^{n+1}}{n+1} = Z;$$

hieraus $x\frac{n}{n+1} = 1$, d. h. $x = 1$, — und da dieser aus dem Postulate nothwendig sich ergebende Werth demselben gleichwohl nicht entspricht, so ist die gestellte Forderung an sich unerfüllbar.

3.

Schreibt man $\frac{x}{\vartheta}$ statt x in unserem Ausdrucke G, wobei ϑ eine reelle positive Grösse vorstellen soll, und nimmt man die Ergänzung zu 1, so erhält man

$$\text{(II.)} \qquad H_n = \frac{x^n}{x^n + n\vartheta^n},$$

und man hat $\lim H = 1$, sofern ϑ kleiner ist, als der Modul r von x, dagegen ist $\lim H = 0$, sowie ϑ den Werth r erreicht oder überschreitet. Die Grösse $\lim H$ kann nun nach Art des *Dirichlet*schen Discontinuitäts-Factors benutzt werden; multiplicirt man sie mit $\frac{\partial f(\vartheta)}{\partial \vartheta}$, welcher Ausdruck eine continuirliche

Function von ϑ sein soll, und integrirt man nach ϑ von Null bis $+\infty$, so hat das Element des Integrals nur so lange nicht verschwindende Werthe, als $\vartheta < r$; man erhält daher

$$\text{(III.)} \quad \int_0^\infty \lim \frac{x^n}{x^n + n\vartheta^n} \frac{\partial f(\vartheta)}{\partial \vartheta} d\vartheta = f(r) - f(0),$$

sodass eine beliebige Function des Moduls r von x als Function von x selbst dargestellt ist. Nimmt man z. B. $f(\vartheta) = \vartheta$, so ergiebt sich

$$\text{(IV.)} \quad r = \operatorname{mod} x = \int_0^\infty \lim \frac{x^n}{x^n + n\vartheta^n} d\vartheta.$$

In gleicher Weise erhält man $r^2 = u^2 + v^2$, indem man setzt $f(\vartheta) = \vartheta^2$, und hiermit findet sich auch zu

$$x = u + vi$$

der conjugirte Werth

$$\text{(V.)} \quad u - vi = 2\int_0^\infty \lim \frac{x^{n-1}\vartheta}{x^n + n\vartheta^n} d\vartheta.$$

Es ist klar, dass nun auch die beiden Bestandtheile von x, u und v, sich einzeln als Functionen von x sofort darstellen lassen, — und hiermit denn weiter, dass mit Hilfe solcher Ausdrücke, wie die hier angewandten, *jede beliebige Function zweier Variabeln u und v als Function der Einen complexen Variabeln $x = u + vi$ sich ausdrücken lässt.*

Bei der Einschränkung des Begriffes der Function einer complexen Variabeln auf dasjenige engere Gebiet, in welchem sich dieser Begriff bereits so fruchtbar erwiesen hat, d. h. bei der Beschränkung auf solche Functionen Fx, welche einen von der „Richtung" der Variation von x unabhängigen Differentialquotienten $\frac{dFx}{dx}$ haben, erscheint bekanntlich weder der Modul von x, noch der conjugirte Werth, noch Eine der beiden Componenten u, v als eine Function von x. Die Kraft mathematischer Ausdrücke in der Darstellung von Functionen reicht, wie man sieht, weit über das Gebiet jenes engeren Begriffes derselben hinaus. Eine Klasse von Formen, welche in gewisser Beziehung etwas Unfügsames haben, scheint gerade hier eine Stelle zu finden, an welcher sie sich nicht ersetzen lassen; denn wenn Fx keinen von der Richtung der Variation von x unabhängigen oder durch x allein ausdrückbaren Differentialquotienten hat, wie dies z. B. bei dem Modul von x der Fall ist, so *muss* jeder mathematische Ausdruck von Fx durch x so beschaffen sein, dass er die Differentiation nach x ausschliesst.

Es sei noch bemerkt, dass man mit Hilfe solcher Ausdrücke wie (IV.) nun auch leicht solche überall continuirliche Functionen zusammensetzen kann, die nicht mehr constant bleiben, während x gewisse Linien und Flächenstücke durchläuft, und deren Werthe gleichwohl die Ebene nur mit Ausschluss gewisser umgrenzter Flächenstücke bedecken. Bezeichnet zum Beispiel a irgend eine positive Grösse, und r den in (IV.) gefundenen Ausdruck von mod x, so wird, während x alle complexen Werthe annimmt, die Function $x+\frac{a}{r}x$ ihrerseits alle denkbaren Werthe erhalten mit Ausnahme solcher, deren Modul kleiner ist als a, d. h. exclusive derjenigen, die einem Kreise zufallen, welcher mit dem Radius a um den Anfangspunkt beschrieben wird. Will man das Integral r im Nenner vermeiden, so wird dasselbe auch geleistet durch die conjugirte Function der vorigen, nehmlich durch $\frac{r^2}{x}+a\frac{r}{x}$, — wo für r^2 das einfache Integral zu setzen ist, welches man, wie bei (IV.) angezeigt, für diese Grösse erhält.

4.

Zu der Formel (III.) lässt sich noch zeigen, dass es erlaubt ist, die Ordnung der beiden durch lim. und durch $\int$ bezeichneten Uebergänge umzukehren, indem zum Beispiel das $\int_0^\infty H_n\,d\vartheta$ bei wachsendem n zu seiner Grenze den Werth $\int_0^\infty \lim H_n\,d\vartheta$ hat, — obgleich es in der Nachbarschaft von $\vartheta=r\sqrt[n]{\frac{1}{n}}$ ein (bei zunehmendem n an Breite abnehmendes) Intervall giebt, in welchem sich H_n von $\lim H_n$ sehr stark unterscheidet. Nur darf nicht, wenn die Veränderung erlaubt sein soll, H_n bei jenem Werthe von ϑ unendlich werden, weil sonst sein Integral aufhört einen endlichen nachweisbaren Werth zu haben; man muss daher, wenn der Richtungscoefficient von x eine Wurzel aus -1 ist, diejenigen Werthe von n überspringen, welche x^n zu einer negativen reellen Grösse machen. — Den ausführlichen Beweis, welcher durch Einschaltung geeigneter Zwischengrenzen in dem nach ϑ genommenen bestimmten Integrale sich führen lässt *), übergehe ich hier um so mehr, da man z. B. die

*) In dem Beweise, welchen ich mir aufgesetzt, habe ich das Integral in fünf einzelne zerlegt, und die inneren Grenzen der beiden äussersten so bestimmt, dass in diesen H_n mit $\lim H$ sehr nahe übereinstimmt, — während die Begrenzung des

Gleichung IV. in ihrer neuen Form

$$r = \mathrm{mod}\, x = \lim \int_0^\infty \frac{x^n\, d\vartheta}{x^n + n\vartheta^n} = \lim \int_0^\infty \frac{x^n\, d\vartheta}{x^n + \vartheta^n}$$

für eine ganze Zahl n durch wirkliche Herstellung des Integrals leicht verificiren kann. Es ist nicht ohne Interesse, sich davon näher Rechenschaft zu geben, wie es zugeht, dass dies Integral bei unendlich wachsendem n von dem Richtungscoefficienten der Grösse x unabhängig wird. Von den zweierlei Bestandtheilen, welche die Integrale der einzelnen Partialbrüche, in die complexe Form gebracht, enthalten, heben sich nehmlich die logarithmischen Terme in der Gesammtsumme und nach Substitution der Integrationsgrenzen auf; die Glieder mit den Kreisbogen aber erfordern beim Uebergang zu den Grenzen wegen ihrer vieldeutigen Form eine gewisse Vorsicht. Da der Integrationsweg für ϑ, als reelle Grösse, vorgeschrieben ist, so sind die bestimmten Integrale der einzelnen Partialbrüche frei von jeder Mehrdeutigkeit; man muss für jeden Bogen besonders über das Intervall des Anfangs- und Endwerthes so verfügen, dass von jenem bis zu diesem der Arcus sich ohne Discontinuität ändert, während ϑ die positiven Werthe durchläuft. (Der Fall, in welchem einer der Partialbrüche selbst durch Unendlich geht, ist der von der Betrachtung vorhin ausgeschlossene, für welchen die Umformung der Gleichung (III.) nicht erlaubt ist.) Wenn man, wie schon Anfangs, setzt $x = re^{\omega i}$, so wird bei der zuletzt aufgeführten Form des Integrales der Nenner irgend eines der Partialbrüche sein

$$\vartheta - re^{\omega i + \frac{2t+1}{n}\pi i},$$

wobei t eine der ganzen Zahlen von 0 bis $n-1$ vorstellt; ist nun etwa ω zwischen 0 (inclusive) und 2π (exclusive) genommen worden, so wird bei gehöriger Beachtung der eben bezeichneten Vorsicht im bestimmten Integral der Ausdruck für den Bogen ein *anderer* in den Gliedern, in welchen $\omega + \frac{2t+1}{n}\pi$ den Werth 2π überschreitet, als in den Anfangsgliedern von kleinerem t. Bezeichnet man mit $s-1$ den grössten Werth von t, für welchen noch $\omega + \frac{2t+1}{n}\pi < 2\pi$ ist, so findet man alsdann durch Summation

[illegible] mittelbar um $\vartheta = r$ [illegible] gelegenen Theiles so eng gewählt wurde, dass in ihm H_n mit einer Function von linearem Nenner sich vertauschen liess.

$$\int_0^\infty \frac{x^n\,d\vartheta}{x^n+\vartheta^n} = \frac{r\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}\,e^{\omega i+\frac{2r\pi}{n}i}.$$

Diese Gleichung lässt sich auch so schreiben:

$$\int_0^\infty \frac{x^n\,d\vartheta}{x^n+\vartheta^n} = \frac{r\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}\,e^{\Omega_n i},$$

wenn man mit $n\Omega_n$ den (positiven oder negativen) Rest bezeichnet, welcher sich ergiebt, wenn man von $n\omega$ das *zunächst gelegene* ganze Vielfache von 2π abzieht *); oder noch einfacher so:

$$\int_0^\infty \frac{x^n\,d\vartheta}{x^n+\vartheta^n} = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}\sqrt[n]{x^n},$$

wenn man erklärt, dass unter den n Werthen der Wurzel derjenige genommen werden soll, dessen reeller Bestandtheil möglichst gross ist im algebraischen Sinne. — Man ersieht hieraus, dass das Integral, wie auch x beschaffen sei, nur solche Werthe annimmt, deren Richtungen zwischen $\pm\frac{\pi}{n}$ liegen, indem es immer wieder auf die ersten Werthe zurückspringt, so oft x sich mit $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ multiplicirt. In Folge dieses discontinuirlichen Ganges bedecken die Werthe des Integrales *schon für endliche ganze n,* soweit sie bestimmt und nachweisbar sind, von der ganzen Ebene nur den Sector zwischen den Richtungen $\pm\frac{\pi}{n}$, welchen sie n mal im Sinne der Drehung von x durchlaufen, während dieses Einmal den ganzen Kreis durchläuft. Andrerseits ist zwar für die Werthe x, welche in eine der Richtungen $\frac{\pi}{n}\pm\frac{2r\pi}{n}$ fallen, der Werth des Integrales nicht definirt und kann nicht schlechthin unendlich gesetzt werden, da er unendliche Elemente von beiderlei Vorzeichen in sich schliesst; jedenfalls aber kann er nur reell gedacht werden, da für solche x der Ausdruck gar nichts Imaginäres enthält. Für unsere Anwendung kommen die x der bezeichneten Form deshalb nicht in Betracht, weil, wie oben angeführt, bei gegebenem Werthe von x solche n immer übersprungen werden müssen, welche x^n negativ reell machen würden: die Grenze des Integrales, für $n=\infty$, reducirt sich also auf den blossen Modul r von x in *der* Weise, dass der Spielraum, in welchem der Richtungscoefficient $e^{\Omega_n i}$ variiren konnte, zuletzt unendlich schmal wird. —

*) Der Fall, in welchem diese Erklärung zweideutig wird, ist der ausgeschlossene.

5.

Man kann durch Formen, die unseren $\lim G$, $\lim H$ analog sind, noch mancherlei Functionen besonderer Art darstellen. Als Beispiel sei nur noch angeführt der Ausdruck

$$\lim \frac{n fx}{x^n + x^{-n} + n},$$

der (wenn fx nicht unendlich wird) nicht verschwindende Werthe nur annimmt für diejenigen x, deren Modul gleich 1 ist, die also zu Punkten auf der Peripherie eines gewissen Kreises gehören. Es ist einleuchtend, dass man ähnlich auch solche discontinuirliche Ausdrücke bilden könnte, welche nur längs einer anderen vorgegebenen Linie nicht Null sind, und auf dieser eine gegebene Function repräsentiren.

Ganz verwandter Natur ist die Darstellung der dem absoluten Werthe nach *grössten* unter mehreren Grössen $a, b, c \ldots$ durch Formen wie die folgende

$$\lim \frac{a^{n+1} + b^{n+1} + c^{n+1} + \cdots}{a^n + b^n + c^n + \cdots},$$

oder auch

$$\lim \sqrt[n]{\{a^n + b^n + c^n + \cdots\}},$$

welche man leicht allgemeiner einrichten kann, um auch die zweitgrösste etc. jener Grössen nach Belieben darzustellen. Diese letzten Formen mögen schliesslich noch an den Nutzen erinnern, der eigenthümlicher Weise gerade auf dem Gebiete der *angewandten* Mathematik aus der Einführung von Grenzausdrücken solcher Art schon für die Wissenschaft resultirt hat: *Laplace* hat von solchen (Buch II. Cap. 4. der Théorie des probabilités) eine Anwendung gemacht für die Lösung der Aufgabe, Beobachtungsresultate so auszugleichen, dass der grösste übrig bleibende Fehler möglichst klein wird, und *Gräffe* hat sie mit vorzüglichem Erfolge für die Auflösung numerischer algebraischer Gleichungen verwerthet.

München, im März 1869.

Ueber die Form der Argumente der Thetafunctionen und über die Bestimmung von $\vartheta(0,0,\dots 0)$ als Function der Klassenmoduln.

(Von Herrn *L. Fuchs* in Greifswald.)

Wenn man die Argumente der Thetafunctionen durch gewisse Integrale erster Gattung und die Coefficienten der homogenen Function zweiten Grades durch die Periodicitätsmoduln derselben ersetzt, so hat *Riemann* in seiner Theorie der *Abel*schen Functionen (dieses Journ. B. 54 §. 22) nachgewiesen, dass die dadurch gebildete Function des Ortes in der Fläche T, wenn sie nicht identisch für jeden Punkt verschwindet, für p Punkte unendlich klein erster Ordnung wird, und dass man die Argumente als Functionen der Nullpunkte so darstellen kann, dass die Substitution von p willkürlich gegebenen Punkten für dieselben bewirkt, dass die Thetafunction in den letzteren verschwindet. Die Ausführung dieser Transformation erfordert die Berechnung gewisser ebendaselbst angegebener Integralausdrücke, welche in dem Falle der hyperelliptischen Integrale von Herrn *Carl Neumann* in einer Schrift über *Abel*sche Integrale (Halle 1863) angedeutet und später in seinen „Vorlesungen über die *Riemann*sche Theorie etc." pag. 458—484 ausführlich entwickelt worden ist. Da jedoch in dem allgemeinen Falle die Berechnung jener Integralausdrücke mit grossen Schwierigkeiten verbunden ist, so hat schon *Riemann* ein Mittel dieselbe zu umgehen angedeutet. Als ein solches Mittel erscheint der Satz im §. 23 seiner Theorie, dessen Anwendung jedoch noch auf erhebliche Schwierigkeiten führt. In dem Falle der hyperelliptischen Integrale hat auf einem anderen Wege Herr *Prym* (Theorie der Functionen einer zweiblättrigen Fläche, Zürich 1866, §. 12 und 13) unter Anwendung einiger ihm von *Riemann* mitgetheilten Sätze über Charakteristiken die oben postulirte Form der Argumente der Thetafunctionen mit Umgehung der Integralausdrücke entwickelt.

In dem Werke über *Abel*sche Functionen haben die Herren *Clebsch* und *Gordan* (das. §. 56) die Herstellung der gewünschten Form der Thetaargumente im Wesentlichen auf die Auflösung gewisser algebraischer Glei-

chungen und die Absonderung eines gewissen Systems bevorzugter Wurzeln derselben zurückgeführt. Dieselbe Form hat nach ihnen Herr *H. Weber* (d. J. B. 70 pag. 314 sqq.) mit Hülfe *Riemann*scher Principien verificirt. — Obgleich die Absonderung der bevorzugten Wurzeln unter gegebener Querschnittszerlegung der Fläche T mit erheblichen Schwierigkeiten verknüpft ist, so ist die von den Herren *Clebsch* und *Gordan* angenommene Form der Argumente von weitreichendem Vortheil. Wir wollen dieses hier an dem Beispiel der Bestimmung von $\vartheta(0, 0, \dots 0)$ als Function der Klassenmoduln zeigen, indem wir nachweisen, dass das von Herrn *Thomae* (d. J. B. 66 pag. 95) gefundene Resultat unter Zugrundelegung der *Clebsch-Gordan*schen Form sich wesentlich vereinfacht. — Ehe wir jedoch auf diese Materie eingehen, wollen wir zuerst zeigen, wie man durch Weiterentwickelung des schon oben erwähnten von *Riemann* §. 23 seiner Theorie gegebenen Satzes auf natürlichem Wege zu der Form der Herren *Clebsch* und *Gordan* gelangen kann, und ausserdem über die Absonderung der bevorzugten Wurzeln einige Bemerkungen hinzufügen. — Wir werden die Abhandlung von *Riemann* über *Abel*sche Functionen (d. J. B. 54) kurz als R. A. F. und das Werk der Herren *Clebsch* und *Gordan* kurz als Cl. G. A. F. citiren.

1.

Es sei im Anschluss an die *Riemann*sche Bezeichnungsweise die den *Abel*schen Functionen zu Grunde liegende algebraische Gleichung

$$F(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}) = 0 \quad \text{(R. A. F. §. 5)}$$

und

$$(1.) \quad w_\alpha = \int_\mu^\xi \frac{\varphi_\alpha(\overset{n-2}{s}, \overset{m-2}{z})}{\frac{\partial F}{\partial s}} dz, \quad \alpha = 1, 2, \dots p,$$

wo μ einen festen und ξ einen beweglichen Punkt der Fläche T bedeutet, ein System linear unabhängiger Integrale erster Gattung, wie es (R. A. F. §. 18) definirt ist. Wir setzen

$$(2.) \quad u_\alpha = c_\alpha + w_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots p,$$

wo die c Constanten bedeuten, welche durch die Gleichungen

$$(3.) \quad (p-1) c_\alpha + K_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots p$$

bestimmt sind, wenn K_α den ebenso bezeichneten Ausdruck bei *Riemann* (über das Verschwinden der Thetaf. d. J. B. 65 §. 1) bedeutet, jedoch mit der Abänderung, dass daselbst u durch w zu ersetzen ist.

Es ist alsdann für beliebige $p-1$ Punkte $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{p-1}$

$$\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{\mathfrak{a}}}\left(\sum_{1}^{p-1}{}_{\mathfrak{b}}\, u_{\mathfrak{a}}(\xi_{\mathfrak{b}})\right)\right) = 0,$$

wo $u_{\mathfrak{a}}(\xi_{\mathfrak{b}})$ den Werth bedeutet, welchen $u_{\mathfrak{a}}$ annimmt, wenn ξ in $\xi_{\mathfrak{b}}$ hineinrückt (s. *Riemann* ü. d. V. d. Thetaf. §. 1 und 2). Hieraus folgt, dass

$$(4.)\qquad \vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{\mathfrak{a}}}\left(u_{\mathfrak{a}}(\xi)-\sum_{1}^{p}{}_{\mathfrak{b}}\, u_{\mathfrak{a}}(\xi_{\mathfrak{b}})\right)\right)$$

verschwindet, wenn ξ in einen der Punkte $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_p$ hineinfällt, welches übrigens auch diese Punkte sein mögen.

Sind $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_p$ Punkte, welche mit $p-2$ anderen Punkten durch eine Gleichung $\varphi = 0$ verknüpft sind (R. A. F. §. 16), so verschwindet die Function (4.) identisch in jedem Punkte ξ, und umgekehrt, wenn letzteres stattfindet, so sind $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_p$ mit $p-2$ anderen Punkten durch eine Gleichung $\varphi = 0$ verknüpft. Beides ergiebt sich aus *Riemann* (A. F. §. 24).

2.

Sind $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{2p-2}$ beliebige durch eine Gleichung $\varphi = 0$ verknüpfte Punkte, so ist bei der über $c_{\mathfrak{a}}$ (Gl. (3.) vor. No.) getroffenen Bestimmung nach (R. A. F. §. 23)

$$(1.)\qquad \sum_{1}^{2p-2}{}_{\mathfrak{b}}\, u_{\mathfrak{a}}(\varepsilon_{\mathfrak{b}}) \equiv 0, \qquad \mathfrak{a} = 1, 2, \ldots p,$$

oder wenn wir die Integrationswege in der Fläche T angemessen verlaufen lassen, mit Rücksicht auf Gleichung (2.) vor. No.:

$$(1^a.)\qquad 2(p-1)c_{\mathfrak{a}} + \sum_{1}^{2p-2}{}_{\mathfrak{b}} \int_{\mu}^{\varepsilon_{\mathfrak{b}}} dw_{\mathfrak{a}} = 0, \qquad \mathfrak{a} = 1, 2, \ldots p.$$

Um $(p-1)c_{\mathfrak{a}}$, welches in den Argumenten der Thetafunction auftritt, zu berechnen, ist es zweckmässig diese Gleichung so umzuformen, dass die Division durch 2 ausgeführt werden könne. Zu dem Ende werde ein beliebiges System correspondirender Periodicitätsmoduln

$$\varkappa_{\mathfrak{a}}\pi i + \lambda_1 a_{\mathfrak{a}1} + \lambda_2 a_{\mathfrak{a}2} + \cdots + \lambda_p a_{\mathfrak{a}p} = P_{\mathfrak{a}}(\varkappa, \lambda), \qquad \mathfrak{a} = 1, 2, \ldots p$$

gesetzt, und es werden p Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ derart bestimmt, dass:

$$(2.)\qquad \sum_{1}^{2p-2}{}_{\mathfrak{b}} \int_{\mu}^{\varepsilon_{\mathfrak{b}}} dw_{\mathfrak{a}} + P_{\mathfrak{a}}(\varkappa, \lambda) = 2\sum_{1}^{p}{}_{\mathfrak{c}} \int_{\mu}^{\alpha_{\mathfrak{c}}} dw_{\mathfrak{a}}, \qquad \mathfrak{a} = 1, 2, \ldots p.$$

Dass diese Gleichung lösbar ist, ergiebt sich nach Division durch 2 aus dem

Satze über die Umkehrung der *Abel*schen Integrale. Ist $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ eine Lösung, so folgt aus Gleichung (2.) nach dem Satze über die Umkehrung des *Abel*schen Theorems (s. Cl. G. A. F. §. 62; vergl. auch *Weber* ob. cit. Abh. §. 1), dass eine rationale Function ζ von (s, z) existiren muss, welche für die Punkte ε von der ersten Ordnung, für μ von der zweiten Ordnung unendlich gross, für die Punkte α von der zweiten Ordnung unendlich klein wird, in allen übrigen Punkten aber weder Null noch unendlich ist. Ist daher $as+bz+c$ eine lineare Function von (s, z), die für μ unendlich klein zweiter Ordnung wird, und $\varphi(\overset{n-2}{s}, \overset{m-2}{z})$, diejenige ganze rationale Function, durch welche die Punkte ε mit einander verknüpft sind (R. A. F. §. 16), so wird

$$\zeta.\varphi.(as+bz+c) = \psi$$

für keinen im Endlichen befindlichen Punkt von T unendlich gross, ist demnach eine ganze rationale Function von (s, z), welche für die Punkte α unendlich klein zweiter Ordnung, für die $m+n-2$ (R. A. F. §. 8) Punkte, in denen $as+bz+c$ ausser in μ verschwindet, und für jedes sich aufhebende Paar von Verzweigungspunkten unendlich klein erster Ordnung, also im Ganzen in $2p+2r+m+n-2 = m(n-1)+n(m-1)$ Punkten unendlich klein erster Ordnung wird. Hieraus folgt, dass der Grad von ψ in Bezug auf s und z resp. der $n-1^{\text{te}}$ und $m-1^{\text{te}}$ ist, wie leicht aus (R. A. F. §. 8) folgt.

Nach Analogie der *Riemann*schen Bezeichnung für Punkte, die durch eine Gleichung $\varphi = 0$ verknüpft sind, wollen wir p Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ mit μ *durch eine Gleichung* $\psi_\mu = 0$ *verknüpft* nennen, wenn eine ganze rationale Function $\psi_\mu(\overset{n-1}{s}, \overset{m-1}{z})$ gefunden werden kann, die in $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ unendlich klein zweiter Ordnung wird und überdiess in den sich aufhebenden Verzweigungspunkten und in denjenigen $m+n-2$ Punkten in erster Ordnung verschwindet, worin eine für μ unendlich klein zweiter Ordnung werdende ganze rationale Function ersten Grades von (s, z) noch ausserdem Null wird. Alsdann haben wir den Satz: *Jede Lösung* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ *der Gleichung* (2.) *ist mit* μ *durch eine Gleichung* $\psi_\mu = 0$ *verknüpft.*

Ist umgekehrt $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ ein System von Punkten, die mit μ durch eine Gleichung $\psi_\mu = 0$ verknüpft sind, so ist

$$\zeta = \frac{\psi_\mu}{(as+bz+c)\varphi}$$

eine rationale Function von (s, z) mit den oben angegebenen Eigenschaften,

und daher nach dem *Abel*schen Theorem:

$$(3.)\qquad \sum_1^{2p-2}{}_{\mathfrak{b}}\int_{\mu}^{\varepsilon_{\mathfrak{b}}} dw_{\mathfrak{a}} \equiv 2\sum_1^{p}{}_{\mathfrak{c}}\int_{\mu}^{\alpha_{\mathfrak{c}}} dw_{\mathfrak{a}}, \qquad \mathfrak{a} = 1, 2, \dots p.$$

Hieraus folgt:

$$(4.)\qquad \sum_1^{p}{}_{\mathfrak{c}}\int_{\mu}^{\alpha_{\mathfrak{c}}} dw_{\mathfrak{a}} = \tfrac{1}{2}\sum_1^{2p-2}{}_{\mathfrak{b}}\int_{\mu}^{\varepsilon_{\mathfrak{b}}} dw_{\mathfrak{a}} + \tfrac{1}{2}P_{\mathfrak{a}}(\varkappa, \lambda), \qquad \mathfrak{a} = 1, 2, \dots p,$$

wo $\varkappa$, λ Zahlenwerthe bedeuten, die mod 2 vollkommen bestimmt sind.

Es giebt bekanntlich 2^{2p} incongruente Systeme correspondirender halber Periodicitätsmoduln $\frac{1}{2}P_{\mathfrak{a}}(\varkappa, \lambda)$, welche man dadurch erhält, dass man für $\varkappa_1$, $\varkappa_2, \dots \varkappa_p$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p$ je eine der Zahlen 0 und 1 setzt.

Jedem Systeme von Punkten $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$, die mit μ durch eine Gleichung $\psi_\mu = 0$ verknüpft sind, entspricht vermöge Gleichung (4.) *ein bestimmtes System correspondirender halber Periodicitätsmoduln.*

Das Problem, aus den Gleichungen

$$(5.)\qquad v_{\mathfrak{a}} = \sum_1^{p}{}_{\mathfrak{b}}\int_{\mu}^{\xi_{\mathfrak{b}}} dw_{\mathfrak{a}}, \qquad \mathfrak{a} = 1, 2, \dots p$$

$\xi_1, \xi_2, \dots \xi_p$ zu bestimmen, wird für solche Werthe und nur solche Werthe der $v_{\mathfrak{a}}$ unbestimmt, denen ξ entsprechen, die mit $p-2$ anderen Punkten durch eine Gleichung $\varphi = 0$ verknüpft sind (s. Cl. G. A. F. §. 52). Die Gleichungen (2.) könnten also für ein bestimmtes $P_{\mathfrak{a}}(\varkappa, \lambda)$ nur dann mehr als ein System von Punkten α liefern, wenn ein diesen Gleichungen genügendes System $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$ mit $p-2$ anderen Punkten durch eine Gleichung $\varphi = 0$ verknüpft wäre. Es wäre alsdann, wenn $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$ mit μ durch die Gleichung $\psi_\mu = 0$ verknüpft sind, und $as + bz + c$ in μ unendlich klein zweiter Ordnung wird,

$$\frac{(as + bz + c)\varphi^2}{\psi_\mu}$$

für keinen im Endlichen befindlichen Punkt der Fläche T unendlich gross, also eine ganze rationale Function von (s, z) die in $m(n-2) + n(m-2)$ Punkten unendlich klein ist, also (R. A. F. §. 8) eine Function $\varphi_1(\overset{n-2}{s}, \overset{m-2}{z})$. Diese wird in den $p-2$ Punkten, die mit den α durch die Gleichung $\varphi = 0$ verknüpft sind, und in μ unendlich klein zweiter Ordnung, in den sich aufhebenden Verzweigungspunkten unendlich klein erster Ordnung. Nun kann aber μ so gewählt werden, dass keine Function von der Art $\varphi_1(\overset{n-2}{s}, \overset{m-2}{z})$ für dasselbe unendlich klein zweiter Ordnung wird, was sich aus der oben citirten

Abh. des Herrn *Weber* (§. 3) ergiebt, wenn nicht besondere Beziehungen zwischen den $3p-3$ Moduln der Klasse algebraischer Functionen, welche der Theorie zu Grunde gelegt werden, bestehen.

Man kann also im Allgemeinen μ so wählen, dass keines der Systeme α mit $p-2$ anderen Punkten durch eine Gleichung $\varphi = 0$ verknüpft ist, und demnach *jedem vorgeschriebenen* $P_a(x, \lambda)$ *ein bestimmtes System von Punkten* $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$, *die mit* μ *durch eine Gleichung* $\psi_\mu = 0$ *verknüpft sind, entspricht.*

3.

Aus den Gleichungen (1^a.) und (2.) vor. No. folgt:

$$(1.) \qquad c_a(p-1) = \tfrac{1}{2} P_a(x, \lambda) - \sum_1^p {}_c \int_\mu^{\alpha_c} dw_a, \qquad a = 1, 2, \dots p.$$

Demnach ist

$$(2.) \qquad \vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{a}}\left(u_a(\xi) - \sum_1^p {}_b u_a(\xi_b)\right)\right) = \vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{a}}\left(\int_\mu^\xi dw_a - \sum_1^p {}_b \int_{\alpha_b}^{\xi_b} dw_a - \tfrac{1}{2} P_a(x, \lambda)\right)\right).$$

Das Argument auf der rechten Seite dieser Gleichung hat die Form, auf welche die Herren *Clebsch* und *Gordan* (A. F. §. 56) dasselbe gebracht haben. Um die Uebereinstimmung deutlicher hervortreten zu lassen, bemerken wir Folgendes: Eine Curve

$$(3.) \qquad \psi(\overset{n-1}{s}, \overset{m-1}{z}) = 0$$

ist vollständig bestimmt durch die Bedingungen, dass sie durch die Doppelpunkte (sich aufhebende Verzweigungspunkte) der Curve

$$(4.) \qquad F(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}) = 0,$$

durch p auf der letzteren willkürlich angenommene Punkte und durch $m+n-2$ der Durchschnittspunkte einer Geraden:

$$as + bz + c = 0$$

mit der Curve (4.) hindurchgehen soll, wie sich aus der Vergleichung der Anzahl der disponiblen Coefficienten der Gl. (3.) mit der Anzahl der Bedingungsgleichungen ergiebt. Es ist daher die Curve (3.) die Curve $N-2^{\text{ter}}$ Ordnung der Herren *Clebsch* und *Gordan*, wenn wir, um Verwechselungen vorzubeugen, mit N den Grad der von ihnen der Theorie zu Grunde gelegten algebraischen Gleichung bezeichnen.

Eine Curve

$$(5.) \qquad \varphi(\overset{n-2}{s}, \overset{m-2}{z}) = 0$$

dagegen ist vollständig bestimmt durch die Bedingungen, dass sie durch die

Doppelpunkte der Curve (4.) und durch $p-1$ auf der letzteren willkürlich angenommene Punkte hindurchgehen soll. Die Curve (5.) stimmt daher mit der Curve $N-3^{\text{ter}}$ Ordnung derselben Herren Verfasser überein. Dass im wirklichen Grad eine Abweichung vorhanden ist, hat seinen Grund darin, dass $f(\overset{\nu}{s},\overset{\mu}{z})$ in der *Riemann*schen Bezeichnung eine nicht complete ganze rationale Function $\mu+\nu^{\text{ten}}$ Grades bedeutet; ein Grund, welcher auch die Verschiedenheit der Ausdrücke für p in der Theorie von *Riemann* und der Herren *Clebsch* und *Gordan* veranlasst.

4.

Setzt man in Gleichung (2.) vor. No. $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_p$ resp. gleich α_1, $\alpha_2, \dots \alpha_p$, so wird im Allgemeinen nach No. 1. und 2.

$$\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{\alpha}}\left(\int_\mu^\xi dw_\alpha - \tfrac{1}{2}P_\alpha(\varkappa,\lambda)\right)\right)$$

nicht identisch in jedem Punkte ξ, sondern nur in $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$ verschwinden. Soll also letztere Function in μ verschwinden, d. h.

$$(1.)\qquad \vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{\alpha}}\left(\tfrac{1}{2}P_\alpha(\varkappa,\lambda)\right)\right) = 0$$

sein, so muss eine der Grössen α mit μ zusammenfallen; und umgekehrt, wenn letzteres stattfindet, so wird die Gleichung (1.) erfüllt. In diesem Falle ergiebt sich aus No. 2, dass die Function ψ_μ, durch welche die α mit μ verknüpft sind, durch die in μ unendlich klein werdende Function $as+bz+c$ theilbar, und der Quotient eine Function φ ist, welche in den von μ verschiedenen Punkten α unendlich klein zweiter Ordnung wird. (Vergl. Cl. G. A. F. §. 75 und *Weber* o. c. Abh. §. 6.)

Man nennt bekanntlich ein System $\frac{1}{2}P_\alpha(\varkappa,\lambda)$ von correspondirenden halben Periodicitätsmoduln ein gerades oder ungerades, je nachdem

$$(2.)\qquad \varkappa_1\lambda_1+\varkappa_2\lambda_2+\dots+\varkappa_p\lambda_p \equiv 0 \text{ oder } 1 \pmod 2.$$

Nun ist im *Allgemeinen* $\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{\alpha}}\left(\tfrac{1}{2}P_\alpha(\varkappa,\lambda)\right)\right)$ Null oder von Null verschieden, je nachdem $\frac{1}{2}P_\alpha(\varkappa,\lambda)$ ein ungerades oder ein gerades System halber Periodicitätsmoduln ist. (Vergl. Cl. G. A. F. §. 75 und *Weber* §. 7.)

Aus beiden Sätzen ergiebt sich, wenn wir ein System $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$, das mit μ durch eine Gleichung $\psi_\mu = 0$ verknüpft ist, nach der Analogie der *Clebsch-Gordan*schen Bezeichnung ein *eigentliches* oder ein *uneigentliches* System (α) nennen, je nachdem *keine* der Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$ oder *eine* mit μ coincidirt, der Satz:

Durch die Gleichung (2.) No. 2. *sind die geraden Systeme halber Periodicitätsmoduln den eigentlichen Systemen* (α), *die ungeraden Systeme den uneigentlichen zugeordnet.*

Da es nun bekanntlich $2^{p-1}(2^p-1)$ Systeme ungerader und $2^{p-1}(2^p+1)$ Systeme gerader halber Periodicitätsmoduln giebt, so ist auch die Anzahl der uneigentlichen Systeme (α) gleich $2^{p-1}(2^p-1)$ und die Anzahl der eigentlichen $2^{p-1}(2^p+1)$ (vergl. Cl. G. A. F. §. 75 und *Weber* §. 7).

5.

Die sämmtlichen Systeme (α), welche für alle möglichen Werthe von $P_a(x, \lambda)$ durch Gleichung (2.) No. 2 auf transcendentem Wege geboten werden, genügen einem Systeme algebraischer Gleichungen, welches folgendermassen aus der Definition der Functionen ψ_μ sich ergiebt.

Bestimmt man die Coefficienten der Function $\psi(\overset{n-1}{s}, \overset{m-1}{z})$ derart, dass dieselbe in den sich aufhebenden Verzweigungspunkten und in den $m+n-2$ Punkten, worin die in μ unendlich klein zweiter Ordnung werdende Function $as+bz+c$ noch ausserdem verschwindet, so erhält ψ die Form:

$$(1.)\qquad \psi(\overset{n-1}{s}, \overset{m-1}{z}) = \zeta_0\psi_0+\zeta_1\psi_1+\zeta_2\psi_2+\cdots+\zeta_p\psi_p,$$

worin die ζ willkürliche Constanten, die ψ bestimmte ganze rationale Functionen von (s, z) sind. Setzt man in die beiden Gleichungen

$$(2.)\qquad \psi = 0,\quad \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial s}-\frac{\partial\psi}{\partial s}\frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

für (s, z) successive (b_1, a_1), (b_2, a_2), ... (b_p, a_p), so erhält man $2p$ Gleichungen, und aus diesen, durch Elimination der Grössen ζ, p Gleichungen, welche in Verbindung mit den p Gleichungen:

$$(3.)\qquad F(b_i, a_i) = 0,\quad i = 1, 2, \ldots p$$

zur Bestimmung der Punktsysteme (b_i, a_i) oder (α) dienen. Wir wissen aus No. 2, dass wir als Lösungen dieses Systems von Gleichungen, die den verschiedenen $\frac{1}{2}P_a(x, \lambda)$ entsprechenden Punktsysteme (α) erhalten müssen. Aber wie ordnen sich die auf dem eben angegebenen algebraischen Wege ermittelten einzelnen Systeme (α) den verschiedenen Systemen halber Periodicitätsmoduln zu?

Diese Frage hat nur dann einen bestimmten Sinn, wenn die Art der Zerschneidung der Fläche T, welche vorgenommen wird, um diese Fläche

in eine einfach zusammenhangende zu verwandeln, (R. A. F. §§. 3 u. 19) fixirt ist. Aus den Untersuchungen der Herren *Clebsch* und *Gordan* (A. F. §. 89) geht nämlich hervor, dass man die Querschnitte so wählen kann, dass ein beliebiges eigentliches System (α) von Lösungen der oben erwähnten algebraischen Gleichungen dem Systeme $\frac{1}{2}P_a(0,0)$ vermittelst der Gleichung (2.) No. 2 zugeordnet ist. Man kann daher, wie sich aus (Cl. G. A. F. §. 93) ergiebt, statt die Querschnitte von vorn herein festzulegen, ein beliebiges eigentliches System (α) dem Systeme $\frac{1}{2}P_a(0,0)$ vermittelst Gleichung (2.) No. 2. zuordnen, worauf sich die Grösse der Periodicitätsmoduln a_{ik} bestimmen lässt.

Ist jedoch die Art der Zerschneidung der Fläche T fixirt, so sind hiermit die Periodicitätsmoduln gegeben, und es ist jedes System (α) durch Gleichung (2.) in No. 2. einem bestimmten Systeme correspondirender halber Periodicitätsmoduln zugeordnet. Für diesen Fall wollen wir in der folgenden Nummer einige Bemerkungen, welche auf die oben aufgeworfene Frage Bezug haben, anschliessen.

6.

Ist (α') ein festes System, (α) aber ein beliebiges System, $\frac{1}{2}P_a(\varkappa',\lambda')$ und $\frac{1}{2}P_a(\varkappa,\lambda)$ die denselben resp. zugeordneten Systeme correspondirender halber Periodicitätsmoduln, so ist nach Gleichung (2.) oder (4.) No. 2.

$$\left.\begin{array}{ll}(1.) & \sum_1^p{}_\mathfrak{c}\int_\mu^{\alpha'_\mathfrak{c}} dw_a = \frac{1}{2}\sum_1^{2p-2}{}_\mathfrak{b}\int_\mu^{\varepsilon_\mathfrak{b}} dw_a + \frac{1}{2}P_a(\varkappa',\lambda'), \\ (2.) & \sum_1^p{}_\mathfrak{c}\int_\mu^{\alpha_\mathfrak{c}} dw_a = \frac{1}{2}\sum_1^{2p-2}{}_\mathfrak{b}\int_\mu^{\varepsilon_\mathfrak{b}} dw_a + \frac{1}{2}P_a(\varkappa,\lambda).\end{array}\right\} \quad a = 1,\ 2,\ \ldots p.$$

In diesen Gleichungen erstrecken sich die Integrale rechter Hand über die in der Gleichung (1^a.) No. 2. vorgeschriebenen Wege, die Integrale linker Hand über diejenigen, welche die Umkehrung der *Abel*schen Integrale erfordert. Wenn wir das durch die Differenz $\frac{1}{2}P_a(\varkappa,\lambda)-\frac{1}{2}P_a(\varkappa',\lambda')$ entstehende System correspondirender halber Periodicitätsmoduln mit $\frac{1}{2}Q_a(\varkappa,\lambda)$ bezeichnen, so ergiebt die Subtraction der Gleichungen (1.) und (2.)

$$(3.) \qquad \frac{1}{2}Q_a(\varkappa,\lambda) = \sum_1^p{}_\mathfrak{c}\int_{\alpha'_\mathfrak{c}}^{\alpha_\mathfrak{c}} dw_a, \quad a = 1,\ 2,\ \ldots p$$

(vergl. Cl. G. A. F. §. 56 und *Weber* l. c. §. 6),

wo die Integrationswege rechter Hand ebenfalls bestimmt sind, wenn $\varkappa$, λ bestimmte Zahlen bedeuten, aber willkürlich gewählt werden dürfen, wenn diese Zahlen nur bis auf Vielfache von 2 als gegeben betrachtet werden. Unter der letzteren Voraussetzung denken wir uns, um eine bestimmte Vorstellung zu haben, die sämmtlichen Integrationswege rechter Hand in Gleichung (3.) in der einfach zusammenhangenden Fläche T' verlaufend. Alsdann können diese Gleichungen dazu dienen, die numerischen Werthe der ganzen Zahlen $\varkappa$, λ in $\frac{1}{2}Q_a(\varkappa, \lambda)$ zu bestimmen, sobald die Periodicitätsmoduln $a_{\iota k}$ und die Integrale rechter Hand berechnet sind.

Wählt man für (α) nach und nach alle eigentlichen und uneigentlichen Systeme, so erhält man durch die Gleichung (3.) successive 2^{2p} incongruente Systeme halber Periodicitätsmoduln $\frac{1}{2}Q_a(\varkappa, \lambda)$, und die Systeme (α) sind auf diese Weise einem unter ihnen (α') als *Basis* zugeordnet worden.

Denken wir uns nunmehr für die Basis (α') successive alle Systeme (α) gewählt, und jedesmal die Zuordnung aller übrigen Systeme durch Gleichung (3.) ausgeführt, so sind wir im Stande das System (α''), welches vermittelst der Gleichung (2.) No. 2. dem Systeme $\frac{1}{2}P_a(0, 0)$ zugehört, von allen übrigen Systemen (α) auszusondern.

In der That ergiebt für das letztere System als Basis, wenn also (α'') an die Stelle von (α') gesetzt wird, wie aus No. 4. folgt, die Gleichung (3.) *ein gerades oder ein ungerades* System halber Periodicitätsmoduln $\frac{1}{2}Q_a(\varkappa, \lambda)$, je nachdem das System der oberen Grenzen (α) *ein eigentliches oder ein uneigentliches* ist.

Umgekehrt ist das System (α'') *das einzige unter den Systemen* (α), *welches diese Eigenschaft besitzt.*

Da

$$\sum_1^p {}_\iota \int_{\alpha'_\iota}^{\alpha_\iota} dw_a = \sum_1^p {}_\iota \int_{\alpha''_\iota}^{\alpha_\iota} dw_a - \sum_1^p {}_\iota \int_{\alpha''_\iota}^{\alpha'_\iota} dw_a,$$

so ergiebt sich die Richtigkeit des letzteren Satzes, wenn nachgewiesen ist, dass unter den Differenzen, welche aus ein und demselben System $\frac{1}{2}Q_a(\varkappa', \lambda')$ und jedem einzelnen der geraden Systeme halber Periodicitätsmoduln gebildet werden, mindestens eine ist, welche ein *ungerades* System halber Periodicitätsmoduln darstellt.

Es sei daher $\frac{1}{2}Q_a(\varkappa, \lambda)$ irgend ein gerades System, so ist die Differenz

$$\tfrac{1}{2}Q_a(\varkappa, \lambda) - \tfrac{1}{2}Q_a(\varkappa', \lambda') = \tfrac{1}{2}Q_a(\varkappa-\varkappa', \lambda-\lambda')$$



ein gerades oder ungerades System, je nachdem

$$(4.)\qquad \sum_1^p {}_b(\varkappa_b-\varkappa'_b)(\lambda_b-\lambda'_b) \equiv 0 \text{ oder } 1 \mod 2 \text{ (s. No. 4. Gl. (2.))}.$$

Nun ist

$$\sum_1^p {}_b\varkappa_b\lambda_b \equiv 0 \mod 2,$$

und wenn wir mit δ die Null oder Eins bezeichnen, je nachdem $\frac{1}{2}Q_a(\varkappa',\lambda')$ ein gerades oder ungerades System ist,

$$\sum_1^p {}_b\varkappa'_b\lambda'_b \equiv \delta \mod 2.$$

Es ist demnach $\frac{1}{2}Q_a(\varkappa-\varkappa',\lambda-\lambda')$ dann und nur dann ein gerades System, wenn

$$(5.)\qquad \sum_1^p {}_b(\varkappa_b\lambda'_b+\varkappa'_b\lambda_b) \equiv \delta \mod 2.$$

Es ist nun nicht möglich, dass für alle geraden Systeme $\frac{1}{2}Q_a(\varkappa,\lambda)$ diese Congruenz erfüllt werde. Denn der Voraussetzung nach sind in dem Zahlensysteme:

$$\begin{pmatrix}\varkappa'_1, & \varkappa'_2, & \dots & \varkappa'_p\\ \lambda'_1, & \lambda'_2, & \dots & \lambda'_p\end{pmatrix}$$

nicht alle gleichstelligen $\varkappa'$ und λ' gleichzeitig congruent Null. Ist ausserdem $\frac{1}{2}Q_a(\varkappa',\lambda')$ ungerade, so muss wenigstens ein Paar gleichstelliger $\varkappa'$, λ' dieses Zahlensystems congruent Eins sein.

Es sei nun

1) $\frac{1}{2}Q_a(\varkappa',\lambda')$ gerade, also $\delta=0$, und $\varkappa'_l\equiv 1$ oder $\lambda'_l\equiv 1$.

Wählen wir in dem einen oder anderen Falle ein gerades System $\frac{1}{2}Q_a(\varkappa,\lambda)$, in welchem alle $\varkappa$ und λ congruent Null sind, ausser λ_l oder $\varkappa_l$, die resp. congruent Eins, so wird die Congruenz (5.) nicht erfüllt, da die linke Seite congruent Eins.

2) $\frac{1}{2}Q_a(\varkappa',\lambda')$ ungerade, also $\delta=1$, und $\varkappa'_l\equiv 1$, $\lambda'_l\equiv 1$, so muss man zwei Fälle unterscheiden: *a)* Sind alle übrigen $\varkappa'$, λ' Null, so wähle man ein gerades System $\frac{1}{2}Q_a(\varkappa,\lambda)$, worin $\varkappa_l\equiv 1$, $\lambda_l\equiv 1$; $\varkappa_m\equiv 1$, $\lambda_m\equiv 1$, alle übrigen $\varkappa$, λ Null; so wird die Congruenz (5.) nicht erfüllt, da die linke Seite congruent Null ist. *b)* Sind noch andere der Grössen $\varkappa'$, λ' congruent Eins, z. B. $\varkappa'_m\equiv 1$ oder $\lambda'_m\equiv 1$, so wähle man das gerade System $\frac{1}{2}Q_a(\varkappa,\lambda)$ so, dass $\varkappa_l\equiv 1$, $\lambda_l\equiv 0$; $\varkappa_m\equiv 0$, $\lambda_m\equiv 1$ oder $\varkappa_m\equiv 1$, $\lambda_m\equiv 0$, alle übrigen $\varkappa$, λ congruent Null; so ist wieder die Congruenz (5.) nicht erfüllt, da die linke Seite congruent Null ist.

Wegen dieser bewieseuen Eigenschaft des Systems (α'') wollen wir dasselbe das zu μ gehörige Hauptsystem nennen.

7.

Wir gehen dazu über, die in No. 3. Gleichung (2.) angenommene Darstellung der Argumente der Thetafunction auf die Bestimmung von $\vartheta(0, 0, \ldots 0)$ anzuwenden. Herr *Thomae* hat (d. J. B. 66 pag. 95) für $d \log \vartheta(0, 0, \ldots 0)$ als Function der sich nicht aufhebenden Verzweigungspunkte, die als von einander unabhängig vorausgesetzt werden, einen eleganten Ausdruck gegeben und denselben für die hyperelliptischen Functionen (d. J. B. 71 pag. 201) vollständig berechnet. Die weitere Behandlung desselben Ausdruckes für den allgemeinen Fall ist jedoch durch beträchtliche Schwierigkeiten gehemmt (s. die Abh. des Herrn *Thomae* B. 66). Der von Herrn *Thomae* gegebene Ausdruck nimmt aber eine wesentlich einfachere Gestalt an, wenn man von der erwähnten Form der Argumente der Thetafunction ausgeht.

Es sei $W_1, W_2, \ldots W_p$ ein System unabhängiger Integrale erster Gattung, so dass

$$(1.) \qquad W_{\mathfrak{a}} = \int_{\mu}^{\xi} \frac{f_{\mathfrak{a}}(\overset{n-2}{s}, \overset{m-2}{z})}{\frac{\partial F}{\partial s}} dz,$$

wo die Functionen $f_{\mathfrak{a}}$ ganz und rational sind und für die sich aufhebenden Verzweigungspunkte verschwinden, während die noch übrigen p willkürlichen Constanten jeder derselben (R. A. F. §. 9) einer späteren Disposition vorbehalten bleiben. Setzt man die Determinante

$$\begin{vmatrix} A_1^{(1)}, & A_2^{(1)}, & \ldots & A_p^{(1)} \\ A_1^{(2)}, & A_2^{(2)}, & \ldots & A_p^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^{(p)}, & A_2^{(p)}, & \ldots & A_p^{(p)} \end{vmatrix} = \nabla,$$

wo $A_i^{(k)}$ den Periodicitätsmodul von W_i am Querschnitte a_k bedeutet (R. A. F. §. 20), so ist bekanntlich

$$(2.) \qquad w_{\mathfrak{a}} = \frac{i\pi}{\nabla} \sum_{1}^{p} {}_{\mathfrak{b}} \frac{\partial \nabla}{\partial A_{\mathfrak{b}}^{(\mathfrak{a})}} W_{\mathfrak{b}}, \quad \mathfrak{a} = 1, 2, \ldots p$$

ein System unabhängiger Integrale erster Gattung von der Beschaffenheit, dass der Periodicitätsmodul von $w_{\mathfrak{a}}$ am Querschnitt $a_{\mathfrak{a}}$ gleich πi, an allen übrigen Querschnitten a gleich Null, am Querschnitte b_ν gleich $a_{\mathfrak{a}\nu}$, und zugleich findet die Beziehung statt, dass $a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}$ (R. A. F. §. 18—21).

Es sei ferner

$$(3.)\qquad u_a = w_a + c_a,$$

wo c_a dieselbe Bedeutung habe wie in No. 1, und k irgend einer der sich nicht aufhebenden Verzweigungspunkte, und σ der demselben zugehörige Werth von s, so mögen aus den Gleichungen

$$(4.)\qquad u_a(\sigma, k) - \sum_1^p{}_b\, u_a(s_b, z_b) = 0, \qquad a = 1, 2, \dots p$$

die p Grössenpaare (s_1, z_1), (s_2, z_2), ... (s_p, z_p) bestimmt werden. Bezeichnet man $\frac{du_a(s_b, z_b)}{dz_b}$ kurz mit $\frac{du_a}{dz_b}$, und setzt:

$$\begin{vmatrix} \frac{du_1}{dz_1}, & \frac{du_1}{dz_2}, & \dots & \frac{du_1}{dz_p} \\ \frac{du_2}{dz_1}, & \frac{du_2}{dz_2}, & \dots & \frac{du_2}{dz_p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{du_p}{dz_1}, & \frac{du_p}{dz_2}, & \dots & \frac{du_p}{dz_p} \end{vmatrix} = \triangle,$$

so findet Herr *Thomae* l. c. ein Resultat, welches im Wesentlichen auf das Folgende hinauskommt:

$$(5.)\qquad \frac{\partial \log \vartheta(0, 0, \dots 0)}{\partial k} = -\tfrac{1}{2}\frac{\partial' \log \triangle}{\partial k},$$

wo wir durch den an das Differentiationszeichen rechts oben angefügten Index angedeutet haben, *dass bei der Differentiation nach k die in $\triangle$ enthaltenen Grössen (s_b, z_b) als von k unabhängig behandelt werden sollen.*

Dieses Resultat wollen wir einer Transformation unterwerfen. Zunächst ergiebt sich leicht aus einem bekannten Determinantensatz, wenn man

$$\frac{dW_a(s_b, z_b)}{dz_b} = \frac{dW_a}{dz_b}$$

und die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{dW_1}{dz_1}, & \frac{dW_1}{dz_2}, & \dots & \frac{dW_1}{dz_p} \\ \frac{dW_2}{dz_1}, & \frac{dW_2}{dz_2}, & \dots & \frac{dW_2}{dz_p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{dW_p}{dz_1}, & \frac{dW_p}{dz_2}, & \dots & \frac{dW_p}{dz_p} \end{vmatrix} = D$$

setzt,

$$(6.)\qquad \triangle = \frac{(i\pi)^p}{\nabla}\cdot D,$$

also

$$(7.)\qquad \frac{\partial' \log \triangle}{\partial k} = \frac{\partial' \log D}{\partial k} - \frac{\partial \log \nabla}{\partial k}.$$

8.

Es ist nun das erste Glied auf der rechten Seite der letzten Gleichung vor. No., welches wir weiter umformen wollen. Lassen wir zu dem Ende den Punkt μ in No. 1—6 in den Verzweigungspunkt k hineinrücken, und verstehen unter (α^{0}) das dem k zugehörige Hauptsystem, so wie unter ξ_b den Punkt (s_b, z_b), unter ξ den Punkt (s, z), so folgt aus Gleichung $(1^a.)$ und (2.) No. 2.

$$(1.)\qquad u_a(s,z) - \sum_1^p {}_b\, u_a(s_b, z_b) = \int_k^{\xi} du_a - \sum_1^p {}_b \int_{\alpha_b^{(0)}}^{\xi_b} du_a, \qquad a = 1, 2, \dots p.$$

Die Gleichung (4.) vor. No. wird daher

$$(2.)\qquad \sum_1^p {}_b \int_{\alpha_b^{(0)}}^{\xi_b} du_a = 0, \qquad a = 1, 2, \dots p,$$

welche sofort ergiebt:

$$(3.)\qquad \xi_1 = \alpha_1^{(0)},\quad \xi_2 = \alpha_2^{(0)},\quad \dots\quad \xi_p = \alpha_p^{(0)}.$$

Die lineare Function $as+bz+c$ in No. 2, welche in μ unendlich klein zweiter Ordnung wird, ist hier, mit Rücksicht auf (R. A. F. § 6), gleich $z-k$. Dieselbe verschwindet in noch $n-2$ anderen Punkten. Daraus folgt, auf dieselbe Weise wie in No. 2, dass die Function ψ_k, durch welche die Grössen (α^{0}) mit k verknüpft sind, in Bezug auf s vom $n-2^{\text{ten}}$, in Bezug auf z vom $m-1^{\text{ten}}$ Grade ist.

Es sind nunmehr

$$\left[\frac{f_a(s,z)}{\frac{\partial F}{\partial s}}(z-k)^{\frac{1}{2}}\right]_{\substack{z=k\\ s=\sigma}} = \mathfrak{A}_a, \qquad \left[\frac{\psi_k(s,z)}{\frac{\partial F}{\partial s}}(z-k)^{\frac{1}{2}}\right]_{\substack{z=k\\ s=\sigma}} = \mathfrak{B}$$

endliche Grössen. Weil ausserdem (α^{0}) ein eigentliches System ist, so ist, wenigstens so lange als nicht besondere Beziehungen zwischen den sich aufhebenden Verzweigungspunkten bestehen, wie im allgemeinen Falle μ, so hier k von $\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \dots \alpha_p^{(0)}$ verschieden, demnach ist die Grösse $\mathfrak{B}$ nicht Null. Setzen

wir also

$$(4.)\qquad \frac{\mathfrak{A}_a}{2\mathfrak{B}} = C_a,$$

so ist C_a eine endliche Constante, und die Differenz

$$\frac{\partial W_a}{\partial k} - C_a \int \frac{\psi_k(s,z)}{(z-k)\frac{\partial F}{\partial s}} dz,$$

deren Minuendus und Subtrahendus nur für $(s,z)=(\sigma,k)$ und zwar beide wie $-\mathfrak{A}_a(z-k)^{-\frac{1}{2}}$ unendlich werden, ist ein in der ganzen Fläche T endliches Integral. Es ist demnach

$$(5.)\qquad \frac{\partial W_a}{\partial k} - C_a \int \frac{\psi_k(s,z)}{(z-k)\frac{\partial F}{\partial s}} dz = \lambda_{a1} W_1 + \lambda_{a2} W_2 + \cdots + \lambda_{ap} W_p + \text{Const.},$$

wo die Grössen λ Constanten bedeuten (R. A. F. § 4).

Differentiiren wir diese Gleichung nach z, so erhalten wir

$$(6.)\qquad \frac{\partial}{\partial k}\frac{dW_a}{dz} - C_a \frac{\psi_k(s,z)}{(z-k)\frac{\partial F}{\partial s}} = \lambda_{a1}\frac{dW_1}{dz} + \lambda_{a2}\frac{dW_2}{dz} + \cdots + \lambda_{ap}\frac{dW_p}{dz}.$$

Setzen wir hierin successive für (s,z) die Punkte $\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \ldots \alpha_p^{(1)}$, so erhalten wir

$$(7.)\qquad \frac{\partial'}{\partial k}\frac{dW_a}{dz_b} = \sum_1^p{}_\mathfrak{c}\, \lambda_{a\mathfrak{c}} \frac{dW_\mathfrak{c}}{dz_b}, \quad \text{für } a = 1, 2, \ldots p;$$

daher ist, wenn wir zur Abkürzung

$$\sum_1^p{}_\mathfrak{c}\, \lambda_{i\mathfrak{c}} \frac{dW_\mathfrak{c}}{dz_b} = \Sigma^{(bi)}$$

setzen,

$$\frac{\partial' D}{\partial k} = \sum_1^p{}_i \begin{vmatrix} \frac{dW_1}{dz_1}, & \frac{dW_1}{dz_2}, & \ldots & \frac{dW_1}{dz_p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{dW_{i-1}}{dz_1}, & \frac{dW_{i-1}}{dz_2}, & \ldots & \frac{dW_{i-1}}{dz_p} \\ \Sigma^{(1i)}, & \Sigma^{(2i)}, & \ldots & \Sigma^{(pi)} \\ \frac{dW_i}{dz_1}, & \frac{dW_i}{dz_2}, & \ldots & \frac{dW_i}{dz_p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{dW_p}{dz_1}, & \frac{dW_p}{dz_2}, & \ldots & \frac{dW_p}{dz_p} \end{vmatrix} = D \sum_1^p{}_i\, \lambda_{ii}.$$

Folglich ist

$$(8.)\qquad \frac{\partial' \log D}{\partial k} = \sum_1^p {}_i \lambda_{ii}.$$

9.

Die Grössen λ lassen sich aus Gleichung (6.) vor. No. auf algebraischem Wege bestimmen. Die Rechnung wird sehr einfach, wenn wir über die in jedem $f_\alpha(s, z)$ in No. 7. willkürlich gebliebenen p Constanten folgendermassen disponiren. Es seien $b_1, b_2, \ldots b_p$ willkürlich gewählte Punkte der Fläche T, die sowohl untereinander als auch von den Verzweigungspunkten vollkommen unabhängig sind. Es werden nun die p Constanten in $f_\alpha(s, z)$ so bestimmt, dass diese Function für alle b ausser b_α verschwindet, in b_α aber den Werth von $\frac{\partial F}{\partial s}$ in demselben Punkte annimmt. Dieses ist immer zulässig, wenn nicht die Punkte b Beziehungen zu einander haben.

Die Gleichung (6.) vor. No. ergiebt alsdann:

$$(1.)\qquad \left[\frac{\partial}{\partial k}\frac{f_\alpha(s, z)}{\frac{\partial F}{\partial s}}\right]_{b_i} - C_\alpha\left[\frac{\psi_k(s, z)}{(z-k)\frac{\partial F}{\partial s}}\right]_{b_i} = \lambda_{\alpha i}.$$

In der Umgebung des Punktes b_i in der Fläche T ist

$$(2.)\qquad \frac{f_\alpha(s, z)}{\frac{\partial F}{\partial s}} = \varepsilon + c_1(z-b_i) + c_2(z-b_i)^2 + \cdots,$$

$$(\varepsilon = 1 \text{ oder } 0, \text{ je nachdem } \alpha = i \text{ oder } \alpha \gtrless i),$$

wo $c_1, c_2, \ldots$ von z unabhängige Grössen sind, und mit b_i auch der Werth von z im Punkte b_i bezeichnet ist. Aus Gleichung (2.) folgt, dass das erste Glied auf der linken Seite der Gleichung (1.) verschwindet, dass also

$$(3.)\qquad \lambda_{\alpha i} = -C_\alpha\left[\frac{\psi_k(s, z)}{(z-k)\frac{\partial F}{\partial s}}\right]_{b_i}.$$

Aus den Gleichungen (5.) und (7.) No. 7., Gleichung (8.) No. 8. folgt daher:

$$(4.)\qquad \frac{\partial \log \vartheta(0, 0, \ldots 0)}{\partial k} = \tfrac{1}{2}\frac{\partial \log \nabla}{\partial k} + \tfrac{1}{2}\sum_1^p {}_i C_i\left[\frac{\psi_k(s, z)}{(z-k)\frac{\partial F}{\partial s}}\right]_{b_i}.$$

In dieser Gleichung ist das erste Glied ein vollständiger Differentialquotient einer transcendenten Function; das zweite eine wohlbestimmte algebraische Function.

10.

In dem besonderen Falle der hyperelliptischen Integrale sei die der Theorie zu Grunde gelegte algebraische Gleichung

$$(1.)\qquad s^2-R(z) = 0,$$

wo

$$R(z) = (z-k_1)(z-k_2)\dots(z-k_{2p+2}),$$

und die Grössen k von einander unabhängig vorausgesetzt werden. In diesem Falle sind keine sich aufhebenden Verzweigungspunkte vorhanden. Ist daher

$$\varphi(z) = (z-b_1)(z-b_2)\dots(z-b_p),$$

so kann man setzen:

$$(2.)\qquad f_a(s,z) = \frac{2\sqrt{R(b_a)}}{\varphi'(b_a)}\cdot\frac{\varphi(z)}{z-b_a}.$$

Da sich aufhebende Verzweigungspunkte nicht vorhanden, so kann man für $\varphi(\overset{n-2}{s}, \overset{m-2}{z})$ eine ganze rationale Function $p-1^{\text{ten}}$ Grades von z wählen. Eine solche Function wird in einem Verzweigungspunkte, wo sie verschwindet, unendlich klein zweiter Ordnung. Daher können die Grössen ε in No. 2 zu je zweien einander gleich und gleich einer der Grössen $k_1, k_2, \dots k_{2p+2}$ genommen werden.

Ist k eine dieser Grössen und fällt μ in k hinein, so ergiebt die Gleichung (2.) No. 2 für das System der oberen Grenzen (α) p Verzweigungspunkte, da im gegenwärtigen Falle jede zwischen zwei Verzweigungspunkten verlaufende Integration eines der Systeme correspondirender halber Periodicitätsmoduln liefert. Man kann also, wenn $k', k'', \dots k^{(p)}$ die p Verzweigungspunkte sind, welche die Gleichung (2.) No. 2 für ein bestimmtes $P_a(x,\lambda)$ ergiebt, das zugehörige $\psi_k(s,z)$ setzen

$$\psi_k(s,z) = (z-k')(z-k'')\dots(z-k^{(p)}).$$

Sind insbesondere $k_1, k_2, \dots k_p$ diejenigen Verzweigungspunkte, welche die Gleichung (2.) No. 2 für $P_a(0,0)$ liefert, also das System (α^0), so sind diese Verzweigungspunkte von k verschieden, da in ihnen $\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{a}}\left(\int_k^{\xi} dw_a\right)\right)$ verschwindet, während diese Function für $\xi = k$ in die im Allgemeinen nicht verschwindende Grösse $\vartheta(0,0,\dots 0)$ übergeht. Die zu (α^0) gehörige Function $\psi_k(s,z)$ ist

$$(3.)\qquad \psi_k(s,z) = \psi(z) = (z-k_1)(z-k_2)\dots(z-k_p).$$

Es ist alsdann

$$(4.)\qquad C_a = \frac{\sqrt{R(b_a)}}{\varphi'(b_a)}\cdot\frac{\varphi(k)}{(k-b_a)\psi(k)}.$$

Also geht das zweite Glied der rechten Seite der Gl. (4.) vor. No. über in:

$$\tfrac{1}{2}\sum_1^p{}_i\frac{\psi(b_i)}{\varphi'(b_i)(k-b_i)^2}\cdot\frac{\varphi(k)}{\psi(k)}.$$

Setzt man

$$(5.)\qquad \frac{\varphi(k_a)\psi(b_i)}{\psi'(k_a)\varphi'(b_i)}\cdot\frac{1}{(k_a-b_i)^2} = l_{ia},$$

so ist nach Gleichung (4.) vor. No.

$$(6.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\log\vartheta(0,0,\dots 0)}{\partial k} = \tfrac{1}{2}\dfrac{\partial\log\nabla}{\partial k}+\tfrac{1}{4}\sum_1^p{}_i\dfrac{d\log(k-b_i)}{dk} \\ \qquad +\tfrac{1}{2}\sum_1^p{}_i\sum_1^p{}_a l_{ia}\dfrac{d\log(k-k_a)}{dk}. \end{cases}$$

11.

Zieht man es vor, bei den hyperelliptischen Integralen die gewöhnliche Form

$$(1.)\qquad \frac{dW_a}{dz} = \frac{z^{a-1}}{\sqrt{R(z)}}$$

festzuhalten, so wird

$$(2.)\qquad C_a = \frac{k^{a-1}}{2\psi(k)}.$$

Die Gleichung (6.) in No. 8 wird gegenwärtig:

$$(3.)\qquad \frac{\tfrac{1}{2}z^{a-1}-C_a\psi(z)}{z-k} = \sum_1^p{}_b\,\lambda_{ab}z^{b-1}.$$

Setzt man

$$\frac{\psi(z)-\psi(k)}{z-k} = \chi(z),$$

so folgt aus Gleichung (3.)

$$(4.)\qquad \lambda_{ii} = -\frac{C_i}{1.2\dots(i-1)}\left[\frac{d^{i-1}\chi(z)}{dz^{i-1}}\right]_{z=0},$$

also

$$\sum_1^p{}_i\lambda_{ii} = -\frac{1}{2\psi(k)}\sum_1^p{}_a\frac{k^{a-1}}{1.2\dots(a-1)}\left[\frac{d^{a-1}\chi(z)}{dz^{a-1}}\right]_{z=0} = -\frac{\chi(k)}{2\psi(k)},$$

also

$$(5.)\qquad \sum_1^p{}_i\lambda_{ii} = -\frac{\psi'(k)}{2\psi(k)} = -\tfrac{1}{2}\frac{\partial\log\psi(k)}{\partial k},$$

also nach Gleichung (8.) No. 8

$$\frac{\partial' \log D}{\partial k} = -\tfrac{1}{2}\frac{\partial \log \psi(k)}{\partial k}$$

und folglich nach Gleichung (5.) und (7.) No. 7

$$(6.) \qquad \frac{\partial \log \vartheta(0, 0, \dots 0)}{\partial k} = \tfrac{1}{2}\frac{\partial \log \nabla}{\partial k} + \tfrac{1}{4}\frac{\partial \log \psi(k)}{\partial k},$$

was mit dem Resultate des Herrn *Thomae* (ob. cit. Abh. d. J. Bd. 71 pag. 216) übereinstimmt.

Greifswald im März 1871.

Ueber die linearen Differentialgleichungen, welchen die Periodicitätsmoduln der *Abel*schen Integrale genügen, und über verschiedene Arten von Differentialgleichungen für $\vartheta(0, 0, \dots 0)$.

(Von Herrn *L. Fuchs* in Greifswald.)

In einer früheren Abhandlung (d. J. B. 71) haben wir die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale als Functionen eines Parameters einer näheren Untersuchung unterzogen und namentlich auch die linearen Differentialgleichungen aufgestellt, welchen diese Functionen genügen. In dem Folgenden wollen wir ebenso für die Periodicitätsmoduln der allgemeinen *Abel*schen Integrale, als Functionen eines der sich nicht aufhebenden Verzweigungspunkte der der Theorie zu Grunde gelegten Fläche T, lineare Differentialgleichungen entwickeln, unter der Voraussetzung, dass die sich nicht aufhebenden Verzweigungspunkte von einander unabhängig sind.

In diesem Journale B. 36 hat *Jacobi* für das elliptische $\vartheta(0)$ als Function von $\log q$ eine Differentialgleichung dritter Ordnung entwickelt, deren Coefficienten numerische Grössen sind. Dieselbe steht in enger Beziehung zu der bekannten linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, welcher K und K' genügen, und sie lässt eine unmittelbare Anwendung auf die Transformation zu. — Wir wollen im Folgenden zeigen, dass ähnliche Relationen sich in der Theorie der *Abel*schen Functionen zwischen $\vartheta(0, 0, \dots 0)$ als Function der Periodicitätsmoduln und deren partiellen Ableitungen nach denselben ergeben, und dass die Herleitung derselben entweder mit Hülfe der bei den oben angeführten Differentialgleichungen der Periodicitätsmoduln in dieser Arbeit hergestellten Beziehungen, oder auch unabhängig von diesen möglich ist.

Da jedoch die Periodicitätsmoduln nicht von einander unabhängig sind, so scheinen uns für manche andere Zwecke, als die sich unmittelbar auf das Problem der Transformation beziehenden, solche Differentialgleichungen den Vorzug zu verdienen, welchen $\vartheta(0, 0, \dots 0)$ als Function eines der $3p-3$ Klassenmoduln, oder eines der als unabhängig von einander vorausgesetzten sich nicht aufhebenden Verzweigungspunkte genügen. Wir wählen die letzteren

als unabhängige Variabeln und zeigen, dass $\vartheta(0, 0, \ldots 0)$ als Function derselben gewisse algebraische Differentialgleichungen befriedigt.

In der Bezeichnung schliessen wir uns überall an die Abhandlung von *Riemann* (d. J. B. 54) an, welche wir kurz als R. A. F. citiren.

1.

Ehe wir in unsere Untersuchung eintreten, ist es nöthig nachzuweisen, dass die sich nicht aufhebenden Verzweigungspunkte der die algebraische Gleichung

$$(1.) \quad F(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}) = 0$$

darstellenden Fläche T als von einander unabhängig vorausgesetzt werden dürfen.

Zwischen der Anzahl w dieser Punkte, und der Anzahl $2p$ von Querschnitten, welche die Fläche T in eine einfach zusammenhangende verwandeln, findet die Beziehung statt:

$$(2.) \quad w = 2n+2(p-1) \quad \text{(R. A. F. §. 7).}$$

Für die mit Gleichung (1.) zu derselben Klasse gehörigen algebraischen Gleichungen ist p unveränderlich (R. A. F. §. 11). Die Gleichung niedrigsten Grades in derselben Klasse hat für $p > 2$ die Form

$$(3.) \quad F_1(\overset{\nu}{s}, \overset{\nu}{z}) = 0,$$

und es ist

$$(4.) \quad p = 2\nu - \varepsilon,$$

wo $\varepsilon = 2$ oder 3, je nachdem p gerade oder ungerade. (R. A. F. §. 13).

Es sei w_1 die Anzahl der sich nicht aufhebenden Verzweigungspunkte der Gleichung (3.), so ist nach Gleichung (2.)

$$(5.) \quad w_1 = 2\nu + 2(p-1),$$

oder

$$(6.) \quad w_1 = 6\nu - 2(1+\varepsilon).$$

Die Anzahl $(\nu+1)^2$ der Constanten der Gl. (3.) ist also um mehr als eine Einheit grösser als w_1.

Nun sei

$$(7.) \quad n = \nu + \zeta, \quad m = \nu + \eta,$$

wo ζ und η entweder Null oder positive ganze Zahlen sind, es folgt alsdann aus Gl. (2.) und (5.)

$$(8.) \quad w = w_1 + 2\zeta.$$

Die Anzahl der Constanten der Gl. (1.) ist

$$(m+1)(n+1) = (\nu+1+\zeta)(\nu+1+\eta) = (\nu+1)^2+(\nu+1+\eta)\zeta+(\nu+1)\eta,$$

also übertrifft die Anzahl der Constanten der Gl. (1.) die der Gleichung (3.) um mehr als 2ζ, und demnach die Anzahl w der sich nicht aufhebenden Verzweigungspunkte der Gleichung (1.) um mehr als eine Einheit, so dass im Allgemeinen letzteren Punkten willkürliche, von einander unabhängige Lagen gegeben werden können.

Zu demselben Schlusse gelangt man auch für $p = 1$ oder 2. Wir werden demnach in dieser Arbeit die sich nicht aufhebenden Verzweigungspunkte als von einander unabhängig betrachten.

2.

Eine fernere Bemerkung bezieht sich auf die Darstellung einer rationalen Function von (s, z), die in gegebenen Punkten unendlich gross und in anderen gegebenen unendlich klein werden soll.

Bekanntlich kann man mit Hülfe der Gleichung

$$(1.)\qquad F(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}) = 0$$

jede rationale Function $f(s, z)$ auf die Form bringen:

$$(2.)\qquad f(s, z) = \frac{L_{n-1}s^{n-1}+L_{n-2}s^{n-2}+\cdots+L_0}{N},$$

wo die Grössen L_{n-1}, L_{n-2}, ... L_0 und N ganze rationale Functionen von z sind.

Soll daher $f(s, z)$ in den Punkten (s_1, z_1), (s_2, z_2), ... (s_m, z_m) unendlich gross erster Ordnung, sonst aber überall endlich werden, und setzen wir

$$N = (z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_m)$$

und bezeichnen die $n-1$ übrigen Punkte der Fläche T, welche mit (s_a, z_a) zu demselben Werthe z_a gehören, mit (s'_a, z_a), (s''_a, z_a), ... $(s_a^{(n-1)}, z_a)$, so ist der Zähler so zu bestimmen, dass er in den Punkten (s'_a, z_a), (s''_a, z_a), ... $(s_a^{(n-1)}, z_a)$ $(a = 1, 2, \dots m)$ von der ersten Ordnung verschwindet. Diese $m(n-1)$ Bedingungen liefern ebenso viele lineare Gleichungen für die Coefficienten der L als Unbekannte. — Ist μ die Anzahl dieser Coefficienten und

$$\mu - m(n-1) = \nu+1,$$

so treten zu jenen Gleichungen noch ν andere hinzu, welche ausdrücken, dass der Zähler von $f(s,z)$ ausserdem in den ν gegebenen Punkten (b_1, a_1), (b_2, a_2), ... (b_ν, a_ν) erster Ordnung verschwinden soll. Die Gesammtheit der $\mu-1$ Gleichungen liefert die Verhältnisse der Coefficienten der L als rationale Functionen der Grössen (s'_a, z_a), (s''_a, z_a), ... $(s_a^{(n-1)}, z_a)$ und (b_1, a_1), (b_2, a_2), ... (b_ν, a_ν). Da diese Functionen, wie sich aus der Theorie der linearen Gleichungen ergiebt, in Bezug auf s'_a, s''_a, ... $s_a^{(n-1)}$ symmetrisch sind, und die symmetrischen Functionen dieser Grössen sich rational durch die Coefficienten der verschiedenen Potenzen der Gleichung

$$(1^a.) \qquad F(\overset{n}{s}, \overset{m}{z_a}) = 0$$

und durch s_a ausdrücken lassen, so ergiebt sich schliesslich der Satz:

Die Constanten in der rationalen Function $f(s,z)$, welche dadurch bestimmt wird, dass sie in den gegebenen Punkten (s_1, z_1), (s_2, z_2), ... (s_m, z_m) unendlich gross erster Ordnung, sonst überall endlich, und in den gegebenen Punkten (b_1, a_1), (b_2, a_2), ... (b_ν, a_ν) unendlich klein erster Ordnung wird, lassen sich als rationale Functionen dieser beiden Reihen von Grössenpaaren darstellen, deren Coefficienten ihrerseits rational aus den Constanten der Gleichung (1.) *zusammengesetzt sind.*

Wenn $m > p$, so ist nach (R. A. F. §. 5 u. 8) die Bestimmung einer rationalen Function gemäss den obigen Bedingungen stets möglich, und es ergiebt sich $\nu = m - p$, so wie dass der Zähler derselben noch ausserdem in p Punkten verschwindet.

3.

Es sei

$$(1.) \qquad U = \int \frac{\varphi(\overset{n-2}{s}, \overset{m-2}{z})}{\frac{\partial F}{\partial s}} dz$$

irgend ein Integral erster Gattung (R. A. F. §. 9), und k irgend einer der sich nicht aufhebenden Verzweigungspunkte, so ist $\frac{\partial^\lambda U}{\partial k^\lambda}$ in der Fläche T überall ausser in k endlich und hat in der Umgebung von k die Form

$$(2.) \qquad \frac{\partial^\lambda U}{\partial k^\lambda} = c_\lambda (z-k)^{-\frac{2\lambda-1}{2}} + c_{\lambda-1}(z-k)^{-\frac{2\lambda-3}{2}} + \cdots + c_1 (z-k)^{-\frac{1}{2}} + G,$$

wo G nur positive ganzzahlige Potenzen von $(z-k)^{\frac{1}{2}}$ enthält.

Es seien nun $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_p$ p willkürliche, aber feste Punkte der Fläche T, so lässt sich eine rationale Function $\chi_\lambda(s, z)$ derart bestimmen, dass der Nenner derselben in k unendlich klein der Ordnung $2\lambda-1$, in den Punkten ε unendlich klein erster Ordnung wird, während ihr Zähler für die noch übrigen Nullpunkte des Nenners von gleicher Ordnung wie dieser verschwindet. Alsdann enthält der Zähler noch 2λ willkürliche Constanten (R. A. F. §. 8), über welche wir folgendermassen verfügen. In der Umgebung von k hat $\chi_\lambda(s, z)$ die Form:

$$(3.)\quad \chi_\lambda(s,z) = (z-k)^{-\frac{2\lambda-1}{2}}\left(e_0 + e_1(z-k)^{\frac{1}{2}} + e_2(z-k)^{\frac{2}{2}} + \cdots + e_{2\lambda-2}(z-k)^{\frac{2\lambda-2}{2}}\right) + H,$$

wo H nur positive ganzzahlige Potenzen von $(z-k)^{\frac{1}{2}}$ enthält. Wir setzen nun

$$(4.)\quad \begin{cases} e_1 = e_3 = \cdots = e_{2\lambda-3} = 0, \\ e_0 = c_\lambda, \quad e_2 = c_{\lambda-1}, \quad \ldots \quad e_{2\lambda-2} = c_1. \end{cases}$$

Dieses giebt im Ganzen $2\lambda-1$ Bedingungen, gerade so viel, als zulässig sind.

Es ist alsdann

$$\frac{\partial^\lambda U}{\partial k^\lambda} - \chi_\lambda(s, z)$$

in den Punkten ε unendlich gross erster Ordnung, sonst aber überall endlich. — Sind daher $t_1, t_2, \ldots t_p$ Integrale zweiter Gattung von der Beschaffenheit, dass t_ν in ε_ν unendlich gross erster Ordnung, sonst überall endlich ist, sind ferner $U_1, U_2, \ldots U_p$ ein System linearunabhängiger Integrale erster Gattung, so dass

$$U_\alpha = \int \frac{\varphi_\alpha(\overset{n-2}{s}, \overset{m-2}{z})}{\frac{\partial F}{\partial s}} dz,$$

so ist (R. A. F. §. 5)

$$(5.)\quad \frac{\partial^\lambda U}{\partial k^\lambda} - \chi_\lambda = \delta_{\lambda 1} t_1 + \delta_{\lambda 2} t_2 + \cdots + \delta_{\lambda p} t_p + \gamma_{\lambda 1} U_1 + \gamma_{\lambda 2} U_2 + \cdots + \gamma_{\lambda p} U_p + \text{Const.},$$

wo die Grössen γ und δ Constanten bedeuten.

4.

Die Grössen γ, δ in Gl. (5.) vor. No. lassen sich, wenn die Function χ_λ und die Integrale t_ν gebildet sind, auf algebraischem Wege berechnen. — Differentiiren wir daher die Gleichung (5.) vor. No. nach z, und bringen die rationalen Functionen von (s, z) auf beiden Seiten der erhaltenen Gleichung

auf die Form der Gl. (2.) No. 2., so ergeben sich, wegen der vorausgesetzten Irreductibilität der Gl. (1.) No. 1., n Gleichungen, welche die Grössen γ, δ linear enthalten. Da diese Gleichungen identisch für jeden Werth von z bestehen, so resultiren aus denselben lineare Gleichungen für die Grössen γ, δ, welche für dieselben bestimmte Werthe liefern, da die Existenz der Gl. (5.) vor. No. bereits erwiesen. Sind (σ_ν, ζ_ν) die dem Punkte ε_ν zugehörigen Werthenpaare (s, z), so wie σ der dem k zugehörige Werth von s, so folgt aus der Bildungsweise der rationalen Functionen χ_λ und $\frac{dt_\nu}{dz}$ (R. A. F. §. 8) nach dem Satze in No. 2., dass die Coefficienten dieser Functionen sich rational aus den Coefficienten von $\varphi(s,z)$, $F(s,z)$ und ihren Ableitungen nach k und aus (σ, k) und den (σ_ν, ζ_ν) zusammensetzen lassen. Ferner sind die Coefficienten der obenerwähnten linearen Gleichungen für die γ, δ rational aus den Coefficienten von $\varphi(s,z)$, $F(s,z)$ und deren Ableitungen nach k, ferner aus den Coefficienten von $\chi(s,z)$, $\frac{dt_\nu}{dz}$, $\frac{dU_\nu}{dz}$ zusammengesetzt. Hieraus folgt, dass die Grössen γ, δ sich rational aus den Coefficienten von $\varphi(s,z)$, $F(s,z)$ und deren Ableitungen nach k, ferner aus den Coefficienten von $\varphi_\lambda(s,z)$, und aus (σ, k) und den (σ_ν, ζ_ν) zusammensetzen.

5.

Es sei K der Periodicitätsmodul von U an einem bestimmten Querschnitt, T_ν, K_ν resp. die Periodicitätsmoduln von t_ν, U_ν an demselben Querschnitt, so folgt aus Gl. (5.) No. 3:

$$(1.)\quad \frac{\partial^\lambda K}{\partial k^\lambda} = \delta_{\lambda 1} T_1 + \delta_{\lambda 2} T_2 + \cdots + \delta_{\lambda p} T_p + \gamma_{\lambda 1} K_1 + \gamma_{\lambda 2} K_2 + \cdots + \gamma_{\lambda p} K_p.$$

Nehmen wir für λ successive 0, 1, 2, ... $2p$ und eliminiren aus den $2p+1$ Gleichungen T_1, T_2, ... T_p, K_1, K_2, ... K_p, so erhält man eine Gleichung der Form

$$(2.)\quad \beta_{2p} \frac{\partial^{2p} K}{\partial k^{2p}} + \beta_{2p-1} \frac{\partial^{2p-1} K}{\partial k^{2p-1}} + \cdots + \beta_0 K = 0.$$

Dieses ist eine lineare Differentialgleichung $2p^{\text{ter}}$ Ordnung, in welcher k als unabhängige Variable gilt, und welcher die $2p$ Periodicitätsmoduln von U genügen. Die Coefficienten β sind nach voriger No. rationale Functionen der Coefficienten in $\varphi(s,z)$, $F(s,z)$ und deren Ableitungen nach k, der Coefficienten von $\varphi_\lambda(s,z)$ und der Grössen (σ, k) und (σ_ν, ζ_ν). Allein die Perio-

dicitätsmoduln von U sind über gewisse Querschnitte erstreckte Integrale, und daher durch die Coefficienten in $\varphi(s, z)$, $F(s, z)$ vollkommen bestimmt, sobald die Querschnitte gegeben sind, und es lassen sich die Verhältnisse der Coefficienten β aus diesen Periodicitätsmoduln und ihren Ableitungen ohne Zuhülfenahme anderer Grössen zusammensetzen (s. meine Abh. B. 66 d. J. No. 2). Hieraus folgt, dass die Verhältnisse der Coefficienten β nur rationale Functionen der Coefficienten in $\varphi(s, z)$, $F(s, z)$ und deren Ableitungen nach k sind.

Wenn zwischen den Grössen $T_1, T_2, \dots T_p, K_1, K_2, \dots K_p$ besondere Beziehungen bestehen, so werden, wenn man für λ in Gl. (1.) successive $0, 1, 2, \dots q$ setzt, wo $q < 2p$, aus diesen $q+1$ Gleichungen sich schon jene Grössen eliminiren lassen, und es ergiebt sich alsdann eine Differentialgleichung niedrigerer als $2p^{\text{ter}}$ Ordnung, welcher die sämmtlichen Periodicitätsmoduln von U genügen.

Das in dieser No. entwickelte Theorem ist eine Verallgemeinerung eines auf die hyperelliptischen Integrale bezüglichen in meiner Arbeit B. 71 d. J. No. 8 und 11.

6.

Jacobi hat in diesem Journal B. 36 für das elliptische $\vartheta(0)$ als Function von $\log q = -\pi \frac{K'}{K}$ eine Differentialgleichung entwickelt, welche in Bezug auf $\vartheta(0)$ als abhängige Variable von der dritten Ordnung, in Bezug auf $\vartheta(0)$ und seine Ableitungen nach $\log q$ vom 14ten Grade, und mit rein numerischen Coefficienten behaftet ist.

Fasst man dagegen $\vartheta(0)$ als Function des Moduls k auf, so ist die Differentialgleichung, welcher $\vartheta(0)$ genügt, bei weitem einfacher. Aus der Gleichung

$$(1.)\qquad \vartheta(0) = \sqrt{\frac{2K}{\pi}}$$

und der bekannten Differentialgleichung

$$(k-k^3)\frac{d^2K}{dk^2}+(1-3k^2)\frac{dK}{dk}-kK = 0$$

oder

$$(2.)\qquad \frac{d}{dk}\left[kk'^2\frac{dK}{dk}\right]-kK = 0,$$

folgt nämlich, wenn wir mit *Jacobi*

$$\vartheta(0) = y$$

setzen

$$(3.)\qquad \frac{d}{dk}\left[kk'^2\frac{dy^2}{dk}\right]-ky^2 = 0.$$

Wenn man wiederum aus dieser Gleichung die Differentialgleichung dritter Ordnung von *Jacobi* herleiten will, so folgt zunächst aus Gl. (2.), welcher K und K' genügen,

$$\frac{d}{dk}\left(\frac{K'}{K}\right) = \frac{-\pi}{2kk'^2K^2},$$

also

$$(4.)\qquad \frac{d\log q}{dk} = \frac{2}{kk'^2y^4}.$$

Daher ergiebt die Gleichung (3.)

$$(5.)\qquad 8\cdot\frac{d}{d\log q}\left[\frac{1}{y^3}\frac{dy}{d\log q}\right]-k^2k'^2y^6 = 0.$$

Differentiirt man diese Gleichung unter Anwendung der Gl. (4.) nach $\log q$, und eliminirt k aus der entstandenen Gleichung und der Gleichung (5.), so erhält man die Differentialgleichung dritter Ordnung von *Jacobi*.

Von dieser Differentialgleichung lässt sich, weil sie den Modul k nicht enthält, unmittelbar auf die Theorie der Transformation der elliptischen Functionen Anwendung machen, wie *Jacobi* l. c. gezeigt hat. Wir wollen nun im Folgenden für $\vartheta(0, 0, \dots 0)$ als Function der Periodicitätsmoduln a_{ik} algebraische Gleichungen zwischen der Function und ihren partiellen Ableitungen nach den a_{ik} herleiten, welche ebenfalls mit rein numerischen Coefficienten behaftet sind. Diese erscheinen als die Verallgemeinerung der Differentialgleichung dritter Ordnung von *Jacobi* und lassen ebenfalls, da sie von der Wahl des Querschnittssystems unabhängig sind, unmittelbare Anwendung auf die Transformation der *Abel*schen Functionen zu.

Da jedoch diese Relationen nur unter Voraussetzung der zwischen den Periodicitätsmoduln bestehenden Abhängigkeit gelten, so scheinen uns für manche andere Zwecke, als die sich auf die Transformation beziehenden, solche Relationen den Vorzug zu verdienen, in welchen $\vartheta(0, 0, \dots 0)$ als Function von einander unabhängiger Grössen auftritt. Wir lassen daher die Herleitung von Differentialgleichungen für $\vartheta(0, 0, \dots 0)$ folgen, in welchen die sich nicht aufhebenden Verzweigungspunkte als unabhängige Variable auftreten; diese Differentialgleichungen erscheinen als Verallgemeinerung der Differentialgleichung (3.).

7.

Die Differentialgleichungen der erstgenannten Art, nämlich die zwischen $\vartheta(0, 0, \ldots 0)$ und seinen partiellen Ableitungen nach den Periodicitätsmoduln, lassen sich durch rein algebraische Eliminationen erhalten, ohne Kenntniss des Ausdruckes von $\vartheta(0, 0, \ldots 0)$ durch die Klassenmoduln oder der Differentialgleichungen, welchen die Periodicitätsmoduln als Functionen derselben Grössen genügen, wenn man von den in meiner vorangehenden Arbeit angestellten Betrachtungen Gebrauch macht. Diese Arbeit wollen wir kurz mit $\mathfrak{A}$. citiren.

Es sei $u_1, u_2, \ldots u_p$ ein System linear unabhängiger Integrale erster Gattung, von der Art, dass der Periodicitätsmodul von u_α am Querschnitte a_α gleich πi, an allen übrigen a gleich Null, am Querschnitte b_ν gleich $a_{\alpha\nu}$ (und $a_{\alpha\nu} = a_{\nu\alpha}$), (R. A. F. §. 18—21), so ist bekanntlich

$$E_{\lambda\mu}(s, z) = \frac{\partial^2 \log \vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{\mathfrak{a}}}(u_\alpha)\right)}{\partial u_\lambda \partial u_\mu}$$

eine rationale Function von (s, z).

Ist μ ein beliebiger Punkt der Fläche T, und $\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \ldots \alpha_p^{(0)}$ das mit μ durch die Gleichung

$$\psi_\mu(s, z) = 0$$

verknüpfte Hauptsystem (s. m. $\mathfrak{A}$. No. 1—6), und disponirt man über die in den u_α enthaltenen Constanten derart, dass man setzt:

$$(1.)\qquad u_\alpha = \int_\mu^{\xi} du_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots p,$$

wo ξ der einem beliebigen Werthenpaare (s, z) entsprechende Punkt der Fläche T ist, so wird $\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{\mathfrak{a}}}(u_\alpha)\right)$ in den Punkten $\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \ldots \alpha_p^{(0)}$ unendlich klein erster Ordnung (s. m. $\mathfrak{A}$. No. 3 Gl. (2.)), also $E_{\lambda\mu}(s, z)$ in denselben Punkten unendlich gross zweiter Ordnung, sonst aber überall endlich. Die Function $\psi_\mu(s, z)$ wird ebenfalls in diesen Punkten unendlich klein zweiter Ordnung (s. m. $\mathfrak{A}$. No. 2), also ist

$$(2.)\qquad G_{\lambda\mu}(s, z) = E_{\lambda\mu}(s, z)\psi_\mu(s, z)$$

eine ganze rationale Function von (s, z). Da u_α für jeden Punkt der Fläche T endlich ist, so ist für $z = \infty$ oder $s = \infty$ $G_{\lambda\mu}(s, z)$ ebenso oft unendlich wie ψ_μ, demnach ist $G_\mu(s, z)$ wie ψ_μ in Bezug auf s vom Grade $n-1$, in Bezug auf z vom Grade $m-1$, also

$$(3.)\qquad G_{\lambda\mu}(s, z) = G_0 + G_1 s + G_2 s^2 + \cdots + G_{n-1} s^{n-1},$$

wo $G_0, G_1, \ldots G_{n-1}$ ganze rationale Functionen $m-1^{\text{ten}}$ Grades von z sind.

Wir setzen zur Abkürzung

$$(4.)\qquad \left[\frac{\partial^q \log \vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{\mathfrak{a}}}(u_{\mathfrak{a}})\right)}{\partial u_{\mathfrak{a}}\partial u_{\mathfrak{b}}\partial u_{\mathfrak{c}}\dots}\right]_{\xi=\mu} = L_{\mathfrak{abc}\dots},$$

wo q die Anzahl der u, nach denen differentiirt wird, bedeutet. Differentiirt man nun die Gleichung (3.), indem man die Identität:

$$(5.)\qquad \frac{dE_{\lambda\mu}(s,z)}{dz} = \sum_{1}^{p}{}_{\mathfrak{b}}\, \frac{\partial^3 \log \vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{\mathfrak{a}}}(u_{\mathfrak{a}})\right)}{\partial u_\lambda \partial u_\mu \partial u_{\mathfrak{b}}}\, \frac{du_{\mathfrak{b}}}{dz}$$

anwendet, mn mal, und setzt $\xi=\mu$, so bilden diese Gleichungen mit Gl. (3.) (ebenfalls für $\xi=\mu$) zusammen $mn+1$ Gleichungen, aus welchen die mn Constanten der Functionen G_0, G_1, ... G_{n-1} eliminirt werden können. Das Resultat der Elimination ist eine Gleichung zwischen den Grössen $L_{\mathfrak{abc}\dots}$, in welchen die Ordnung der Differentiation höchstens gleich $mn+2$, und zwischen den Coefficienten von $\frac{du_{\mathfrak{a}}}{dz}$ und ψ_μ und der Grösse μ. Bezeichnen wir diese Gleichung mit

$$(A) = 0.$$

Bildet man die ferneren Ableitungen der Gleichung (3.) bis zur $mn+l^{\text{ten}}$ Ordnung, setzt $\xi=\mu$ und eliminirt aus jeder derselben mit Hülfe von mn der ersten Gleichungen die Constanten in G_0, G_1, ... G_{n-1}, so mögen die neuentstandenen Gleichungen mit

$$(A')=0,\qquad (A'')=0,\qquad \dots\qquad (A^{(l)})=0$$

bezeichnet werden. Dieselben werden theilweise identisch erfüllt, theilweise von einander abhängig sein können. Immer aber wird für ein hinlänglich grosses l eine genügende Anzahl von Gleichungen vorhanden sein, um mit Hülfe der Gleichungen, welche zwischen den α und μ bestehen (s. m. A. No. 5), und der Gl. (1.) No. 1 die Grösse μ, die Coefficienten von $F(s,z)$, $\frac{du_{\mathfrak{a}}}{dz}$ und von ψ_μ zu eliminiren. Das Resultat ist eine Gleichung zwischen den Grössen $L_{\mathfrak{abc}\dots}$, in welchen die Ordnung der Differentiation höchstens gleich $mn+l+2$, mit rein numerischen Coefficienten.

Solcher Gleichungen erhält man $\frac{p(p+1)}{2}$, wenn man für λ, μ alle zulässigen Combinationen macht.

8.

Da $\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{\mathfrak{a}}}(u_a)\right)$ und jede ihrer Ableitungen gerader Ordnung eine gerade Function der u, jede Ableitung ungerader Ordnung eine ungerade Function derselben Grössen ist, so verschwinden die letzteren, wenn in denselben $u_1 = u_2 = \cdots = u_p = 0$ gesetzt wird. Daher verschwinden auch die Ableitungen ungerader Ordnung von $\log \vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{\mathfrak{a}}}(u_a)\right)$ für dieselben Werthe.

Die bekannten Relationen

$$(1.)\qquad \frac{4\partial\vartheta}{\partial a_{\mu\mu}} = \frac{\partial^2\vartheta}{\partial u_\mu^2},\quad \frac{2\partial\vartheta}{\partial a_{\mu\mu'}} = \frac{\partial^2\vartheta}{\partial u_\mu\,\partial u_{\mu'}}$$

lassen sich folgendermassen schreiben:

$$(2.)\qquad \begin{cases} \dfrac{4\partial\log\vartheta}{\partial a_{\mu\mu}} = \dfrac{\partial^2\log\vartheta}{\partial u_\mu^2} + \left(\dfrac{\partial\log\vartheta}{\partial u_\mu}\right)^2 \\[2ex] \dfrac{2\partial\log\vartheta}{\partial a_{\mu\mu'}} = \dfrac{\partial^2\log\vartheta}{\partial u_\mu\,\partial u_{\mu'}} + \dfrac{\partial\log\vartheta}{\partial u_\mu}\,\dfrac{\partial\log\vartheta}{\partial u_{\mu'}}. \end{cases}$$

Für $u_1 = u_2 = \cdots = u_p = 0$ gehen die Relationen (2.) über in

$$(3.)\qquad \begin{cases} \dfrac{4\partial\log\vartheta(0,0,\dots 0)}{\partial a_{\mu\mu}} = \left[\dfrac{\partial^2\log\vartheta}{\partial u_\mu^2}\right]_{u=0}, \\[2ex] \dfrac{2\partial\log\vartheta(0,0,\dots 0)}{\partial a_{\mu\mu'}} = \left[\dfrac{\partial^2\log\vartheta}{\partial u_\mu\,\partial u_{\mu'}}\right]_{u=0}, \end{cases}$$

Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \dots$ unter einander verschieden, so folgt aus der Form der Thetafunction, als Verallgemeinerung von (1.),

$$(4.)\qquad \frac{2^\lambda\partial^\lambda\vartheta}{\partial a_{\mathfrak{ab}}\,\partial a_{\mathfrak{cd}}\dots} = \frac{\partial^{2\lambda}\vartheta}{\partial u_{\mathfrak{a}}\,\partial u_{\mathfrak{b}}\,\partial u_{\mathfrak{c}}\,\partial u_{\mathfrak{d}}\dots},$$

wo 2λ die Anzahl der u, nach welchen auf der rechten Seite differentiirt wird, bedeutet. Sind irgend welche unter den Grössen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \dots$ einander gleich, so wird der Exponent von 2 auf der linken Seite der Gleichung (4.) um eine leicht bestimmbare Zahl grösser.

Aus dieser Gleichung folgt, dass man die partiellen Ableitungen gerader Ordnung von $\log\vartheta$ für $u_1 = u_2 = \cdots = u_p = 0$ als rationale Functionen mit numerischen Coefficienten der Ableitungen von $\vartheta(0,0,\dots 0)$ nach den a_{ik} oder auch als ganze rationale Functionen der Ableitungen von $\log\vartheta(0,0,\dots 0)$ nach den a_{ik} darstellen kann.

Mit Hülfe dieser Relationen führen wir die zwischen den Grössen $L_{\mathfrak{abc}\dots}$ in voriger No. gefundenen Beziehungen in Gleichungen zwischen den

Ableitungen von $\log\vartheta(0, 0, \ldots 0)$ nach den Periodicitätsmoduln a_{ik} über, wie sie oben angekündigt worden.

Da jedes eigentliche System (α), welches mit μ durch eine Gleichung $\psi_\mu = 0$ verknüpft ist, als Hauptsystem gelten kann, wenn man das Querschnittssystem a, b zweckmässig wählt (s. m. A. No. 5), so unterliegt das in voriger und dieser No. beschriebene Verfahren nicht der Schwierigkeit, welche mit dem Aussondern des Hauptsystems verbunden ist (s. m. A. No. 5 und 6). Wählt man vielmehr ein beliebiges eigentliches System (α) als Hauptsystem und bildet mit dem zugehörigen ψ_μ, d. h. demjenigen ψ_μ, durch welches das System (α) mit μ verknüpft ist, die Gleichung (2.) vor. No., so erhält man die oben entwickelten Relationen unter Voraussetzung der entsprechenden Querschnittszerlegung.

Da jedoch die den verschiedenen eigentlichen Systemen (α) zugehörigen ψ_μ sich nur durch die in den Coefficienten derselben auftretenden Grössensysteme (α) unterscheiden, die letzteren aber bei der oben angedeuteten Elimination herausfallen, so folgt: *Die gefundenen Relationen bleiben ungeändert für jede beliebige Art der Querschnittszerlegung.*

9.

Um für die elliptischen Functionen auf diesem Wege die Rechnung durchzuführen, sei

$$(1.)\qquad s^2 = R(z),$$

wo

$$R(z) = (1-z^2)(1-k^2z^2),$$

ferner A der Periodicitätsmodul von $\int\frac{dz}{s}$ am Querschnitte a, und es werde gesetzt

$$(2.)\qquad u = \frac{i\pi}{A}\int_\mu^\xi \frac{dz}{s},$$

so hat u am Querschnitte a den Periodicitätsmodul πi, am Querschnitte b heisse er τ. Es bleibt hierbei unentschieden, wie die beiden Querschnitte a und b zu legen sind.

Soll $\vartheta\left(\int_\mu^\xi du - \int_\alpha^\eta du + P\right)$, wo P einen der Werthe

$$\frac{\pi i}{2},\quad \frac{\tau}{2},\quad \frac{\pi i}{2}+\frac{\tau}{2}$$

bedeutet, verschwinden für $\xi = \eta$, wo η ein beliebiger Punkt der Fläche T ist, so ist bekanntlich

$$(3.) \quad \int_{\mu}^{\alpha} du + P \equiv \frac{\pi i}{2} + \frac{\tau}{2},$$

also

$$(4.) \quad 2\int_{\mu}^{\alpha} du \equiv 0.$$

Die den drei verschiedenen Systemen halber Periodicitätsmoduln P nach Gl. (3.) zugehörigen Werthe α, oder die Functionen ψ_μ, durch welche sie mit μ verknüpft sind, können also, wie aus der Gleichung (4.) folgt, nach dem *Abel*schen Theorem in diesem Falle folgendermassen gefunden werden:

Es sei (s_μ, μ) das dem Punkte μ zugehörige Werthsystem (s, z), so setzen wir

$$(5.) \quad \psi_\mu(s, z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + cs$$

und bestimmen die Constanten a und c durch folgende Bedingungsgleichungen:

$$(6.) \quad \psi_\mu(-s_\mu, \mu) = 0, \quad \psi'_\mu(-s_\mu, \mu) = 0,$$

wo $\psi'_\mu(s, z)$ die totale Ableitung von $\psi_\mu(s, z)$ nach z bedeutet.

Die Bedingungen, dass $\psi_\mu(s, z)$ in α unendlich klein zweiter Ordnung wird, sind, wenn (s_α, α) das dem Punkte α zugehörige Werthsystem (s, z) ist,

$$(7.) \quad \psi(s_\alpha, \alpha) = 0, \quad \psi'(s_\alpha, \alpha) = 0.$$

Die Elimination von a_0, a_1, a_2, c aus den Gleichungen (6.) und (7.) ergiebt für α folgende Gleichung:

$$(8.) \quad (\alpha - \mu)[2(s_\mu + s_\alpha) + (\alpha - \mu)(s'_\mu - s'_\alpha)] = 0,$$

wo s' wieder die Ableitung von s nach z bedeutet. Die Gleichungen (6.) und (7.) ergeben alsdann die Verhältnisse der Coefficienten von $\psi_\mu(s, z)$.

Unter Voraussetzung irgend einer Lage der Querschnitte a und b, sei α diejenige Wurzel der Gleichung (8.), für welche $\vartheta\left(\int_{\mu}^{\xi} du\right)$ verschwindet, also das Hauptsystem des allgemeinen Falles, welches sich hier auf ein Glied reducirt, so ist in diesem Falle

$$(9.) \quad E(s, z) = \frac{d^2 \log \vartheta(u)}{du^2}$$

und

$$(10.) \quad G(s, z) = G_0 + G_1 s,$$

wo G_0 vom zweiten, G_1 von nullten Grade ist.

Bildet man die Ableitungen der Gleichung (10.) nach z bis zur zehnten Ordnung, und setzt $\xi = \mu$, so kann man aus den ersten 4 der 11 Gleichungen die Coefficienten von G_0 und G_1 bestimmen, diese in die nächstfolgenden substituirt liefern 4 von einander unabhängige Gleichungen, aus welchen man mit Hinzuziehung von Gleichung (8.) k, $\frac{i\pi}{A}$, μ eliminiren kann. Das Eliminationsresultat ist eine Gleichung zwischen L_4, L_6, L_8, L_{10}, wenn man setzt:

$$(11.)\qquad \left[\frac{d^a \log\vartheta(u)}{du^a}\right]_{u=0} = L_a.$$

Nach der vorigen No. lassen sich diese Grössen durch die Ableitungen von $\log\vartheta(0)$ nach τ darstellen. Die Differentialgleichung für $\vartheta(0)$, welche man erhält, ist fünfter Ordnung. Sie ergiebt sich aus der *Jacobi*schen, für $\tau = \log q$, durch zweimalige Differentiation nach τ.

10.

Um die Differentialgleichung herzuleiten, welcher $\vartheta(0, 0, \ldots 0)$ als Function eines der sich nicht aufhebenden Verzweigungspunkte genügt, wenden wir den Ausdruck von $\frac{\partial \log\vartheta(0, 0, \ldots 0)}{\partial k}$ als Function von k an.

Es bedeute nämlich U_1, U_2, $\ldots$ U_p wie in No. 3 ein System linear-unabhängiger Integrale erster Gattung, und $A_a^{(\mu)}$ den Periodicitätsmodul von U_a am Querschnitte a_μ; setzt man ferner die Determinante

$$\begin{vmatrix} A_1^{(1)}, & A_2^{(1)}, & \ldots & A_p^{(1)} \\ A_1^{(2)}, & A_2^{(2)}, & \ldots & A_p^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^{(p)}, & A_2^{(p)}, & \ldots & A_p^{(p)} \end{vmatrix} = \nabla,$$

so ist (s. m. A. No. 8 Gl. (8.) und No. 9 Gl. (4.))

$$(1.)\qquad \frac{\partial \log\vartheta(0, 0, \ldots 0)}{\partial k} = \tfrac{1}{2}\frac{\partial \log\nabla}{\partial k} + R,$$

wo R auf algebraische Weise sowohl explicite von k als auch von den Coefficienten von $\varphi_a(s, z)$ und $F(s, z)$ abhängt.

Nach No. 5 Gleichung (1.) ist:

$$(2.)\qquad \frac{\partial^\lambda A_a^{(\mu)}}{\partial k^\lambda} = \delta_{\lambda 1}^{(a)} T_1^{(\mu)} + \delta_{\lambda 2}^{(a)} T_2^{(\mu)} + \cdots + \delta_{\lambda p}^{(a)} T_p^{(\mu)} + \gamma_{\lambda 1}^{(a)} A_1^{(\mu)} + \gamma_{\lambda 2}^{(a)} A_2^{(\mu)} + \cdots + \gamma_{\lambda p}^{(a)} A_p^{(\mu)},$$

wo $T_a^{(\mu)}$ den Periodicitätsmodul von t_a am Querschnitte a_μ bedeutet, und γ, δ sich rational aus den Coefficienten von $\varphi_a(s, z)$, $F(s, z)$ und deren Ableitungen nach k, und aus (σ, k) und den (σ_ν, ζ_ν) zusammensetzen lassen.

Differentiiren wir die Gleichung (1.) $2p^2$ mal nach k, und setzen für die Ableitungen von $A_a^{(\mu)}$ ihre Werthe aus (2.), so kann man aus den entstandenen $2p^2+1$ Gleichungen die $2p^2$ Grössen $A_a^{(\mu)}$, $T_a^{(\mu)}$ eliminiren. Das Resultat der Elimination ist eine algebraische Gleichung zwischen den Ableitungen von $\vartheta(0, 0, \dots 0)$ als Function von k, deren Coefficienten algebraisch aus den Coefficienten von $\varphi_a(s, z)$, $F(s, z)$ und deren Ableitungen nach k, und aus (σ, k) und den (σ_ν, ζ_ν) zusammengesetzt sind.

Differentiirt man diese Gleichung p mal, so kann man aus den entstandenen $p+1$ Gleichungen, unter Zuhülfenahme der Gleichungen $F(\sigma_\nu, \zeta_\nu)=0$, die p Grössenpaare (σ_ν, ζ_ν) eliminiren, und erhält schliesslich als die gesuchte Verallgemeinerung der Differentialgleichung (3.) in No. 6. eine Differentialgleichung

$$(3.)\qquad M_k = 0,$$

deren Coefficienten sich algebraisch aus den Coefficienten von $\varphi_a(s, z)$, $F(s, z)$ und deren Ableitungen nach k und aus (σ, k) zusammensetzen.

11.

Unter Voraussetzung der in No. 3 — 5 entwickelten Formeln und der Differentialgleichung (3.) vor. No. lassen sich die in No. 7 u. 8 behandelten Relationen zwischen den Ableitungen von $\log\vartheta(0, 0, \dots 0)$ nach den Periodicitätsmoduln a_{ik} auch auf folgende Weise herleiten.

Bekanntlich ist

$$(1.)\qquad u_a = \frac{i\pi}{\nabla}\sum_1^p{}_b \frac{\partial\nabla}{\partial A_b^{(a)}} U_b, \qquad a = 1,\ 2,\ \dots\ p$$

ein System linearunabhängiger Integrale erster Gattung von der Beschaffenheit, wie es in No. 7 gefordert wird.

Es werde vorausgesetzt, dass die Coefficienten von $\varphi_a(\overset{n-2}{s}, \overset{m-2}{z})$, als Functionen eines jeden der sich nicht aufhebenden Verzweigungspunkte, algebraischen Differentialgleichungen genügen, also beispielsweise, wie die Coefficienten von $F(s, z)$, algebraische Functionen von k sind. Da die Grössen $A_a^{(\mu)}$ nach No. 5 linearen Differentialgleichungen genügen, deren Coefficienten rationale Functionen der Coefficienten von $\varphi_a(s, z)$, $F(s, z)$ und deren Ableitungen nach k vorstellen, so sind auch die Coefficienten von $\frac{du_a}{dz}$ Functionen von k, welche algebraischen Differentialgleichungen genügen. — Unter derselben Voraussetzung ergiebt sich, dass die Coefficienten der Gleichung (3.) vor. No. als Functionen von k algebraischen Differentialgleichungen genügen.

Nun ist nach No. 5 Gl. (1.):

$$(2.)\qquad \frac{\partial^\lambda a_{\alpha\mu}}{\partial k^\lambda} = \delta_{\lambda 1}^{(\alpha)} T_1^{(\mu)} + \delta_{\lambda 2}^{(\alpha)} T_2^{(\mu)} + \cdots + \delta_{\lambda p}^{(\alpha)} T_p^{(\mu)} + \gamma_{\lambda 1}^{(\alpha)} a_{1\mu} + \gamma_{\lambda 2}^{(\alpha)} a_{2\mu} + \cdots + \gamma_{\lambda p}^{(\alpha)} a_{p\mu},$$

wo die Grössen γ, δ sich nach No. 4 rational aus den Coefficienten der Functionen $F(s, z)$, $\frac{du_\alpha}{dz}$ und ihrer Ableitungen nach k, und aus den Grössen (σ, k) und den (σ_ν, ζ_ν) zusammensetzen.

Es ist aber:

$$(3.)\qquad \frac{\partial \log \vartheta(0, 0, \dots 0)}{\partial k} = \sum_{ab} \frac{\partial \log \vartheta(0, 0, \dots 0)}{\partial a_{ab}} \frac{\partial a_{ab}}{\partial k}.$$

Differentiiren wir diese Gleichung bis zur l^{ten} Ordnung nach k, indem wir stets $\vartheta(0, 0, \dots 0)$ als Function der $a_{\mu\nu}$ und diese wieder als Functionen von k behandeln, und setzen in jeder dieser Gleichungen für die Ableitungen von $a_{\mu\nu}$ nach k deren Werthe aus Gl. (2.), so können wir l so gross wählen, dass wir aus den entstehenden $l+1$ Gleichungen, unter Zuhülfenahme der successiven Ableitungen der Gleichung (3.) vor. No. die Grössen (σ, k), (σ_ν, ζ_ν), $T_\alpha^{(\mu)}$, $a_{\mu\nu}$ und die Ableitungen von $\vartheta(0, 0, \dots 0)$ nach k eliminiren können. Die Coefficienten der resultirenden Gleichung zwischen den Ableitungen von $\vartheta(0, 0, \dots 0)$ nach den $a_{\mu\nu}$

$$(4.)\qquad (\mathcal{A}_k) = 0$$

hängen auf algebraische Weise ab von den Coefficienten von $F(s, z)$, $\frac{du_\alpha}{dz}$ und ihren Ableitungen nach k, ferner von den Coefficienten der Gl. (3.) vor. No. und ihren Ableitungen nach k. Mit Hülfe der successiven Ableitungen der einzelnen algebraischen Differentialgleichungen, welchen diese verschiedenen Grössen genügen, lassen sie sich alle aus der Gl. (4.) und deren Ableitungen eliminiren, und man erhält eine Gleichung

$$(5.)\qquad (\mathcal{A}'_k) = 0,$$

welche eine Relation zwischen den Ableitungen von $\vartheta(0, 0, \dots 0)$ nach den $a_{\mu\nu}$ ausdrückt, mit rein numerischen Coefficienten.

Den verschiedenen sich nicht aufhebenden Verzweigungspunkten k entsprechend ergiebt sich eine gewisse Anzahl von Relationen dieser Art.

Greifswald im März 1871.

Zur Integration der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

(Von Herrn *F. E. Prym* in Würzburg.)

Ein fundamentaler Satz der Functionentheorie lautet:

„Bezieht man die Punkte einer Kreisfläche durch Coordinaten x, y auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, so existirt zu dieser Kreisfläche immer eine und nur eine reelle Function u der Coordinaten x, y mit folgenden Eigenschaften:

I. Die Function u ist für die ganze Kreisfläche, den Rand einbegriffen, eine einwerthige und stetige Function des Ortes oder Punktes x, y und stimmt am Rande vollständig mit einer für den Rand willkürlich angenommenen, längs des Randes allenthalben stetigen Function überein.

II. Die sämmtlichen Derivirten der Function u von angebbarer Ordnung sind im Innern der Kreisfläche, d. h. bis in jede endliche Nähe zum Rande, einwerthig und stetig, und die zweiten Derivirten genügen der Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$“.

Das bekannte Verfahren, dessen man sich bei mathematisch-physikalischen Untersuchungen bedient, um eine Function u mit den erwähnten Eigenschaften zu erhalten *), beruht auf der unbewiesenen Voraussetzung, dass jede einwerthige, stetige, reelle, und mit der Periode 2π periodische Function $f(\varphi)$ des reellen Argumentes φ sich für jeden Werth des Argumentes φ durch eine *Fourier*sche Reihe darstellen lasse. Nur für den Fall, dass die Function $f(\varphi)$ auf der Strecke von $-\pi$ bis $+\pi$ nicht unendlich viele Maxima und Minima besitzt, hat *Dirichlet* (d. Journal Bd. 4) diesen letztgenannten Satz bewiesen, und die Untersuchungen von *Riemann* in der Arbeit: *„Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe“*, wie manche wichtige Aufschlüsse über die zur Darstellbarkeit erforderlichen Bedingungen man ihnen auch verdankt, haben dennoch gerade für diejenigen

---

*) Vergleiche z. B.: *„Das Dirichletsche Princip in seiner Anwendung auf die Riemannschen Flächen, von Carl Neumann“, pag. 5 u. flg.*

Functionen, die unbeschadet der Stetigkeit unendlich oft oscilliren, die Darstellbarkeit nicht bewiesen. Es beruht auf einem Irrthume, wenn Herr *Hankel* in einer kürzlich erschienenen Schrift*) annimmt, der Beweis für die Darstellbarkeit solcher Functionen durch trigonometrische Reihen sei von *Riemann* geliefert worden, und zur Bestätigung dieser seiner Ansicht auf art. 10 der oben citirten *Riemann*schen Arbeit verweist. In dem genannten Artikel hat *Riemann* nur bewiesen, dass, wenn die Function $f(\varphi)$ durchweg endlich bleibt und eine Integration zulässt, dann die Coefficienten der trigonometrischen Reihe zuletzt unendlich klein werden, womit für die Convergenz der Reihe noch nichts bewiesen ist. Im Gegentheile bemerkt *Riemann* ausdrücklich, mit Rücksicht auf die vorangegangene Untersuchung im art. 9, dass in diesem Falle die Convergenz der Reihe für einen bestimmten Werth von φ nur abhänge von dem Verhalten der Function $f(\varphi)$ in unmittelbarer Nähe dieses Werthes. Und in der That muss man, um über die Convergenz entscheiden zu können, sei es dass man sich dazu des im art. 9 unter III. gegebenen Satzes oder anderer Methoden bedienen will, über das Verhalten der Function $f(\varphi)$, auch wenn sie allenthalben stetig ist, noch weitere einschränkende Voraussetzungen treffen. Eine solche Voraussetzung würde z. B. die sein, dass die Function $f(\varphi)$ für jeden Werth φ einen endlichen Differentialquotienten besitzt, oder die von Herrn *Lipschitz* in seiner Arbeit über denselben Gegenstand (d. Journal Bd. 63, pag. 296—308) gemachte Annahme, dass der absolute Werth von $f(\varphi+\delta)-f(\varphi)$ mit positivem, abnehmendem δ schneller abnimmt als eine positive Potenz von δ, multiplicirt mit einer endlichen Constanten. Die Darstellbarkeit einer, nur der Bedingung der Stetigkeit unterworfenen Function $f(\varphi)$ durch eine trigonometrische Reihe ist also bis jetzt noch nicht bewiesen, und es kann folglich auf diese Annahme auch kein Beweis des im Anfange ausgesprochenen Satzes gestützt werden.

Zu den nachstehenden Betrachtungen führte mich die Vermuthung, dass die Unmöglichkeit, den obigen Satz allgemein zu beweisen, sobald man für u die bekannte Reihenentwicklung aufstellt, die auf dem Rande der Kreisfläche in eine *Fourier*sche Reihe übergeht, lediglich in der gewählten Ausdrucksform ihren Grund habe. Wenn man von einem Ausdrucke für u verlangt, er solle auf dem Rande selbst, seinem Werthe nach, mit einer für den Rand willkürlich angenommenen Function übereinstimmen, so verlangt man

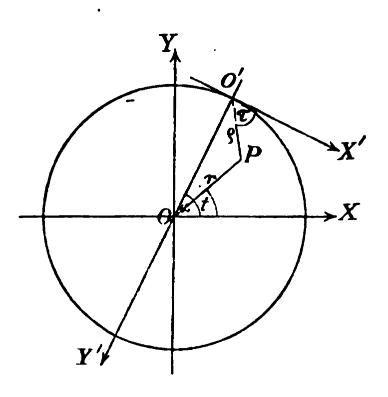
*) *„Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen, pag. 15 und pag. 33."*

eben zu viel. Es würde vollkommen genügen, wenn man von einem Ausdrucke in x, y, der die übrigen für u aufgestellten Eigenschaften besitzt, zeigen könnte, dass sein Werth, wenn der Punkt x, y sich einem Randpunkte unbegrenzt nähert, ohne Unterbrechung der Stetigkeit gegen den Werth convergirt, den die für den Rand willkürlich fixirte Function in dem betreffenden Randpunkte besitzt. Zur Durchführung dieser Untersuchung kann man die eben erwähnte Reihenentwicklung für u, die nach steigenden Potenzen des Radius vectors fortschreitet, nicht benutzen, dagegen führt die Anwendung einer andern, durch Summation der genannten Reihe entstehenden und schon von Herrn *C. Neumann* (d. Journal Bd. 59 pag. 364) aufgestellten Ausdrucksform zu dem gewünschten Ziele und damit zu einem strengen Beweise des ausgesprochenen Satzes. Dies zu zeigen, ist der Zweck der folgenden Seiten. Ich habe mich dabei nicht auf den Fall beschränkt, wo die für den Rand gegebene Function allenthalben stetig ist, sondern auch gleich den Fall mit berücksichtigt, wo dieselbe eine endliche Anzahl von Stetigkeitsunterbrechungen, hervorgerufen durch sprungweise Aenderungen um endliche Grössen, besitzt. Die Untersuchung dieses letztern Falles lässt zugleich den innern Grund erkennen für die merkwürdige Erscheinung, dass eine convergente *Fourier*sche Reihe, die eine Function $f(\varphi)$ darstellt, für diejenigen Werthe α von φ, für die $f(\varphi)$ springt, den Mittelwerth aus den Werthen $f(\alpha-0)$ und $f(\alpha+0)$ liefert. Andere Fälle bleiben hier ausgeschlossen; dagegen habe ich mit der obigen verwandte Fragen in den Kreis der Untersuchung eingeflochten.

Schliesslich bemerke ich noch, dass mir während der Ausarbeitung dieses Aufsatzes eine, im XV. Jahrgange der Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich (pag. 113—128) unter dem Titel: *„Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ *für die Fläche eines Kreises"* erschienene Abhandlung des Herrn *H. A. Schwarz* zukam, in der der Verfasser, unter Anwendung derselben, oben erwähnten Ausdrucksform für u, ebenfalls einen Beweis des zu Anfange aufgestellten Satzes geliefert hat. Da im Uebrigen meine Untersuchung, sowohl durch den Gang des Beweises als durch die angewandten Methoden, sich wesentlich von derjenigen des Herrn *Schwarz* unterscheidet, so habe ich ihre Veröffentlichung nicht für überflüssig gehalten.

1.

In einer Ebene sei ein Kreis vom Radius R gegeben (s. d. Figur). Den Mittelpunkt O desselben nehme man zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Coordinatensystems und wähle die Axen X, Y so, dass die Richtung der wachsenden Abscissen die Richtung der wachsenden Ordinaten zur Linken hat. Mit x, y bezeichne man die rechtwinkligen Coordinaten irgend eines Punktes P der Ebene, bezogen auf das System X, Y; mit r, t die Polarcoordinaten desselben Punktes, bezogen auf den Punkt O als Pol und die X-Axe als Polaraxe. Der Winkel t werde wachsend gezählt bei einer Drehung des Radius vectors r von der X-Axe durch den ersten Quadranten zur Y-Axe. Einen beliebig gewählten Punkt O' der Kreisperipherie, dessen rechtwinklige Coordinaten a, b, dessen Polarcoordinaten R, α seien, nehme man zum Anfangspunkte eines neuen rechtwinkligen Coordinatensystems X', Y'. Die Y'-Axe soll durch den Punkt O gehen, und $O'O$ soll die Richtung der wachsenden Ordinaten sein. Die X'-Axe wird dann im Punkte O' Tangente zum Kreise sein, und die Richtung der wachsenden Abscissen soll die schon fixirte Richtung der wachsenden Ordinaten zur Rechten haben. Mit x', y' bezeichne man die Coordinaten des Punktes P in Bezug auf das neue System, mit ϱ, τ die Polarcoordinaten desselben Punktes, bezogen auf ein Polarcoordinatensystem, dessen Pol der Punkt O', dessen Polaraxe die X'-Axe ist. Der Winkel τ werde wachsend gezählt bei einer Drehung des Radius vectors ϱ von der X'-Axe durch den ersten Quadranten zur Y'-Axe. Man hat dann zwischen den vier, dem Punkte P zukommenden Paaren von Coordinaten die folgenden Beziehungen:



$$x = r\cos t,\quad x = a + \sin\alpha\,.\,x' - \cos\alpha\,.\,y',\quad x' = \varrho\cos\tau,$$
$$y = r\sin t,\quad y = b - \cos\alpha\,.\,x' - \sin\alpha\,.\,y',\quad y' = \varrho\sin\tau.$$

Nach diesen Festsetzungen betrachte man zwei Functionen u und v der Coordinaten r, t, definirt durch die Gleichungen:

$$(1.)\quad \begin{cases} u = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\varphi=t-\pi}^{\varphi=t+\pi} f(\varphi)\,\frac{(R^2-r^2)\,d\varphi}{R^2-2Rr\cos(t-\varphi)+r^2}, \\ v = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\varphi=t-\pi}^{\varphi=t+\pi} f(\varphi)\,\frac{2Rr\sin(t-\varphi)\,d\varphi}{R^2-2Rr\cos(t-\varphi)+r^2}, \end{cases}$$

unter folgenden Voraussetzungen. Die Coordinaten r, t sollen einem Punkte P im Innern der Kreisfläche angehören, d. h. r ist kleiner als R vorausgesetzt. Das Symbol $f(\varphi)$ soll eine reelle, mit der Periode 2π periodische Function der reellen Variable φ bezeichnen, die, mit Ausnahme einer endlichen Anzahl p von Unstetigkeitsstellen in jedem Intervalle φ bis $\varphi+2\pi$, einwerthig und stetig ist, und deren Verhalten für die, durch die Congruenzen

$$\varphi \equiv c_1 (\operatorname{mod} 2\pi), \quad \varphi \equiv c_2 (\operatorname{mod} 2\pi), \quad \ldots, \quad \varphi \equiv c_p (\operatorname{mod} 2\pi)$$

festgelegten Unstetigkeitsstellen characterisirt sei durch die Gleichungen:

$$f(c_1+0)-f(c_1-0)=h_1, \quad f(c_2+0)-f(c_2-0)=h_2, \quad \ldots, \quad f(c_p+0)-f(c_p-0)=h_p,$$

wobei h_1, h_2, ..., h_p irgend welche reelle endliche Constante bezeichnen. Im Uebrigen sind der Function $f(\varphi)$ keinerlei Bedingungen aufgelegt, sie kann beliebig oft durch Null gehen, sie kann beliebig oft vom Wachsen zum Abnehmen übergehen oder umgekehrt, sie kann graphisch willkürlich angenommen werden. Unter l ist eine willkürliche reelle Coustante verstanden; welchen Werth man dem l auch beilegen mag, die Werthe von u und v werden dadurch nicht beeinflusst, da die unter den Integralzeichen vorkommenden Functionen von φ sämmtlich periodisch sind mit der Periode 2π.

In Folge der Bedingung $r<R$ besitzen die unter den Integralzeichen stehenden Functionen für jeden Werth von φ einen bestimmten endlichen Werth. Da sie ausserdem, als Functionen von x, y betrachtet, innerhalb der Kreisfläche einwerthig und stetig sind, auch die Grenzen der Integrale endliche Grössen sind, so folgt zunächst, dass u und v zwei, innerhalb der Kreisfläche, bis in jede endliche Nähe zum Rande, einwerthige und stetige Functionen des Ortes oder Punktes x, y sind. Da ferner auch die ersten, nach x und y genommenen Differentialquotienten der unter den Integralzeichen vorkommenden Functionen innerhalb der Kreisfläche einwerthig und stetig sind, so kann man die ersten Differentialquotienten von u und v nach x und y durch Differentiation unter dem Integralzeichen bilden, und erhält dann, wenn man zur Abkürzung setzt:

$$N = R^2-2Rr\cos(t-\varphi)+r^2 = R^2-2Rx\cos\varphi-2Ry\sin\varphi+x^2+y^2,$$

$$N_1 = 2R[(R^2+x^2-y^2)\cos\varphi+2xy\sin\varphi-2Rx],$$

$$N_2 = 2R[(R^2-x^2+y^2)\sin\varphi+2xy\cos\varphi-2Ry],$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2\pi}\int_{\varphi=l-\pi}^{\varphi=l+\pi}f(\varphi)\frac{N_1}{N^2}d\varphi,\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{2\pi}\int_{\varphi=l-\pi}^{\varphi=l+\pi}f(\varphi)\frac{N_2}{N^2}d\varphi,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2\pi}\int_{\varphi=l-\pi}^{\varphi=l+\pi}f(\varphi)\frac{N_2}{N^2}d\varphi,\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{2\pi}\int_{\varphi=l-\pi}^{\varphi=l+\pi}f(\varphi)\frac{N_1}{N^2}d\varphi.$$

Die ersten Derivirten von u und v nach x und y sind also im Innern der Kreisfläche ebenfalls allenthalben einwerthig und stetig, und da zudem zwischen ihnen die Relationen: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$: bestehen, so zeigt sich $u+vi$ als eine Function der complexen Variable $x+yi$, die mit ihren sämmtlichen Derivirten von angebbarer Ordnung innerhalb des Kreises allenthalben einwerthig und stetig ist. Es ist damit zunächst bewiesen, dass der Ausdruck u, wenn man die Bewegung des Punktes P auf die Kreisfläche mit dem Radius R beschränkt, eine reelle Function der Coordinaten x, y darstellt, die mit ihren sämmtlichen Derivirten von angebbarer Ordnung im Innern der Fläche, d. h. bis in jede endliche Nähe zum Rande, allenthalben einwerthig und stetig ist, und deren zweite Derivirte der Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ genügen.

2.

Es soll jetzt weiter untersucht werden, wie der Ausdruck u sich verhält, wenn der Punkt P dem Rande der Kreisfläche näher und näher rückt: ob dann der Werth von u sich einer festen Grenze nähert, oder ob etwas davon Verschiedenes stattfindet. Zu dem Ende könnte man untersuchen, was aus dem Integrale u wird, wenn bei constant bleibendem t die Variable r sich wachsend dem Werthe R nähert. Es würde dies dem Falle entsprechen, wo der Punkt P sich einem festen Punkte O' der Peripherie in der Richtung des Radius OO' nähert. Das Resultat könnte unter Umständen ein anderes werden, wenn der Punkt P sich dem Punkte O' in einer von OO' verschiedenen Richtung näherte. Um also gleich den allgemeinsten Fall zu untersuchen, wo der Punkt P in einer beliebig angenommenen Richtung zum Punkte O' geht, indem nur auf diese Weise der Charakter der Function u für den Randpunkt O' klar erkannt werden kann, führe man in dem Ausdrucke u an Stelle von r und t die Coordinaten ϱ und τ, von dem Punkte O' als Pol aus, ein. Durch passende Wahl von τ zwischen 0 und π, die Grenzen selbst ausgeschlossen, kann man dann für das Heranrücken des Punktes P zum Punkte O' jede zulässige Richtung fixiren, und das Heranrücken selbst wird bewirkt, indem man das immer positive ϱ unter jede Grenze sinken lässt.

Zunächst geht nun der Ausdruck u durch Einführung von ϱ und τ über in:

$$(2.)\qquad u = \frac{1}{2\pi}\int_{\varphi=l-\pi}^{\varphi=l+\pi} f(\varphi)\frac{(2R\varrho\sin\tau-\varrho^2)\,d\varphi}{[2R^2-2R\varrho\sin\tau][1-\cos(\varphi-\alpha)]+2R\varrho\cos\tau\sin(\varphi-\alpha)+\varrho^2}.$$

Setzt man dann, da der Werth von u von dem Werthe der Constante l unabhängig ist, $l=\alpha$, und zerlegt das Integral zwischen den Grenzen $\alpha-\pi$ und $\alpha+\pi$ in zwei neue Integrale $u^{(1)}$ und $u^{(2)}$, von denen das erste die Grenzen $\alpha-\pi$ und α, das zweite die Grenzen α und $\alpha+\pi$ besitzt, führt ferner in dem Integrale $u^{(1)}$ eine neue Integrationsvariable φ_1 ein durch die Substitution $\varphi=\alpha-\varphi_1$, ebenso in dem Integrale $u^{(2)}$ eine neue Integrationsvariable φ_2 durch die Substitution $\varphi=\alpha+\varphi_2$, so erhält man schliesslich, wenn man in den Endresultaten bei φ_1, φ_2 einfach die Indices unterdrückt und zur Abkürzung $\frac{\varrho}{R}=x$ setzt:

$$(3.)\qquad \begin{cases} u_{x,\tau} = u^{(1)}_{x,\tau}+u^{(2)}_{x,\tau}, \\ u^{(1)}_{x,\tau} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(\alpha-\varphi)\frac{(2x\sin\tau-x^2)\,d\varphi}{(2-2x\sin\tau)(1-\cos\varphi)-2x\cos\tau\sin\varphi+x^2}, \\ u^{(2)}_{x,\tau} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(\alpha+\varphi)\frac{(2x\sin\tau-x^2)\,d\varphi}{(2-2x\sin\tau)(1-\cos\varphi)+2x\cos\tau\sin\varphi+x^2}. \end{cases}$$

Mag nun die Function $f(\varphi)$ für $\varphi=\alpha$ eine Unterbrechung der Stetigkeit erleiden oder nicht, immer lässt sich eine positive Zahl 2γ kleiner als $\frac{\pi}{2}$ angeben, so dass in den beiden Intervallen von $\varphi=\alpha-2\gamma$ bis $\varphi=\alpha-0$ und von $\varphi=\alpha+0$ bis $\varphi=\alpha+2\gamma$ die Function $f(\varphi)$ stetig ist. Zerlegt man dann ein jedes der beiden Integrale $u^{(1)}$ und $u^{(2)}$ in zwei neue, von denen das erste die Grenzen 0 und 2γ, das zweite die Grenzen 2γ und π besitzt, setzt ferner zur Abkürzung:

$$(4.)\qquad \begin{cases} Q_1 = \dfrac{2x\sin\tau-x^2}{(2-2x\sin\tau)(1-\cos\varphi)-2x\cos\tau\sin\varphi+x^2}, \\ Q_2 = \dfrac{2x\sin\tau-x^2}{(2-2x\sin\tau)(1-\cos\varphi)+2x\cos\tau\sin\varphi+x^2}, \\ \frac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\gamma} Q_1\,d\varphi = J_1(\gamma,x,\tau), \qquad \frac{1}{2}\int_{2\gamma}^{\pi} Q_1\,d\varphi = J_1'(\gamma,x,\tau), \\ \frac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\gamma} Q_2\,d\varphi = J_2(\gamma,x,\tau), \qquad \frac{1}{2}\int_{2\gamma}^{\pi} Q_2\,d\varphi = J_2'(\gamma,x,\tau), \end{cases}$$

und berücksichtigt, dass die Grössen Q_1 und Q_2 ihr Zeichen nicht wechseln, wie auch φ, x und τ variiren mögen, indem die Nenner dieser Ausdrücke in der Form

$$(2-2\varkappa\sin\tau)(1-\cos\varphi)\pm 2\varkappa\cos\tau\sin\varphi+\varkappa^2$$
$$=\Big[2\cos\tau\sin\frac{\varphi}{2}\pm\varkappa\cos\frac{\varphi}{2}\Big]^2+\Big[(2\sin\tau-\varkappa)\sin\frac{\varphi}{2}\Big]^2$$

enthalten sind, ihr gemeinsamer Zähler $2\varkappa\sin\tau-\varkappa^2$ dagegen für jeden Punkt P im Innern der Kreisfläche positiv ist und erst auf der Peripherie den Werth Null erhält, so folgt, indem man bekannte Sätze aus der Theorie der bestimmten Integrale anwendet,

$$(5.)\quad\begin{cases} u^{(1)}_{\varkappa,\tau} = \frac{1}{\pi}J_1(\gamma,\varkappa,\tau)f(\alpha-2\theta_1\gamma)+\frac{1}{\pi}J'_1(\gamma,\varkappa,\tau)M_1, \\ u^{(2)}_{\varkappa,\tau} = \frac{1}{\pi}J_2(\gamma,\varkappa,\tau)f(\alpha+2\theta_2\gamma)+\frac{1}{\pi}J'_2(\gamma,\varkappa,\tau)M_2, \end{cases}$$

wobei θ_1,θ_2 zwei reelle Zahlen bezeichnen, die den Bedingungen $0\leqq\theta_1\gtreqqless 1$, $0\leqq\theta_2\gtreqqless 1$ genügen, M_1, M_2 zwei reelle Zahlen, die den Bedingungen $K\leqq M_1\gtreqqless G$, $K\leqq M_2\gtreqqless G$ unterworfen sind, wenn K den kleinsten, G den grössten unter all den Werthen bedeutet, die $f(\varphi)$ überhaupt annehmen kann. Und man mag noch bemerken, obschon dies durch die Bezeichnung nicht hervorgehoben wurde, dass bei festangenommenem α die Werthe der Zahlen θ_1, θ_2, M_1, M_2 von den drei Grössen γ, $\varkappa$, τ abhängen, dass aber bei jeder zulässigen Wahl von γ, $\varkappa$, τ die eben aufgestellten Grenzen für die θ und M unveränderlich bewahrt bleiben.

3.

Zur Untersuchung der vier Functionen J_1, J'_1, J_2, J'_2 übergehend, kann man zunächst bemerken, dass die beiden letzten sich leicht auf die beiden ersten zurückführen lassen. Denn da Q_1 in Q_2 übergeht, wenn man in dem Ausdrucke für Q_1 statt τ die Grösse $\pi-\tau$ einführt, so hat man dem entsprechend auch

$$(6.)\quad J_2(\gamma,\varkappa,\tau)=J_1(\gamma,\varkappa,\pi-\tau),\quad J'_2(\gamma,\varkappa,\tau)=J'_1(\gamma,\varkappa,\pi-\tau).$$

Man führe nun in den Integralen J_1 und J'_1 an Stelle von φ eine neue Integrationsvariable ξ ein durch die Gleichungen $\xi=\frac{1}{\varkappa}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, $d\xi=\frac{1}{\varkappa}\frac{d\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$, indem man berücksichtigt, dass

$$\tfrac{1}{2}Q_1 d\varphi = \frac{(2\varkappa\sin\tau-\varkappa^2)\,d\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{(4-4\varkappa\sin\tau+\varkappa^2)\sin^2\frac{\varphi}{2}-4\varkappa\cos\tau\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}+\varkappa^2\cos^2\frac{\varphi}{2}}$$
$$=\frac{(2\sin\tau-\varkappa)\,d\xi}{(4-4\varkappa\sin\tau+\varkappa^2)\xi^2-4\cos\tau\,\xi+1},$$

und dass bei dieser Transformation den Werthen $\varphi=0$ bis $\varphi=2\gamma$ die Werthe $\xi=0$ bis $\xi=\frac{\operatorname{tang}\gamma}{x}$, den Werthen $\varphi=2\gamma$ bis $\varphi=\pi$ die Werthe $\xi=\frac{\operatorname{tang}\gamma}{x}$ bis $\xi=\infty$ entsprechen. Es wird dann

$$(7.)\quad \begin{cases} J_1(\gamma,x,\tau) = \int_{\xi=0}^{\xi=\frac{\operatorname{tang}\gamma}{x}} \frac{(2\sin\tau-x)\,d\xi}{(4-4x\sin\tau+x^2)\xi^2-4\cos\tau\,\xi+1}, \\ J_1'(\gamma,x,\tau) = \int_{\xi=\frac{\operatorname{tang}\gamma}{x}}^{\xi=\infty} \frac{(2\sin\tau-x)\,d\xi}{(4-4x\sin\tau+x^2)\xi^2-4\cos\tau\,\xi+1}, \end{cases}$$

und da das unbestimmte Integral der hinter den Integralzeichen stehenden Function von ξ dargestellt wird durch

$$\operatorname{arc\,tang}\left[\frac{(4-4x\sin\tau+x^2)\xi-2\cos\tau}{2\sin\tau-x}\right]+\text{Const.},$$

so folgt schliesslich, wenn man zur Abkürzung $\frac{\operatorname{tang}\gamma}{x}=n$ setzt, und berücksichtigt, dass die Grössen $2\sin\tau-x$ und $4-4x\sin\tau+x^2$ immer positiv sind,

$$(8.)\quad \begin{cases} J_1(\gamma,x,\tau) = \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{(4-4x\sin\tau+x^2)n-2\cos\tau}{2\sin\tau-x}\right]+\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{2\cos\tau}{2\sin\tau-x}\right], \\ J_1'(\gamma,x,\tau) = \frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{(4-4x\sin\tau+x^2)n-2\cos\tau}{2\sin\tau-x}\right]. \end{cases}$$

Unter $\operatorname{arc\,tg}\alpha$, bei reellem Argumente α, ist hier und im Folgenden immer derjenige einzige bestimmte, zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ enthaltene Werth verstanden, der entsteht, wenn man $d\operatorname{arctang} x=(1+x^2)^{-1}dx$ auf directem Wege zwischen den Grenzen 0 und α integrirt. Für ein positives α und ein ebenfalls positives β gelten dann die Formeln:

$$\operatorname{arc\,tg}\alpha=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\alpha},\qquad \operatorname{arc\,tg}\alpha-\operatorname{arc\,tg}\beta=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta}\right),$$

von denen die zweite auch für negatives β noch gültig bleibt, wenn nur $1+\alpha\beta>0$ ist.

Man nehme nun den Punkt P in dem, durch die Grösse τ fixirten Strahle so nahe zum Punkte O' liegend an, dass, wie klein auch γ gewählt sei, x kleiner als $\operatorname{tg}\gamma$ sei. Dann ist, weil $\operatorname{tg}\gamma<1$, auch $x<1$, $xn<1$, dagegen $n>1$. Unter dieser Voraussetzung ist der Ausdruck $(4-4x\sin\tau+x^2)n-2\cos\tau$ für jeden Werth von τ positiv, denn der kleinste Werth, den er bei variablem τ überhaupt annehmen kann, ist $(4+x^2)n-2\sqrt{1+4x^2n^2}$, und dieser Minimumwerth ist positiv, weil $(4+x^2)^2n^2-4(1+4x^2n^2)=(16-8x^2+x^4)n^2-4$ für $x<1$ und $n>1$ immer positiv ist. Man hat also stets

$$(a.)\quad \operatorname{arctg}\left[\frac{(4-4x\sin\tau+x^2)n-2\cos\tau}{2\sin\tau-x}\right] = \frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\left[\frac{2\sin\tau-x}{(4-4x\sin\tau+x^2)n-2\cos\tau}\right].$$

Bezeichnet ferner τ' einen zulässigen Werth für τ, der zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt, so hat man

$$\operatorname{arctg}\left[\frac{2\cos\tau'}{2\sin\tau'-x}\right] = \frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\left[\frac{2\sin\tau'-x}{2\cos\tau'}\right],$$

$$\operatorname{arctg}\left[\frac{2\sin\tau'-x}{2\cos\tau'}\right] = \operatorname{arctg}\left[\frac{2\sin\tau'}{2\cos\tau'}\right]-\operatorname{arctg}\left[\frac{x\cos\tau'}{2-x\sin\tau'}\right],$$

und durch Subtraction der zweiten Gleichung von der ersten ergiebt sich

$$(b.)\quad \operatorname{arctg}\left[\frac{2\cos\tau'}{2\sin\tau'-x}\right] = \frac{\pi}{2}-\tau'+\operatorname{arctg}\left[\frac{x\cos\tau'}{2-x\sin\tau'}\right].$$

Man erkennt nun leicht, dass diese letzte Formel noch richtig bleibt, wenn $\tau'=\frac{\pi}{2}$ wird, und auch noch, wenn man an Stelle von τ' die Grösse $\pi-\tau'$ schreibt. Die Formel (*b.*) gilt demnach wie (*a.*) für jeden zulässigen Werth des Winkels τ zwischen 0 und π. Berücksichtigt man noch, dass

$$\operatorname{arctg}\left[\frac{2\sin\tau-x}{(4-4x\sin\tau+x^2)n-2\cos\tau}\right]-\operatorname{arctg}\left[\frac{x\cos\tau}{2-x\sin\tau}\right] = \operatorname{arctg}\left[\frac{\sin\tau-xn\cos\tau}{(2-x\sin\tau)n-\cos\tau}\right],$$

und dass xn durch $\operatorname{tg}\gamma$ ersetzt werden kann, so folgt aus den Gleichungen (8.)

$$(9.)\quad \begin{cases} J_1(\gamma,x,\tau) = \pi-\tau-\operatorname{arctg}\left[\dfrac{\sin(\tau-\gamma)}{2n\cos\gamma-\cos(\tau-\gamma)}\right], \\ J_1'(\gamma,x,\tau) = \operatorname{arctg}\left[\dfrac{2\sin\tau-x}{(4-4x\sin\tau+x^2)n-2\cos\tau}\right], \end{cases}$$

und hieraus weiter, indem man τ durch $\pi-\tau$ ersetzt und die Gleichungen (6.) beachtet,

$$(10.)\quad \begin{cases} J_2(\gamma,x,\tau) = \tau-\operatorname{arctg}\left[\dfrac{\sin(\tau+\gamma)}{2n\cos\gamma+\cos(\tau+\gamma)}\right], \\ J_2'(\gamma,x,\tau) = \operatorname{arctg}\left[\dfrac{2\sin\tau-x}{(4-4x\sin\tau+x^2)n+2\cos\tau}\right]. \end{cases}$$

Einfache Betrachtungen, wie sie in der Theorie der Maxima und Minima vorkommen, zeigen nun, dass der Werth des Ausdruckes

$$F(\theta) = \frac{\sin\theta}{2n\cos\gamma+\cos\theta},$$

wenn θ, γ, n reelle Grössen bezeichnen, und $0<\gamma<\frac{\pi}{4}$, $n>1$ ist, immer zwischen den Grenzen $-\frac{1}{n}$ und $+\frac{1}{n}$ liegt. Ebenso leicht ergiebt sich, dass,

in Folge der vorher über die Lage des Punktes P getroffenen Bestimmungen, die Differenz

$$\frac{2}{n}-\left[\frac{2\sin\tau-x}{(4-4x\sin\tau+x^2)n-2\cos\tau}\right]$$

für jeden zulässigen Werth von τ zwischen 0 und π positiv ist. Berücksichtigt man dann noch, dass für jedes reelle positive α der Werth von $\operatorname{arctg}(\pm\alpha)$ zwischen $-\alpha$ und $+\alpha$ liegt, so ergeben sich aus den Gleichungen (9.) und (10.) die Relationen:

$$(11.)\quad \begin{cases} \pi-\tau-\frac{1}{n} < J_1(\gamma,x,\tau) < \pi-\tau+\frac{1}{n}, & 0 < J_1'(\gamma,x,\tau) < \frac{2}{n}, \\ \tau-\frac{1}{n} < J_2(\gamma,x,\tau) < \tau+\frac{1}{n}, & 0 < J_2'(\gamma,x,\tau) < \frac{2}{n}, \end{cases}$$

und man erhält schliesslich, indem man unter ε_1, ε_2 zwei reelle Zahlen zwischen -1 und $+1$, unter ε_1', ε_2' zwei reelle Zahlen zwischen 0 und 1 versteht, die Grenzen selbst ausgeschlossen:

$$(12.)\quad \begin{cases} J_1(\gamma,x,\tau) = \pi-\tau+\frac{\varepsilon_1}{n}, & J_1'(\gamma,x,\tau) = \frac{2\varepsilon_1'}{n}, \\ J_2(\gamma,x,\tau) = \tau+\frac{\varepsilon_2}{n}, & J_2'(\gamma,x,\tau) = \frac{2\varepsilon_2'}{n}. \end{cases}$$

4.

Führt man die für J_1, J_1', J_2, J_2' gefundenen Werthe in die Formeln (5.) ein, so folgt:

$$(13.)\quad \begin{cases} u^{(1)}_{x,\tau} = \frac{1}{\pi}\left(\pi-\tau+\frac{\varepsilon_1}{n}\right)f(\alpha-2\theta_1\gamma)+\frac{2\varepsilon_1' M_1}{n\pi}, \\ u^{(2)}_{x,\tau} = \frac{1}{\pi}\left(\tau+\frac{\varepsilon_2}{n}\right)f(\alpha+2\theta_2\gamma)+\frac{2\varepsilon_2' M_2}{n\pi}, \end{cases}$$

unter der vorher gemachten Voraussetzung, dass γ eine Grösse zwischen 0 und $\frac{\pi}{4}$ bezeichnet, die so klein angenommen ist, dass die Function $f(\varphi)$ in den beiden Intervallen von $\varphi=\alpha-2\gamma$ bis $\varphi=\alpha-0$ und von $\varphi=\alpha+0$ bis $\varphi=\alpha+2\gamma$ stetig bleibt, und unter der fernern Voraussetzung, dass $x<\operatorname{tg}\gamma$ ist, während zur Abkürzung n für $\frac{\operatorname{tg}\gamma}{x}$ geschrieben wurde. Die obigen Formeln bleiben also richtig bei einer Verkleinerung von γ von dem fixirten Werthe aus, wenn man nur gleichzeitig auch x so weit abnehmen lässt, dass x kleiner als $\operatorname{tg}\gamma$ bleibt. Setzt man nun $\operatorname{tg}\gamma=\frac{1}{\nu}$, so ist $\nu>1$, da $\operatorname{tg}\gamma<1$, und der Bedingung $x<\operatorname{tg}\gamma$ wird genügt, wenn man $x=\frac{1}{\nu^2}$ setzt; es wird dann

$n = \nu$. Da ferner, weil γ zwischen 0 und $\frac{\pi}{4}$ liegt, $\gamma < \operatorname{tg}\gamma$ ist, so kann man

$$2\theta_1\gamma = 2\theta'_1 \operatorname{tg}\gamma = \frac{2\theta'_1}{\nu}, \qquad 2\theta_2\gamma = 2\theta'_2 \operatorname{tg}\gamma = \frac{2\theta'_2}{\nu}$$

setzen, wobei $0 \leqq \theta'_1 < 1$, $0 \leqq \theta'_2 < 1$, indem die Werthe von θ_1, θ_2 nach Früherem den Bedingungen $0 \leqq \theta_1 \overline{\gtrless} 1$, $0 \leqq \theta_2 \overline{\gtrless} 1$ genügen. Bildet man jetzt durch Addition der linken Seiten der Gleichungen (13.) die Function $u_{x,\tau}$, so folgt bei passender Anordnung

$$(14.) \quad \begin{cases} u_{x=\frac{1}{\nu^2},\tau} = f(\alpha-0) + \frac{\tau}{\pi}[f(\alpha+0) - f(\alpha-0)] \\ \qquad + \frac{\pi-\tau}{\pi}\left[f\left(\alpha - \frac{2\theta'_1}{\nu}\right) - f(\alpha-0)\right] + \frac{\tau}{\pi}\left[f\left(\alpha + \frac{2\theta'_2}{\nu}\right) - f(\alpha+0)\right] \\ \qquad + \frac{1}{\nu\pi}\left[2\varepsilon'_1 M_1 + 2\varepsilon'_2 M_2 + \varepsilon_1 f\left(\alpha - \frac{2\theta'_1}{\nu}\right) + \varepsilon_2 f\left(\alpha + \frac{2\theta'_2}{\nu}\right)\right] \end{cases}$$

für $\nu = \frac{1}{\operatorname{tg}\gamma}$ und, nach dem oben Bemerkten, also auch für jedes grössere ν. Lässt man nun, bei constant gehaltenem τ, durch fortwährende stetige Vergrösserung von ν die Grösse x, also auch $\varrho = Rx$, stetig kleiner und kleiner werden, so entspricht diesem Processe geometrisch ein unbegrenztes stetiges Anrücken des Punktes P gegen den Begrenzungspunkt O' in der, durch den Winkel τ fixirten Richtung, und es convergirt dann, wie die letzte Formel unmittelbar zeigt, $u_{x,\tau}$ gegen die feste Grenze

$$(15.) \qquad \lim_{x=0} u_{x,\tau} = f(\alpha-0) + \frac{\tau}{\pi}[f(\alpha+0) - f(\alpha-0)],$$

denn man kann stets, wie klein auch eine von Null verschiedene positive Zahl σ angenommen werden mag, dazu den Werth von ϱ so klein, oder was dasselbe, den Werth von ν so gross annehmen, dass die Summe der Grössen, die auf der rechten Seite der Formel (14.) in der zweiten und dritten Zeile stehen, für dieses ν und auch für jedes grössere ν ihrem absoluten Werthe nach die Zahl σ nicht übersteigt, einerlei, welchen von den zulässigen Werthen τ besitzt oder annimmt.

Gehört nun zu dem Randpunkte O', dem im ersten Polarcoordinatensysteme die Coordinaten $r = R$, $t = \alpha$ zukommen, ein Werth α von t, für den die willkürlich angenommene Function f keine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet, so ist $f(\alpha+0) = f(\alpha-0) = f(\alpha)$, und die, durch den Ausdruck u dargestellte Function der Coordinaten x, y des Punktes P erhält dann, wenn P vom Innern her auf irgend eine Weise in den Punkt O' rückt, immer den

bestimmten Werth $f(\alpha)$. Erleidet dagegen die Function f für den Werth α des Argumentes eine Unterbrechung der Stetigkeit, d. h. ist α einem der früher fixirten p Werthe $c_1, c_2, \ldots, c_p$ nach dem Modul 2π congruent, so zeigt die Formel (15.), dass in dem Falle der Werth, den die Function u beim Einrücken des Punktes P in die Lage O' erhält, von der Richtung, in der dasselbe geschieht, abhängig ist, und zwar so, dass zu jeder bestimmten Richtung ein und nur ein bestimmter Werth von u gehört, der sich mit dem, die Richtung bestimmenden Winkel τ in der Weise stetig ändert, dass die Aenderungen von u den Aenderungen von τ proportional sind. Durch passende Wahl der Richtung des Einrückens kann man dann für u jeden Werth erhalten, der zwischen $f(\alpha-0)$ und $f(\alpha+0)$ liegt, und geht man in der, durch $\tau=\frac{\pi}{2}$ fixirten Richtung des Kreisradius gegen den Punkt O', so trifft man dort mit dem Werthe $\frac{f(\alpha+0)+f(\alpha-0)}{2}$ ein. Der Punkt O' bildet in diesem Falle einen Unstetigkeitspunkt für die, durch den Ausdruck u dargestellte Function, ohne dass darum, wenn man sich die Werthe von u durch Ordinaten, die in den entsprechenden Punkten x, y senkrecht auf der Ebene des Kreises stehen, repräsentirt dächte, die dadurch entstehende, über der Kreisfläche im Raume ausgebreitete Fläche irgendwo eine Unterbrechung ihres Zusammenhanges erlitte.

Damit ist bewiesen, dass immer eine Function u existirt, die ausser den, schon am Ende von art. 1 erwähnten Eigenschaften noch weiter die besitzt, dass sie am Rande der Kreisfläche vollständig mit einer für den Rand $(r=R,\ t=t)$ willkürlich angenommenen reellen Function $f(t)$ übereinstimmt, wenn nur $f(t)$ der Bedingung, längs des Randes allenthalben einwerthig und stetig zu sein, unterworfen ist: dass dagegen, wenn die Function $f(t)$ die Bedingung der Stetigkeit in der Weise verletzt, dass sie für einzelne Punkte $(r=R,\ t=c_1, c_2, \ldots, c_p)$ des Randes springt, dann die Uebereinstimmung nur für die von den c verschiedenen Punkte des Randes besteht, während in den Punkten c selbst die Function u alle nur möglichen Werthe zwischen den Werthen $f(c-0)$ und $f(c+0)$ besitzt. Im ersten Falle, wo $f(t)$ allenthalben stetig vorausgesetzt wird, ist, wie Formel (14.) zeigt, die Function u für die ganze Kreisfläche, den Rand einbegriffen, stetig: im zweiten Falle kann von der Stetigkeit der Function u nur die Rede sein in einem Gebiete, das aus der Kreisfläche entsteht, indem man die p Punkte c durch ebensoviele Kreise, die diese Punkte zu Mittelpunkten haben und deren Radien endliche, im Uebrigen beliebig kleine Werthe besitzen, ausscheidet.

5.

Eine weitere Frage ist die, ob ausser der, durch den Ausdruck u dargestellten Function u nicht noch eine zweite Function, u_1, existirt, die die bis jetzt gefundenen Eigenschaften von u ebenfalls besitzt: oder ob durch die erwähnten Eigenschaften die Function u eindeutig bestimmt erscheint. Die Existenz einer zweiten Function, u_1, vorausgesetzt, wird dann die durch $\mu = u - u_1$ zu bezeichnende Differenz der beiden Functionen für die ganze Kreisfläche, den Rand einbegriffen, eine einwerthige und stetige Function des Ortes oder Punktes x, y sein, die am Rande allenthalben den Werth Null besitzt. In welcher Richtung also auch der Punkt P in einen Randpunkt O' einrücken mag, der zugehörige Werth von μ wird stets gegen Null convergiren. Damit ist ausdrücklich festgesetzt, dass für den Fall, wo die Function u am Rande Unstetigkeitspunkte $c_1, c_2, \ldots, c_p$ besitzt, die Function u_1 für diese Punkte in gleicher Weise unstetig werden soll wie die Function u. Was ferner die Derivirten von μ betrifft, so werden jedenfalls die ersten und zweiten Derivirten von μ im Innern der Kreisfläche, d. h. bis in jede endliche Nähe zum Rande, einwerthig und stetig sein, und die nach x und y genommenen zweiten Derivirten der Gleichung $\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} = 0$ genügen.

Eine Function μ mit diesen Eigenschaften kann aber, wie jetzt gezeigt werden soll, für keinen Punkt im Innern der Kreisfläche einen von Null verschiedenen Werth besitzen. Das Gegentheil angenommen, sei P_1 ein Punkt im Innern der Kreisfläche, für den die Function μ einen von Null verschiedenen Werth M_1 besitze. Mit M' bezeichne man den absoluten Werth von M_1, mit M'' eine von Null verschiedene fest anzunehmende positive Zahl, die um eine endliche Grösse kleiner als M' sei. Da nach der Voraussetzung der Werth von μ durch stetige Aenderung stets gegen Null convergirt, wenn der Punkt P sich in irgend einer Richtung gegen einen Punkt des Randes bewegt, so werden die Punkte der Kreisfläche, für die der absolute Werth von μ grösser oder gleich M'' ist, alle in angebbarer endlicher Entfernung vom Rande liegen. Man kann also um den Mittelpunkt O einen zweiten, dem ersten concentrischen Kreis ziehen, dessen Radius R_1 um eine endliche Grösse kleiner ist als R, und der die genannten Punkte sämmtlich einschliesst, so dass in keinem Punkte auf der Peripherie dieses Kreises der absolute Werth von μ die Zahl M'' übersteigt.

Setzt man dann

$$\nu = -\int_{0,0}^{x,y}\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}dx - \frac{\partial\mu}{\partial x}dy\right),$$

und beschränkt die Bewegung des variablen Punktes x, y auf diese kleinere Kreisfläche F', ohne den, mit K' zu bezeichnenden Rand derselben auszuschliessen, so ist $\mu+\nu i$ in der Fläche F', den Rand einbegriffen, eine allenthalben einwerthige und stetige Function der complexen Variable $z = x+yi$, die bis in jede Nähe zum Rande und auch noch auf dem Rande K' selbst einwerthige und stetige Derivirte besitzt. In Folge dessen hat das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K'}^{+}\frac{(\mu+\nu i)\,dz}{z-z'},$$

ausgedehnt in positiver Richtung durch die Begrenzung K' von F' immer einen bestimmten Werth, wenn nur der Punkt x', y' der Ebene, für den z den Werth z' hat, nicht auf K' selbst liegt. Und zwar ist der Werth dieses Integrals beständig Null, wenn der Punkt x', y' ausserhalb F' liegt, während für einen Punkt x', y' im Innern von F' der Werth des Integrals mit dem Werthe übereinstimmt, den die Function $\mu+\nu i$ in diesem Punkte besitzt.

Bezeichnet man nun die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes P_1 mit x_1, y_1, die Polarcoordinaten mit r_1, t_1, und den zugehörigen Werth von z mit z_1, so wird jedenfalls r_1 um eine endliche Grösse kleiner sein als R_1, weil der Punkt P_1 im Innern der Fläche F', in endlicher Entfernung vom Rande K' liegt. Der Punkt x_2, y_2 dagegen, für den z den Werth $z_2 = \frac{R_1^2}{r_1}e^{t_1 i}$ besitzt, wird dann nothwendig ausserhalb F' liegen. Bezeichnet man noch den Werth, den die Function ν im Punkte P_1 besitzt, durch N_1, während der Werth der Function μ in diesem Punkte schon vorher durch M_1 bezeichnet wurde, so folgt, wenn man in dem letzten Integrale an Stelle von z' einmal z_1, das andere Mal z_2 einführt:

$$\text{(I.)}\quad M_1+N_1 i = \frac{1}{2\pi i}\int_{K'}^{+}\frac{(\mu+\nu i)\,dz}{z-z_1}, \qquad \text{(II.)}\quad 0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{K'}^{+}\frac{(\mu+\nu i)\,dz}{z-z_2}.$$

Trennt man in diesen beiden Gleichungen die reellen Theile von den rein imaginären, nachdem man für z_1, z_2 ihre Ausdrücke durch Polarcoordinaten eingeführt, und z durch $R_1 e^{\varphi i}$, dz durch $R_1 e^{\varphi i} i\,d\varphi$ ersetzt hat, so folgt weiter, indem man den Ausdruck $R_1^2 - 2R_1 r_1\cos(t_1-\varphi)+r_1^2$ zur Abkürzung mit Q bezeichnet:

$$(\mathrm{I}^a.)\quad M_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{d\varphi}{Q}\{\mu[R_1^2-R_1r_1\cos(t_1-\varphi)]-\nu[R_1r_1\sin(t_1-\varphi)]\},$$

$$(\mathrm{I}^b.)\quad N_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{d\varphi}{Q}\{\mu[R_1r_1\sin(t_1-\varphi)]+\nu[R_1^2-R_1r_1\cos(t_1-\varphi)]\},$$

$$(\mathrm{II}^a.)\quad 0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{d\varphi}{Q}\{\mu[r_1^2-R_1r_1\cos(t_1-\varphi)]-\nu[R_1r_1\sin(t_1-\varphi)]\},$$

$$(\mathrm{II}^b.)\quad 0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{d\varphi}{Q}\{\mu[R_1r_1\sin(t_1-\varphi)]+\nu[r_1^2-R_1r_1\cos(t_1-\varphi)]\}.$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen kann man die Werthe M_1 und N_1 der Functionen μ und ν für den Punkt P_1 ausdrücken durch die Werthe allein, die die Function μ auf der Integrationscurve K' besitzt. Subtrahirt man nämlich die Gleichung (II^a.) von (I^a.) und addirt die Gleichung (II^b.) zu (I^b), berücksichtigt auch, dass die Function ν im Kreismittelpunkte 0, 0 den Werth Null besitzt, so zerstören sich die Terme unter den Integralzeichen, in denen ν vorkommt, und man erhält schliesslich:

$$M_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\mu(R_1^2-r_1^2)d\varphi}{R_1^2-2R_1r_1\cos(t_1-\varphi)+r_1^2},\qquad N_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{2\mu R_1r_1\sin(t_1-\varphi)d\varphi}{R_1^2-2R_1r_1\cos(t_1-\varphi)+r_1^2}.$$

Die erste dieser beiden Gleichungen zeigt, dass zwischen dem Werthe M_1, den die Function μ im Punkte P_1 besitzt, und den Werthen von μ am Rande K' von F' ein bestimmter Zusammenhang besteht. Aus dieser Gleichung sollen jetzt weitere Schlüsse gezogen werden. Da den früher getroffenen Anordnungen gemäss der absolute Werth von μ in keinem Punkte der Integrationscurve K' die positive Zahl M'' übersteigt, auch der Factor, mit dem μ unter dem Integralzeichen auf der rechten Seite der in Rede stehenden Gleichung multiplicirt erscheint, während der Integration sein Vorzeichen nicht ändert, sondern, da $r_1 < R_1$ ist, stets positiv bleibt, so folgt aus der obigen Gleichung, unter Anwendung eines Satzes von *Cauchy*,

$$-\frac{M''}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{(R_1^2-r_1^2)d\varphi}{R_1^2-2R_1r_1\cos(t_1-\varphi)+r_1^2} \leqq M_1 \lesseqgtr \frac{M''}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{(R_1^2-r_1^2)d\varphi}{R_1^2-2R_1r_1\cos(t_1-\varphi)+r_1^2},$$

und hieraus endlich, nach Ausführung des bestimmten Integrals:

$$-M'' \leqq M_1 \lesseqgtr M''.$$

Dieses letzte Resultat steht aber im Widerspruche mit Früherm, wonach die positive Zahl M'' endlich kleiner als der absolute Werth M' von M_1 gewählt war, unter der einzigen Voraussetzung, dass der Werth M_1, den die Function μ im Punkte P_1 besitzt, von Null verschieden sei. Die einander

widersprechenden Ergebnisse, zu denen diese Voraussetzung geführt hat, beweisen ihre Unrichtigkeit und damit zugleich die Unhaltbarkeit der ursprünglichen Annahme, dass die Function μ für irgend einen Punkt P im Innern der Kreisfläche, deren Radius R, einen von Null verschiedenen Werth besitze. Die Function μ hat also für jeden innern, in endlicher Entfernung vom Rande gelegenen Punkt der Kreisfläche den Werth Null; da sie ausserdem für die ganze Kreisfläche, den Rand einbegriffen, einwerthig und stetig ist, und ihr Werth beim Uebergange vom Innern zum Rande stets gegen Null convergirt, so ist sie für alle Punkte der Kreisfläche und des Randes Null. Aus $\mu = 0$ folgt aber $u_1 = u$, d. h. die Function u_1 ist mit der Function u identisch, und es existirt demnach nur *eine* Function u, die die früher angegebenen Eigenschaften besitzt. Damit ist der im Anfange dieser Arbeit genannte Satz in allen seinen Theilen bewiesen.

6.

Für alle Punkte P im Innern der Kreisfläche kann der Ausdruck für u in eine nach steigenden Potenzen von $\frac{r}{R}$ fortschreitende Reihe entwickelt werden. Man hat nämlich

$$\frac{1}{2}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(t-\varphi)+r^2} = \frac{1}{2}+\frac{r}{R}\cos(t-\varphi)+\frac{r^2}{R^2}\cos 2(t-\varphi)+\frac{r^3}{R^3}\cos 3(t-\varphi)+\cdots,$$

gültig für jedes r, dessen Werth kleiner als die Zahl R. Multiplicirt man linke und rechte Seite dieser Gleichung mit $\frac{1}{\pi}f(\varphi)\,d\varphi$ und integrirt nach φ zwischen den Grenzen $-\pi$ und $+\pi$, so folgt, indem man, was hier erlaubt ist, auf der rechten Seite die Aufeinanderfolge der Operationen der Summation und Integration ändert:

$$u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\varphi)\,\frac{(R^2-r^2)\,d\varphi}{R^2-2Rr\cos(t-\varphi)+r^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\varphi)\,d\varphi + \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{r^n}{R^n}\,\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\varphi)\cos n(t-\varphi)\,d\varphi.$$

Den Werth, den die zu unterst stehende Reihe für einen Punkt P mit den Coordinaten r, t im Innern des Kreises besitzt, bezeichne man durch $S_{r,t}$, den Werth der Function u in demselben Punkte durch $u_{r,t}$. Für jeden innern, in endlicher Entfernung vom Rande gelegenen Punkt der Kreisfläche ist dann $S_{r,t} = u_{r,t}$.

Die in der untern Zeile stehende Reihe geht, wenn man r wachsend gleich R werden lässt, der Form nach über in die *Fourier*sche Reihe

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\varphi)\,d\varphi + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\varphi)\cos n(t-\varphi)\,d\varphi.$$

Convergirt nun diese *Fourier*sche Reihe für einen Werth t' der Variable t, und bezeichnet man ihren Werth für dieses t durch $S_{t'}$, so ist, wie *Abel* und *Dirichlet* bewiesen, $S_{t'}$ zugleich die Grenze, gegen die der Werth $S_{r,t'}$ der frühern, nach steigenden Potenzen von $\frac{r}{R}$ fortschreitenden Reihe ohne Unterbrechung der Stetigkeit convergirt, wenn r stetig gegen R convergirt. Dieser Werth $S_{t'}$ kann dann aber nicht von dem Werthe $\frac{f(t'+0)+f(t'-0)}{2}$ verschieden sein, gegen den, nach art. 4, die Function $u_{r,t'}$ convergirt, wenn bei constant bleibendem t' die Variable r gegen R convergirt. Denn da die beiden Functionen $S_{r,t'}$ und $u_{r,t'}$ für jedes $r<R$ gleichwerthig sind, und ausserdem jede von ihnen für $\lim r = R$ ohne Unterbrechung der Stetigkeit gegen eine feste Grenze convergirt, so können ihre Werthe an der Grenze des Gebietes der Variable r, d. h. für $r=R$ nicht verschieden sein.

Für die Function u sind damit zwei Ausdrucksformen aufgestellt, das bestimmte Integral und die unendliche Reihe, die sich, was ihr Verhalten auf dem Rande der Kreisfläche selbst betrifft, wesentlich unterscheiden. Die erste Ausdrucksform versagt auf dem Rande, d. h. für $r=R$, immer, indem sie dort allenthalben den Werth Null liefert. Die zweite Ausdrucksform kann unter Umständen auch noch auf dem Rande, d. h. für $r=R$, sei es allenthalben oder nur in einzelnen Punkten R, t' die Function u darstellen, und zwar wird sie diese Darstellung, wie eben bewiesen, leisten, wenn die *Fourier*sche Reihe, in die sie für $r=R$ übergeht, für die betreffenden Werthe von t convergirt. Aber auch in dem Falle, wo die Reihe $S_{r,t}$ für $r=R$ noch convergirt, wird sie nur für *die* Randpunkte, in denen $f(t)$ keine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet, den Werth darstellen, den die Function u in dem Punkte besitzt, während für die Unstetigkeitspunkte auf dem Rande, wo $f(t)$ springt und die Function u unendlich viele Werthe besitzt, die Reihe, ihre Convergenz vorausgesetzt, nur den einzigen Werth $\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$ von all den Werthen der Function u liefert, der einem Einrücken in der Richtung des Radius R entspricht. Alle übrigen Werthe, die u in einem solchen Punkte je nach den verschiedenen Richtungen des Einrückens erhalten kann,

werden von der Reihe $S_{r,t}$ für $r = R$ nicht mehr geliefert, sind also gleichsam beim Uebergange vom Innern auf den Rand ausgefallen. Bei dieser, immer zulässigen Auffassung der *Fourier*schen Reihe, wonach sie lediglich als Grenzform einer Reihe $S_{r,t}$, die für die Kreisfläche bis in jede endliche Nähe zum Rande eine Function u darstellt, erscheint, aber als Grenzform, die einem Anrücken vom Innern gegen den Rand in der Richtung des Kreisradius entspricht, erklärt sich ihr Verhalten für die Punkte t, wo die Function $f(t)$ springt, auf natürliche Weise aus dem Verhalten der Function u für die entsprechenden Randpunkte R, t.

7.

Um den Mittelpunkt O des Kreises, dessen Radius R, beschreibe man einen zweiten, dem gegebenen concentrischen Kreis mit einem Radius $R' < R$. Die Fläche des ersten Kreises bezeichne man mit F, die des zweiten mit F': entsprechend die Peripherien der beiden Kreise durch K und K' resp. Unter u werde dieselbe Function wie vorher verstanden. Dieselbe ist eindeutig bestimmt, sobald die Function $f(\varphi)$, die in art. 1 ausführlicher charakterisirt wurde, gegeben vorliegt, und mit Rücksicht darauf möge zur Abkürzung gesagt werden, eine Function u correspondire mit einer gegebenen Function $f(\varphi)$. Unter diesen Voraussetzungen betrachte man das Integral

$$U_{F'} = \iint_{F'} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right\} \partial x \, \partial y,$$

ausgedehnt über die Fläche F'. Da die Derivirten von u bis in jede endliche Nähe zum Rande K der ursprünglichen Kreisfläche einwerthig und stetig sind, so sind sie es jedenfalls in F' und auch noch auf der Begrenzung K' von F'. Es besitzt also das obige Integral einen endlichen, positiven Werth, der sich, wie bekannt, auch ausdrückt durch das einfache Integral

$$-\int_{K'}^{+} u \frac{du}{dp} ds \quad \text{oder} \quad \int_{K'}^{+} u \frac{dv}{ds} ds,$$

erstreckt in positiver Richtung über die Begrenzung K' von F', wenn ds ein Element dieser Begrenzung, p die nach Innen gerichtete Normale bezeichnet. Lässt man nun durch successive Vergrösserung von R' die Fläche F' gegen F convergiren, so können in Bezug auf den Werth $U_{F'}$ des obigen Doppelintegrals zwei Fälle eintreten: entweder wächst $U_{F'}$ über alle Grenzen, oder es convergirt $U_{F'}$ gegen einen festen Grenzwerth G. Im erstern Falle hat

das Integral U_F keine Bedeutung mehr, im zweiten Falle ist sein Werth G. Dass der erste Fall immer eintritt, wenn die Function $f(\varphi)$, mit der die Function u correspondirt, für einzelne Werthe c des Argumentes springt, soll zunächst bewiesen werden. Die folgende Untersuchung liefert diesen Beweis in allgemeinerer Form, und bildet so gleichsam eine Ergänzung zu dem art. 17 der *Riemann*schen Dissertation, indem sie zeigt, dass eine sammt ihren ersten Derivirten einwerthige und stetige Function λ von x und y sich nicht einer, in einem Punkte in der gleich festzusetzenden Weise unstetigen Function μ unendlich annähern kann, ohne dass das Integral $\Omega(\lambda)$ aufhört endlich zu sein.

Fixirt sei ein begrenztes endliches Stück T der XY-Ebene, und in demselben liegend ein Punkt P. Für diese Fläche sei eine reelle Function μ der rechtwinkligen Coordinaten x, y gegeben, die sammt ihren ersten Derivirten im Innern von T bis in jede endliche Nähe zum Punkte P einwerthig und stetig ist, und zugleich mit ihren Derivirten diese Eigenschaften auch noch auf dem Rande von T besitzt. Das Verhalten der Function μ im Punkte P, von dem aus man Polarcoordinaten r, t einführe, sei dadurch charakterisirt, dass wenn man in irgend einer Richtung t auf den Punkt P zugeht, dann der Werth von μ ohne Unterbrechung der Stetigkeit gegen eine feste Grenze $G(t)$ convergirt, die von der gewählten Richtung abhängig, sich mit t um den Punkt P herum allenthalben stetig ändert. $G(t)$ wird also eine einwerthige, stetige, und mit der Periode 2π periodische Function von t sein; der Fall, dass $G(t)$ für jedes t denselben Werth besitze, sei ausgeschlossen. Was die Derivirten von μ betrifft, so soll bezüglich ihrer Existenz oder ihres Verhaltens im Punkte P nichts festgesetzt sein. Für eine solche Function μ, behaupte ich dann, wird das Integral

$$\Omega(\mu) = \iint\left\{\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)^2\right\}\partial x\,\partial y = \iint\left\{\left(\frac{\partial\mu}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\mu}{\partial t}\right)^2\right\}r\,\partial r\,\partial t,$$

wenn man es über die Fläche T ausdehnt, keinen angebbaren Werth erhalten, indem sein Werth, je mehr sich die Summation dem Unstetigkeitspunkte P nähert, um so mehr über alle Grenzen wächst.

Um dieses zu beweisen, beschreibe man um P als Mittelpunkt einen Kreis mit dem Radius r_2, dessen Fläche vollständig innerhalb T liegt, und einen zweiten, diesem concentrischen Kreis mit einem endlich kleinern Radius r_1. Ausserdem fixire man zwei Radiivectoren $t = t_1$ und $t = t_2$, $(t_2 > t_1)$, die so gewählt seien, (was nach den gemachten Annahmen immer möglich), dass die Werthe M_1 und M_2 von μ, die man erhält, indem man das eine Mal

in der durch t_1, das zweite Mal in der durch t_2 bestimmten Richtung in den Punkt P einrückt, endlich verschieden sind. Betrachtet man dann das Integral

$$W_\mu = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mu}{\partial t}\right)^2 dt,$$

so bilden dessen Elemente einen Theil der Elemente des obigen Integrals $\Omega(\mu)$, und da dieses letztere nur positive Elemente besitzt, nie also Elemente sich gegenseitig aufheben, so wird der verlangte Beweis erbracht sein, wenn man zeigt, dass der Werth des Integrals W_μ dadurch, dass man die Zahlen r_1 und r_2 in passender Weise klein genug nimmt, grösser gemacht werden kann als eine willkürlich gegebene, beliebig gross angenommene positive Zahl.

Die Function μ ist der Annahme gemäss sammt ihren ersten Derivirten in dem, durch die Grenzwerthe r_1, r_2 und t_1, t_2 fixirten Gebiete, den Rand desselben einbegriffen, eine einwerthige und stetige Function von r und t. Man setze $\mu = F(r, t)$, und zur Abkürzung $F(r, t_1) = f_1(r)$, $F(r, t_2) = f_2(r)$: dann hat man nach den über t_1 und t_2 vorher getroffenen Bestimmungen $\lim_{r=0} f_1(r) = M_1$, $\lim_{r=0} f_2(r) = M_2$. Betrachtet man nun das in dem Doppelintegrale W_μ vorkommende innere, von t_1 bis t_2 zu erstreckende Integral, so bleibt bei der Ausführung dieser Summation nach t die Grösse r constant, und für die Grenzen t_1 und t_2 hat μ die Werthe $f_1(r)$ und $f_2(r)$ resp. Unter all den Functionen ν von t, die von $t = t_1$ bis $t = t_2$ sammt ihrer ersten Derivirten einwerthig und stetig sind, und ausserdem für die Grenzen t_1, t_2 die gegebenen Werthe $f_1(r)$, $f_2(r)$ resp. besitzen, existirt nun eine, für die das Integral

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2 dt$$

am kleinsten wird. Es ist dies die Function $\nu = ct + c_1$, wenn man die Constanten c, c_1 aus den Gleichungen $f_1(r) = ct_1 + c_1$, $f_2(r) = ct_2 + c_1$ bestimmt; der betreffende Werth des Integrals wird dann $c^2(t_2 - t_1)$. Man hat also unter allen Umständen

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mu}{\partial t}\right)^2 dt \geqq \frac{[f_2(r) - f_1(r)]^2}{t_2 - t_1},$$

und daher auch, weil r und dr immer positiv sind,

$$W_\mu \geqq \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{r_1}^{r_2} [f_2(r) - f_1(r)]^2 \frac{dr}{r}.$$

Da die beiden Functionen $f_1(r)$ und $f_2(r)$ von $r = r_2$ bis $r = 0$ stetig sind, und für verschwindendes r die erste den Werth M_1, die zweite den

Werth M_2 erhält, so kann man jedenfalls die positive Zahl r_2, ohne gegen frühere Voraussetzungen zu verstossen, von Null verschieden so klein annehmen, dass der Werth des Ausdruckes $[f_2(r)-f_1(r)]^2$, der für $\lim r=0$ ohne Unterbrechung der Stetigkeit gegen die feste Grenze $[M_2-M_1]^2$ convergirt, in dem Intervalle von $r=0$ bis $r=r_2$ stets grösser als $\frac{1}{2}[M_2-M_1]^2$ bleibt. Unter dieser Voraussetzung über die Grösse von r_2 wird dann, wie man auch die positive Zahl r_1, die kleiner als r_2 vorausgesetzt ist, wählen mag, stets

$$W_\mu > \frac{[M_2-M_1]^2}{2(t_2-t_1)}\, ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

sein, wobei der ln rein reell zu nehmen ist. Lässt man nun, während r_2 den festgesetzten Werth behält, r_1 kleiner und kleiner werden, so kann man dadurch den Werth von $ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$ ohne Aufhören grösser und grösser machen, und es wird folglich W_μ, und um so mehr $\Omega(\mu)$ bei successiver Vergrösserung des Integrationsgebietes durch Abnahme von r_1 über jede angebbare positive Zahl herüberwachsen.

8.

Ganz anders stellt sich die Sache, wenn die Function $f(\varphi)$, mit der die Function u correspondirt, allenthalben stetig ist. Während, wie eben bewiesen, die Voraussetzung, dass $f(\varphi)$ für einzelne Werthe des Argumentes springt, mit Nothwendigkeit das Unendlichwerden des Integrals

$$U_F = \iint \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\} \partial x\, \partial y,$$

wenn man es über die Kreisfläche F vom Radius R ausdehnt, nach sich zieht, können, wenn $f(\varphi)$ allenthalben stetig ist, in Bezug auf U_F beide vorher genannte Fälle eintreten, d. h. es kann, je nach der sonstigen Beschaffenheit von $f(\varphi)$, das Integral U_F entweder endlich sein oder auch keinen angebbaren Werth besitzen. Die Richtigkeit der ersten Behauptung leuchtet unmittelbar ein, man braucht nur für u den reellen Theil einer Function von z zu wählen, die mit ihren ersten Derivirten in der Fläche F und auch noch auf dem Rande K derselben einwerthig und stetig ist. Den Beweis für die zweite Behauptung liefert das folgende Beispiel.

Die Längeneinheit wähle man so, dass der Radius R des gegebenen Kreises, dessen Gleichung $x^2+y^2-R^2=0$ ist, kleiner als $\frac{1}{4}$ wird. In Bezug

auf diese Kreisfläche, den Rand einbegriffen, definire man eine Function u als den reellen Theil der Function

$$u+vi = i\sqrt{-ln(R+x+yi)}$$

der complexen Variable $x+yi$, nachdem man zuvor diese Function für die Kreisfläche wie folgt eindeutig bestimmt hat. Man führe vom Punkte $x=-R$, $y=0$ aus Polarcoordinaten ϱ, τ ein durch die Gleichungen: $x=-R+\varrho\cos\tau$, $y=\varrho\sin\tau$: es kann dann durch die Bewegung des Punktes x, y auf der Kreisfläche die Variable ϱ alle Werthe von 0 bis $2R<1$, die Variable τ alle Werthe von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$ annehmen, während alle übrigen Werthe durch die Bedingung, dass der Punkt x, y nicht über den Rand der Fläche hinaus gehe, ausgeschlossen werden sollen. Der unter der Quadratwurzel vorkommende Logarithmus werde für die Kreisfläche eindeutig bestimmt durch die Gleichung: $-ln(R+x+yi) = -ln\varrho-\tau i$: indem man unter $ln\varrho$ den bestimmten reellen Werth versteht, den man durch Integration von $d\,ln\xi = \xi^{-1}d\xi$ auf directem Wege zwischen den Grenzen 1 und ϱ erhält. Trennt man dann in der Gleichung für $u+vi$ die reellen Theile von den rein imaginären, so folgt für jedes ϱ und τ, das einem Punkte der Kreisfläche angehört, indem $-ln\varrho$ immer positiv ist:

$$u=[ln^2\varrho+\tau^2]^{\frac{1}{4}}\sin\left[\tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\tau}{ln\varrho}\right)\right],\quad v=-[ln^2\varrho+\tau^2]^{\frac{1}{4}}\cos\left[\tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\tau}{ln\varrho}\right)\right],$$

wobei unter arctg mit reellem Argumente α immer derjenige Werth verstanden ist, den man durch Integration von $d\operatorname{arctang}\alpha=(1+\alpha^2)^{-1}d\alpha$ auf directem Wege zwischen den Grenzen 0 und α erhält, und wobei ferner die in beiden Ausdrücken vorkommende vierte Wurzel stets positiv genommen werden soll. Damit sind denn die beiden Functionen u und v für die Kreisfläche, den Rand einbegriffen, vollständig eindeutig bestimmt.

Zunächst ist nun klar, dass die Function u mit ihren sämmtlichen Derivirten von angebbarer Ordnung im Innern der Kreisfläche bis in jede endliche Nähe zum Rande einwerthig und stetig ist, und dass die zweiten Derivirten der Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ genügen. Von den beiden Punkten: $x=-R$, $y=0$ und $x=-R+1$, $y=0$: um die herum die verschiedenen Zweige der ursprünglichen Function $u+vi$ in einander übergehen, liegt ja der erste auf dem Rande, der zweite, der Bedingung $R<\frac{1}{2}$ gemäss, vollständig ausserhalb des Kreises. Keiner dieser Punkte kann also vom Punkte x, y umlaufen

werden, da dessen Bewegung auf die Kreisfläche, den Rand einbegriffen, beschränkt wurde. Die Function u ist aber nicht nur im Innern, sondern auch noch auf dem Rande des Kreises allenthalben einwerthig und stetig. Für alle Theile des Randes, denen von Null verschiedene Werthe der Grösse ϱ zugehören, zeigt dies die definirende Formel unmittelbar. Um das Verhalten der Function u für den Randpunkt $\varrho = 0$ zu erkennen, führe man durch die Gleichung

$$\xi = \tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\tau}{l n \varrho}\right)$$

in den Ausdruck für u an Stelle der Variable ϱ eine neue Variable ξ ein. Es wird dann

$$u = \left[\frac{\tau^2}{\sin^2(2\xi)}\right]^{\frac{1}{4}} \sin \xi,$$

und da für verschwindendes ϱ die Variable ξ immer gegen Null convergirt, welchen Werth auch τ besitzen mag, ferner für verschwindendes ξ die Function u ebenfalls immer gegen Null convergirt, welchen Werth auch τ besitzen mag, so folgt, dass u in dem Randpunkte $\varrho = 0$ den bestimmten Werth Null besitzt, und dass demnach die Function u für die ganze Kreisfläche, den Rand einbegriffen, durchweg einwerthig und stetig ist.

Für diese Function u bilde man jetzt das Integral

$$U_F = \iint \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\} \partial x\, \partial y = \iint \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial \varrho}\right)^2 + \frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)^2\right\} \varrho\, \partial \varrho\, \partial \tau,$$

und dehne es über die Fläche F des Kreises aus. Da dieses Integral nur positive Elemente besitzt, so wird man das Unendlichwerden desselben bewiesen haben, wenn man zeigt, dass es über einen bestimmten Theil F' von F ausgedehnt schon unendlich wird. Zu dem Ende verstehe man unter τ_1 eine positive Zahl, die zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegend, sowohl von 0 wie von $\frac{\pi}{2}$ endlich verschieden ist, unter ϱ_2 den Radiusvector des Punktes der Kreisperipherie, dem der Werth $\tau = \tau_1$ zugehört, $(\varrho_2 = 2R\cos\tau_1)$, unter ϱ_1 eine von Null verschiedene positive Zahl, die kleiner als ϱ_2 gewählt ist. Das durch die Radiivectoren $\tau = \tau_1$, $\tau = -\tau_1$ und durch die Kreise $\varrho = \varrho_1$, $\varrho = \varrho_2$ begrenzte Stück F' der Ebene bildet dann einen Theil der Fläche F, wie klein auch ϱ_1 als positive Zahl angenommen sein mag. Da ferner

$$\frac{\partial u}{\partial \varrho} = \tfrac{1}{2}[l n^2 \varrho + \tau^2]^{-\frac{3}{4}} \left\{\frac{l n \varrho}{\varrho} \sin\left[\tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\tau}{l n \varrho}\right)\right] - \frac{\tau}{\varrho} \cos\left[\tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\tau}{l n \varrho}\right)\right]\right\},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \tfrac{1}{2}[l n^2 \varrho + \tau^2]^{-\frac{3}{4}} \left\{\tau \sin\left[\tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\tau}{l n \varrho}\right)\right] + l n \varrho \cos\left[\tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\tau}{l n \varrho}\right)\right]\right\}$$

ist, so ergiebt sich als Werth des obigen Integrals, wenn man es nur über den fixirten Theil F' von F ausdehnt, und dem entsprechend seinen Werth durch $U_{F'}$ bezeichnet:

$$U_{F'} = \tfrac{1}{2}\int_{\varrho_1}^{\varrho_2}\frac{d\varrho}{\varrho}\int_{-\tau_1}^{+\tau_1}\frac{d\tau}{\sqrt{ln^2\varrho+\tau^2}},$$

und hieraus weiter nach Ausführung der Integration, indem man zur Abkürzung $-ln\,\varrho_1 = \alpha$, $-ln\,\varrho_2 = \beta$ setzt:

$$U_{F'} = \frac{\tau_1}{2}ln\left[\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\tau_1^2}}{\beta+\sqrt{\beta^2+\tau_1^2}}\right] + \frac{\alpha}{2}ln\left[\frac{\tau_1+\sqrt{\alpha^2+\tau_1^2}}{\alpha}\right] - \frac{\beta}{2}ln\left[\frac{\tau_1+\sqrt{\beta^2+\tau_1^2}}{\beta}\right],$$

wobei die vorkommenden Quadratwurzeln sämmtlich positiv, die Logarithmen rein reell zu nehmen sind. Lässt man nun ϱ_1 kleiner und kleiner werden, so wächst die positive Zahl α über alle Grenzen. Von den drei Theilen, aus denen die rechte Seite der letzten Gleichung besteht, ändert sich der dritte dadurch nicht, weil die positive Zahl β von ϱ_1 unabhängig ist, der Werth des zweiten Theiles convergirt für unbegrenzt wachsendes α gegen die feste Grenze $\frac{\tau_1}{2}$, und der immer positive Werth des ersten wächst mit α zugleich über alle Grenzen. In Folge dessen erhält das Integral $U_{F'}$ für verschwindendes ϱ_1 keinen angebbaren Werth, indem es über alle Grenzen wächst, und es wird daher um so mehr das Integral U_F, da es über die ganze Kreisfläche auszudehnen ist, keinen angebbaren Werth erhalten.

Damit ist bewiesen, dass selbst wenn die Function $f(t)$, mit der eine Function u am Rande übereinstimmt, allenthalben stetig ist, daraus noch lange nicht das Endlichsein des über die Kreisfläche auszudehnenden Integrals U_F geschlossen werden darf. Alle in neuerer Zeit gemachten Versuche, die Zulässigkeit des *Dirichlet*schen Princips zu beweisen unter der Annahme, dass zu einer allenthalben stetigen Randfunction $f(t)$ auch immer ein endlicher Werth des Integrals U_F gehöre, sind demnach als verfehlt zu betrachten, da sie sich auf eine falsche Voraussetzung stützen. Nirgendwo in seinen Schriften giebt *Riemann* zu einer solchen Annahme Veranlassung: das einzige Mal, wo er verlangt, dass von fest gegebenen Randwerthen aus eine Function α in's Innere einer Fläche so stetig fortgesetzt werden soll, dass das Integral $\Omega(\alpha)$ einen endlichen Werth erhält *(Dissertation, art. 19, pag. 26)*, stellt er ausdrücklich die Bedingung, dass in allen Begrenzungspunkten ein Werth gegeben sei, der sich für eine unendlich kleine Ortsänderung um eine unendlich kleine Grösse von derselben Ordnung ändert.

Würzburg, 1. Mai 1871.

Solutions de quelques problèmes relatifs aux surfaces du second degré.

(Par M. *H. Picquet.*)

---

1. ***Construction de la surface du second degré déterminée par neuf points.*** La détermination linéaire de la surface du second degré qui passe par neuf points a excité de tout temps la curiosité des géomètres. On connaît de nombreuses solutions de ce problème; je n'en citerai que celle qui a été donnée par M. *Otto Hesse* (J. de *Crelle,* t. XXIV). Sans doute il est téméraire de travailler le même sujet qu'un pareil maître: sans vouloir porter atteinte au mérite de cette solution, nous demanderons la permission de présenter la suivante *).

Soient 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 les neuf points donnés, et considérons les trois plans (1.2.3), (4.5.6), (7.8.9) se coupant deux à deux suivant les droites A, B, C:

$$A \equiv (4.5.6)(7.8.9), \qquad B \equiv (7.8.9)(1.2.3), \qquad C \equiv (1.2.3)(4.5.6).$$

Toutes les surfaces du second degré passant par les points 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 sont coupées par un plan quelconque suivant les coniques d'un réseau ponctuel **);

---

*) *M. Picquet,* lieutenant du génie dans l'armée française, a imité le bel exemple de son illustre compatriote *Poncelet* en s'occupant de géométrie pendant sa captivité. Il m'a confié ce travail pour mon Journal, et je n'hésite pas à le publier quoique les constructions pour résoudre les deux premiers problèmes données par *M. Picquet* et désignées par lui comme linéaires, ne soient point de celles auxquelles ce nom convient dans le sens ordinaire. En effet, ces deux problèmes posés comme le fait *M. Picquet* n'admettent pas de construction linéaire, c. à d. telle que les moyens mis en usage soient limités au plan et à la ligne droite. Le premier problème est, comme on sait, susceptible d'une construction linéaire, pourvu que sur une ligne droite assujettie à la condition de passer par l'un des neuf points donnés, mais quelconque d'ailleurs, l'on cherche le second point dans lequel elle est coupée par la surface du second ordre. Mais ce n'est pas dans ce sens que le problème est traité par l'auteur. *B.*

) On appelle ***réseau ponctuel* le système de coniques représenté en coordonnées ponctuelles par l'équation $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_3 c_3 = 0$ dans laquelle λ_1, λ_2, λ_3 sont trois coefficients indéterminés, et c_1, c_2, c_3 les premiers membres des équations de trois coniques. En général $\lambda_1 c_1 + \cdots + \lambda_p c_p = 0$ $(p \leqq 4)$ représente en coordonnées ponctuelles un système ponctuel d'ordre $p-1$: le réseau est un système ponctuel du second ordre (*Smith.* — Proceedings of the London mathematical Society, no. 14, p. 90). *P.*

et en particulier par les plans (1.2.3) (4.5.6), suivant des coniques ayant trois points communs. Dans chacun de ces deux plans, comme dans un plan quelconque, le réseau est déterminé par trois quelconques des coniques qui en font partie, et il est facile de les obtenir immédiatement en prenant, par exemple, trois systèmes de deux droites passant dans le premier plan par les points 1 . 2 . 3, et dans le second par les points 4 . 5 . 6. Si l'on veut que ces six systèmes de deux droites se correspondent, c'est à dire soient les coniques d'intersection des plans (1.2.3) et (4.5.6) par trois des surfaces du second degré considérées, ils sont déterminés, et doivent se couper deux à deux en deux points de la droite C, commune aux deux plans. Pour les obtenir, soient c_1, c_2, c_3 et c_4, c_5, c_6 les points d'intersection avec la droite C des côtés du triangle (1.2.3) et du triangle (4.5.6)

$$c_1 \equiv (C, 2.3), \quad c_2 \equiv (C, 3.1), \quad c_3 \equiv (C, 1.2),$$
$$c_4 \equiv (C, 5.6), \quad c_5 \equiv (C, 6.4), \quad c_6 \equiv (C, 4.5).$$

Deux systèmes de deux droites correspondants seront alors

$$(1.2, 3.c_6) \text{ et } (4.5, 6.c_3)$$

coupant le plan (7.8.9) en quatre points α_1, β_1, γ_1, δ_1; deux autres systèmes correspondants seront:

$$(2.3, 1.c_4) \text{ et } (5.6, 4.c_1)$$

coupant le plan (7.8.9) aux points α_2, β_2, γ_2, δ_2, et enfin deux autres seront

$$(3.1, 2.c_5) \text{ et } (6.4, 5.c_2)$$

coupant le plan (7.8.9) aux points α_3, β_3, γ_3, δ_3. Les trois coniques

$$\Sigma_1 \equiv 7.\alpha_1.\beta_1.\gamma_1.\delta_1, \quad \Sigma_2 \equiv 7.\alpha_2.\beta_2.\gamma_2.\delta_2, \quad \Sigma_3 \equiv 7.\alpha_3.\beta_3.\gamma_3.\delta_3$$

correspondent respectivement dans le plan (7.8.9) à ces trois groupes, et déterminent chacune avec le groupe qui lui correspond, une surface du second degré passant par les points 1.2.3.4.5.6.7. Remarquons que nous n'avons encore eu à exécuter que des opérations très-simples, savoir, faire passer un plan par trois points, une droite par deux points, construire la droite d'intersection de deux plans, et le point d'intersection de deux droites; et les trois coniques Σ_1, Σ_2, Σ_3 sont déterminées dans le plan (7.8.9) chacune par cinq points.

Il est dès lors évident que la conique du réseau $(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$ qui passe par les points 8 et 9, laquelle s'obtient linéairement au moyen de deux des trois coniques ayant quatre points communs

$$8[\Sigma_2.\Sigma_3]\,^{*)}, \quad 8[\Sigma_3.\Sigma_1], \quad 8[\Sigma.\Sigma_2]$$

---

*) C'est à dire, la conique passant par les points 8 et les points communs aux coniques Σ_2 et Σ_3. *P.*

et qui est, par exemple, la conique

$$9[8[\Sigma_2.\Sigma_3].8[\Sigma_3.\Sigma_1]]\ ^{*})$$

est la conique d'intersection de la surface cherchée avec le plan (7.8.9). Elle coupera les plans (1.2.3) et (4.5.6) respectivement en deux couples de points $\alpha_4.\beta_4$ et $\gamma_4.\delta_4$, et les coniques

$$1.2.3.\alpha_4.\beta_4, \quad 4.5.6.\gamma_4.\delta_4$$

seront les coniques d'intersection de chacun de ces deux plans avec la surface cherchée. Enfin un plan quelconque coupera les trois coniques construites de la surface en six points situés sur une même conique, laquelle sera la courbe d'intersection du plan et de la surface cherchée.

2. *Construction par points de la courbe gauche du quatrième degré qui passe par huit points.*

Cette courbe est l'intersection commune de toutes les surfaces du second degré qui passent par les huit points. Sa construction dérive immédiatement de la précédente, dans laquelle on remplacera le plan (7.8.9) par un plan quelconque passant par la droite 7.8. Les trois coniques

$$8[\Sigma_2.\Sigma_3], \quad 8[\Sigma_3.\Sigma_1], \quad 8[\Sigma_1.\Sigma_2]$$

passent par les points 7 et 8, et ont deux autres points communs que l'on peut déterminer linéairement et qui sont sur la courbe cherchée. En faisant tourner le plan variable autour de la droite 7.8 on aura ainsi tous les points de la courbe.

3. *Construction du huitième point commun à toutes les surfaces du second degré qui passent par sept points donnés* **).

Toutes les surfaces du second degré qui passent par sept points ont un huitième point commun. On peut encore dire que toutes les courbes gauches

---

*) Nous avons démontré cette construction de la conique d'un réseau ponctuel passant par deux points donnés dans un travail qui sera publié en France après la guerre (*Etude sur les systèmes de coniques*). *P.*

**) Dans la situation extraordinaire, dans laquelle M. *Picquet* a écrit cette note il n'a pas pu consulter la littérature antérieure de ce problème. Je remplis cette lacune en citant l'excellent travail de M. *Hesse* (vol. 26 de ce Journal). La construction de M. *Picquet* repose comme celle de M. *Hesse* sur la construction due à M. *Hesse* du problème suivant: étant donnés 6 points quelconques dans l'espace et un septième *A*, mener par le point *A* la corde à la cubique gauche qui passe par les 6 points donnés (vol. 26, p. 151). *B.*

suivant lesquelles se coupent deux quelconques de ces surfaces ont un huitième point commun. Il suffit dès lors pour trouver ce point de construire deux de ces courbes au choix. Or une courbe gauche du quatrième degré peut se composer d'une cubique gauche et d'une droite qui la rencontre en deux points, qui en soit *corde.* Une cubique gauche étant déterminée par six points, on fera passer une cubique gauche par six des points donnés 1.2.3.4.5.6 et par le septième 7, on mènera une corde à cette cubique gauche; on sait que cette corde est unique et déterminée, elle passera donc par le point cherché, puisqu'avec la cubique (1.2.3.4.5.6) elle constitue une courbe gauche du quatrième degré passant par les sept points donnés, et qu'il n'y a pas d'ailleurs de raison pour que le point cherché, que rien ne distingue des sept autres, soit sur la cubique (1.2.3.4.5.6) plutôt que le point 7. De même, on construira la cubique (1.2.3.4.5.7) et par le point 6 on lui mènera une corde qui coupera la première au point cherché. Avant d'entrer dans le détail de la construction, nous allons d'abord démontrer directement qu'en effet ces deux droites se coupent.

1°. *Lorsqu'une cubique gauche est située sur une surface du second degré, toutes les génératrices d'un système sont des cordes de la cubique.*

En effet, si on considère le cône *du second degré* qui a pour sommet un point variable de la courbe et la courbe pour base, ce cône coupe la surface suivant la cubique et suivant une droite variable. Lorsque le sommet du cône engendre la courbe, la droite engendre la surface, toutes ces cordes sont donc des génératrices d'un système.

2°. *Les génératrices de l'autre système coupent la cubique en un point.*

En effet le plan tangent à la surface en un point coupe la cubique en trois points situés sur les génératrices de la surface passant par ce point. Mais nous venons de voir que deux de ces points sont sur la génératrice du premier système, comme d'ailleurs une cubique gauche ne peut pas avoir trois points en ligne droite, le troisième est sur la génératrice du second système.

Il en résulte qu'il peut y avoir sur une surface du second degré deux systèmes de cubiques gauches suivant que les génératrices de la surface qui en sont des cordes sont d'un système ou de l'autre, et on peut démontrer que deux cubiques gauches de même système ont quatre points communs et deux cubiques gauches de systèmes différents cinq points com-

muns. Sans nous y arrêter, considérons la surface du second degré qui passe par les sept points donnés 1.2.3.4.5.6.7, par un point quelconque 8 de la cubique (1.2.3.4.5.6) et par un point quelconque 9 de la cubique (1.2.3.4.5.7); cette surface ayant sept points communs avec chacune de ces courbes, les renfermera tout entières. Elle renfermera aussi la corde menée à la première par le point 7 dont elle contient trois points, le point 7 et ses deux extrémités; ainsi que la corde menée à la seconde par le point 6. Mais ces deux cordes sont des génératrices de systèmes différents, ainsi que les deux cubiques, sans quoi les courbes gauches du quatrième degré, formées par chaque cubique et la corde correspondante auraient neuf points communs, savoir les points 1.2.3.4.5 et deux points sur chaque corde, car les génératrices étant de même système, les cubiques sont de même système, et si elles sont cordes d'une cubique elles sont aussi cordes de l'autre. Deux courbes gauches du quatrième degré ne pouvant avoir neuf points communs sans coïncider, les deux cordes sont de systèmes différents et se rencontrent conséquemment en un point qui est le point cherché.

Remarquons maintenant que tous les cônes ayant leur sommet sur une cubique gauche et cette courbe pour base appartiennent à un même réseau de surfaces du second degré, surfaces dont les sept points communs distincts seraient sur une même cubique gauche, qui est la courbe considérée. Les plans polaires d'un même point par rapport à ces cônes ont donc un point commun, qui est nécessairement situé sur la corde menée du point à la courbe; il suffit donc de déterminer ce point pour déterminer la corde.

Cela posé, la construction sera la suivante:

Par les points 1.6.7 on mènera un plan P: pour déterminer les trois cônes ayant pour sommets respectifs 3.4 et 5 et pour base la première cubique (1.2.3.4.5.6), on projettera du point 3 sur le plan P les cinq points 1.2.4.5.6 en cinq points $1.2'.4'.5'.6$, du point 4 les cinq points 1.2.3.5.6 en cinq points $1.2''.4'.5''.6$, et du point 5 les cinq points 1.2.3.4.6 en cinq points $1.2'''.5'.5''.6$. On détermine ainsi trois coniques qui, prises deux à deux, ont trois points communs connus; on peut donc, sans les construire, trouver immédiatement le point de concours des polaires du point 7 par rapport à toutes les coniques passant par les points communs à deux d'entr'elles, point situé dans le plan polaire du point 7 par rapport aux cônes, qui leur correspond. En combinant ces trois courbes deux à deux on obtient ainsi de suite trois points, sommets du triangle formé dans

le plan P par les plans polaires du point 7 par rapport aux trois cônes; en joignant chaque côté de ce triangle au sommet du cône correspondant, on a trois plans dont le point d'intersection est sur la droite qui joint le point 7 au point cherché. On fera de même pour le point 6 et la cubique (1.2.3.4.5.7) en se servant du même plan 1.6.7, et le point cherché sera déterminé par l'intersection de deux droites.

L'épure est assez simple en prenant pour plan horizontal le plan 1.6.7 et pour plan vertical le plan perpendiculaire mené par la droite 6.7.

Stralsund, le 28 février 1871.

Note über die acht Schnittpunkte dreier Oberflächen zweiter Ordnung.

(Von Herrn *O. Hesse* in München.)

Bei Gelegenheit meiner Untersuchungen über die acht Schnittpunkte dreier Oberflächen zweiter Ordnung im zwanzigsten Bande dieses Journals habe ich das daselbst p. 307 sich findende Theorem 14 aufgestellt, welchem man folgende etwas elegantere Form geben kann.

Theorem.

„Irgend sechs Schnittpunkte dreier Oberflächen zweiter Ordnung lassen sich betrachten als die Ecken eines Sechsecks im Raume. Die drei von einem beliebigen Punkte ausgehenden geraden Linien, von welchen jede ein Paar gegenüberliegender Seiten des Sechseckes schneidet, bestimmen, wenn man ihre Schnittpunkte in der Reihenfolge der Seiten des Sechseckes verbindet, ein dem Sechsecke einbeschriebenes Sechseck, welches auf einem Hyperboloid liegt. Die beiden in gleicher Weise aus dem siebenten und achten Schnittpunkte der drei Oberflächen dem Sechsecke im Raume einbeschriebenen Sechsecke liegen auf einem und demselben Hyperboloid."

In dieser Darstellung erkennt man sogleich, dass das Theorem eine Ausdehnung des *Pascal*schen Theorems vom Hexagrammum mysticum ist.

Denn wenn das erste Sechseck im Raume ein Sechseck in der Ebene wird, so fallen die beiden aus dem siebenten und achten Schnittpunkte construirten einbeschriebenen Sechsecke zusammen, und jedes derselben wird ein Dreieck, dessen Ecken die Schnittpunkte der gegenüberliegenden Seiten des ersten Sechseckes sind. Da nun nach dem Theoreme die Seiten dieses Dreieckes auf einem Hyperboloid liegen, so müssen dieselben in eine gerade Linie, die *Pascal*sche Linie des ersten Sechseckes, fallen, weil kein Hyperboloid ein Dreieck aufweisen kann, dessen Seiten auf seiner Oberfläche liegen.

München, im Mai 1871.

Ueber die Hypothese der Parallelentheorie.

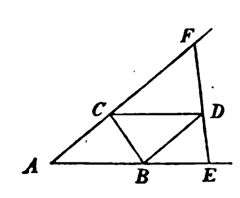
(Von Herrn *R. Baltzer* in Giessen.)

(Abdruck aus den Berichten der mathem.-phys. Classe der Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften vom 4. Mai 1870.)

„Selten vergeht ein Jahr, wo nicht irgend ein neuer Versuch käme, die Lücke im Anfang der Geometrie auszufüllen, ohne dass wir doch sagen könnten, dass wir im Wesentlichen irgend weiter gekommen wären als *Euclides* vor 2000 Jahren war.“ So schrieb *Gauss* 1816 im Eingang einer Bücheranzeige. Der Schluss des vorigen Jahres hat einen Versuch der angegebenen Art gebracht, welcher der Pariser Academie von Herrn *Bertrand* (*Compte rendu* 1869 Dec. 20) unter der Versicherung mitgetheilt worden ist, dass das 11. Axiom des *Euclides* nun bewiesen und eine von diesem Axiom unabhängige Geometrie ad absurdum geführt sei.

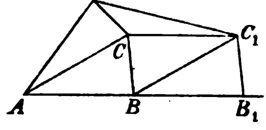
Um diese Versicherung zu würdigen, erinnere man sich, dass seit *Legendres* Bemühungen als der eigentliche Sitz der Schwierigkeit die Summe der Winkel eines geradlinigen Dreiecks zu betrachten ist. Nachdem man den Fehler, unendliche Grössen wie vollendete zu behandeln, vermeiden gelernt hatte, nachdem *Legendre* bewiesen hatte, dass die ebengenannte Summe mehr als 180^0 nicht betragen kann, hatte man noch zu beweisen, dass dieselbe Summe nicht weniger als 180^0 betragen könne. Zu diesem Beweise führt kurzen Wegs die *Euclid*sche Hypothese, nach welcher die Schenkel AB und CD sich schneiden, wenn die Summe der Winkel BAC und ACD weniger als 180^0 beträgt.

Dazu führt zweitens die *Legendre*sche Hypothese, dass durch einen innerhalb eines Winkels gegebenen Punkt eine Gerade gezogen werden kann, von der *beide* Schenkel des Winkels geschnitten werden. Man mache $CBD \cong ABC$ und ziehe durch D eine Gerade, welche die Fortsetzungen von AB und AC in E und F schneidet. Gesetzt, die Winkelsummen in ABC, BED und CDF betragen 180^0-w, $180^0-w'$, $180^0-w''$, so beträgt die Winkelsumme in AEF $180^0-w+180^0-w+180^0-w'+180^0-w''-3.180^0$, d. i. weniger als 180^0-2w, in einem andern Dreieck weniger als 180^0-4w, endlich



in einem Dreieck weniger als eine gegebene Grösse, während doch das Dreieck den gegebenen Winkel A enthält.

Eben dahin führt folgende Hypothese über die Linie, deren Punkte von einer gegebenen Geraden gleiche Normalabstände haben. Wenn der Winkel BAC ein Theil des Winkels BAD, und der Punkt D weiter als die Spitze C von der Basis AB des Dreiecks ABC entfernt ist: so wird angenommen, dass der Winkel ADC im Wachsen bleibt, während die Basis AB des unveränderten Dreiecks ABC auf der Geraden AB in der Richtung von A nach B fortschreitet. Man mache $BB_1C_1 \cong ABC$. Gesetzt, die Winkelsummen in ABC, ACD, CBC_1, CC_1D betragen 180^0-w, $180^0-w'$, $180^0-w''$, $180^0-w'''$, so beträgt die Winkelsumme in $ABCD$ nicht mehr als 2.180^0-w, in AB_1C_1D $5.180^0-2w-w'-w''-w'''-3.180^0$, d. i. nicht mehr als 2.180^0-2w, in einem andern Viereck nicht mehr als 2.180^0-3w, u. s. w.



Die zuletzt ausgesprochene Hypothese, vermöge deren von dem folgenden Viereck das vorhergehende eingeschlossen wird, liegt dem ähnlichen, nur etwas complicirteren Beweis *Minarellis* zu Grunde, welchen Herr *Genocchi* 1849 den *Nouv. Ann. de Math. t.* 8 *p.* 312 mitgetheilt hat, sowie dem auf denselben Principien ruhenden noch mehr complicirten Beweis *Cartons*, welchen Herr *Bertrand* neulich in dem *Compte rendu* vertreten hat. Man hatte nur den Fehler begangen, die erforderliche Hypothese *stillschweigend* zuzulassen. Dass keine Aussicht vorhanden ist, die Geometrie ohne eine dem 11. Axiom von *Euclides* äquivalente Hypothese zu begründen, diese von *Gauss* gehegte Ueberzeugung findet ihre Bestätigung durch die Existenz einer widerspruchsfreien abstracten Geometrie, welche *Gauss*, *Bolyai*, *Lobatschewsky* unter Zulassung einer Minderzahl von Hypothesen erbaut haben.

Einige Bemerkungen über eine Determinante.

(Von Herrn *Stern* in Göttingen.)

Ist β eine n^{te} Wurzel der Einheit, und bezeichnet P das Product der Factoren, die man erhält, wenn man in dem Ausdrucke $a_1+a_2\beta+a_3\beta^2+\cdots+a_n\beta^{n-1}$ statt β die n verschiedenen Werthe der n^{ten} Wurzel der Einheit setzt, so ist bekanntlich

$$(1.)\qquad P = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{vmatrix}.$$

Im Folgenden sollen einige Eigenschaften dieser Determinante, unter der Voraussetzung dass n eine Primzahl ist, entwickelt werden. Zunächst will ich jedoch bemerken, dass man die vorstehende Gleichung auf einem directeren Wege ableiten kann, als es bisher geschehen zu sein scheint *). Setzt man nämlich den Werth der Determinante gleich D und

$$(2.)\qquad D = A_1a_1+A_2a_2+\cdots+A_na_n,$$

so dass allgemein A_t der Coefficient von a_t ist, so hat man die n Gleichungen

$$\begin{aligned} A_1a_1+A_2a_2+\cdots+\ A_na_n &= D, \\ A_2a_1+A_3a_2+\cdots+\ A_1a_n &= 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ A_na_1+A_1a_2+\cdots+A_{n-1}a_n &= 0, \end{aligned}$$

welche addirt die Gleichung

$$(3.)\qquad (a_1+a_2+\cdots+a_n)(A_1+A_2+\cdots+A_n) = D$$

geben. Diese Gleichung kann man aber durch die folgende

$$(4.)\qquad (a_1+a_2\beta+\cdots+a_n\beta^{n-1})(A_1+A_2\beta^{n-1}+\cdots+A_n\beta) = D$$

ersetzen, indem, wenn man die Multiplication ausführt und nach Potenzen von β ordnet, der Coefficient von β^{k-1} offenbar $A_1a_k+A_2a_{k+1}+\cdots+A_na_{k-1}$, also gleich 0 ist, sobald nicht $k=1$, so dass man wieder auf (2.) zurückkommt.

---

*) Man vergl. *Baltzer* Theorie d. Determ. 3. Aufl. S. 98.

Aus (4.) folgt, dass D durch jeden der n Factoren von P theilbar ist. Nun enthält der entwickelte Werth der Determinante das Glied a_1^n, also muss $D = P$ sein.

Sondert man aus dem Producte P den Factor $a_1+a_2+\cdots+a_n$ ab und setzt $a_1+a_2+\cdots+a_n = s$, so sei

$$(5.)\qquad D = sN,$$

also nach (3.)

$$N = A_1+A_2+\cdots+A_n.$$

Da in jeder der n Reihen, aus welchen die Determinante besteht, das Element a_t vorkommt, so hat man

$$A_t = \frac{1}{n}\frac{\partial D}{\partial a_t}.$$

Aus (5.) folgt aber

$$\frac{\partial D}{\partial a_t} = N+s\frac{\partial N}{\partial a_t},$$

$$\frac{\partial D}{\partial a_u} = N+s\frac{\partial N}{\partial a_u},$$

mithin

$$n(A_t-A_u) = s\left(\frac{\partial N}{\partial a_t}-\frac{\partial N}{\partial a_u}\right).$$

Es ist also A_t-A_u durch s theilbar. Ist $s=0$, so ist $A_t=A_u$, d. h. in diesem Falle sind die Coefficienten aller Elemente gleich und mithin $A_t = \frac{N}{n}$, so dass N durch n theilbar ist, sobald die Elemente ganze Zahlen sind.

Sei nun n eine Primzahl. Bezeichnet β_1 eine der n^{ten} Wurzeln der Einheit, die Einheit selbst ausgenommen, so sind nun $1, \beta_1, \beta_1^2, \ldots \beta_1^{n-1}$ die verschiedenen Werthe von β. Man sondere aus P die zwei Factoren $a_1+a_2+\cdots+a_n = s$ und $a_1+a_2\beta_1^{n-1}+\cdots+a_n\beta_1$ ab. Das Product der übrigen $n-2$ Factoren wird, bei ausgeführter Multiplication die Form

$$b_1+b_2\beta_1+b_3\beta_1^2+\cdots+b_n\beta_1^{n-1}$$

annehmen. Multiplicirt man diesen Ausdruck mit $a_1+a_2\beta_1^{n-1}+\cdots+a_n\beta_1$, so erhält man N. Schreibt man aber $f(\beta_1)$ statt N, so hat man mithin

$$(6.)\qquad \begin{cases} \frac{D}{s} = f(\beta_1) = b_1a_1+b_2a_2+\cdots+b_na_n \\ \qquad +(b_2a_1+b_3a_2+\cdots+b_1a_n)\beta_1 \\ \qquad \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \qquad +(b_na_1+b_1a_2+\cdots+b_{n-1}a_n)\beta_1^{n-1}. \end{cases}$$

Nun bleibt $\frac{D}{s}$ unverändert, wenn man statt β_1 einen der Werthe $\beta_1^2, \beta_1^3, \dots \beta_1^{n-1}$ setzt. Mithin ist

$$(n-1)\frac{D}{s} = f(\beta_1)+f(\beta_1^2)+\dots+f(\beta_1^{n-1}).$$

Auch ist

$$\begin{aligned} & b_2 a_1 + b_3 a_2 + \dots + b_1 a_n \\ & + b_3 a_1 + b_4 a_2 + \dots + b_2 a_n \\ & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & + b_n a_1 + b_1 a_2 + \dots + b_{n-1} a_n \\ = & (a_1+a_2+\dots+a_n)(b_1+b_2+\dots+b_n)-(a_1 b_1+a_2 b_2+\dots+a_n b_n). \end{aligned}$$

Setzt man daher für $f(\beta_1)$, $f(\beta_1^2)$, ... $f(\beta_1^{n-1})$ ihre Werthe aus (6.) und berücksichtigt die Gleichung

$$\beta_1+\beta_1^2+\dots+\beta_1^{n-1} = -1,$$

so ergiebt sich

$$\frac{(n-1)D}{s} = n(a_1 b_1+a_2 b_2+\dots+a_n b_n)-(a_1+a_2+\dots+a_n)(b_1+b_2+\dots+b_n).$$

Nun ist $b_1+b_2+\dots+b_n$, d. h. der Werth in welchen $b_1+b_2\beta_1+\dots+b_n\beta_1^{n-1}$ übergeht, wenn man die Einheit statt β_1 setzt, nichts Anderes als $(a_1+a_2+\dots+a_n)^{n-2}$. Setzt man daher

$$a_1 b_1+a_2 b_2+\dots+a_n b_n = S,$$

so hat man

$$\frac{(n-1)D}{s} = nS-s^{n-1}$$

oder

$$(7.) \qquad D=\frac{s(nS-s^{n-1})}{n-1}=s\left(S+\frac{S-s^{n-1}}{n-1}\right)$$

und nach (5.)

$$(8.) \qquad N=A_1+A_2+\dots+A_n=\frac{nS-s^{n-1}}{n-1}=\frac{n(S-s^{n-1})}{n-1}+s^{n-1}.$$

Sind a_1, a_2 u. s. w. ganze Zahlen, so folgt aus (8.) ausser der bekannten von Herrn *Kummer* gefundenen Congruenz (*Liouville* Journ. de Math. T. 16 p. 381)

$$A_1+A_2+\dots+A_n \equiv s^{n-1} \qquad (\text{mod. } n)$$

auch noch die Congruenz

$$S \equiv s^{n-1} \qquad (\text{mod. } n-1).$$

Ferner folgt aus (7.)

$$(9.) \qquad \frac{\partial D}{\partial a_t}=\frac{nS-s^{n-1}}{n-1}+\frac{s}{n-1}\,\frac{\partial(nS-s^{n-1})}{\partial a_t}=\frac{n(S-s^{n-1})}{n-1}+\frac{ns}{n-1}\,\frac{\partial S}{\partial a_t},$$

mithin

$$A_t = \frac{S-s^{n-1}}{n-1}+\frac{s}{n-1}\frac{\partial S}{\partial a_t}.$$

Man setze $\frac{1}{n-1}\frac{\partial S}{\partial a_t} = \varphi(b_t)$, also

$$A_t = \frac{S-s^{n-1}}{n-1}+s\varphi(b_t)$$

und

$$A_1+A_2+\cdots+A_n = \frac{n(S-s^{n-1})}{n-1}+s[\varphi(b_1)+\varphi(b_2)+\cdots+\varphi(b_n)].$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit (8.), so ergiebt sich

$$\varphi(b_1)+\varphi(b_2)+\cdots+\varphi(b_n) = s^{n-2} = b_1+b_2+\cdots+b_n,$$

also

$$\varphi(b_t) = b_t$$

und

$$(10.)\qquad A_t = \frac{S-s^{n-1}}{n-1}+sb_t.$$

Man hat demnach

$$(11.)\qquad A_t-A_u = s(b_t-b_u)$$

und

$$\frac{A_t-A_u}{A_k-A_l} = \frac{b_t-b_u}{b_k-b_l}.$$

Setzt man

$$a_1\frac{\partial b_1}{\partial a_t}+a_2\frac{\partial b_2}{\partial a_t}+\cdots+a_n\frac{\partial b_n}{\partial a_t} = \Sigma a\frac{\partial b}{\partial a_t},$$

so folgt aus

$$\frac{1}{n-1}\frac{\partial S}{\partial a_t} = b_t,$$

wenn man die Differentiation ausführt,

$$\Sigma a\frac{\partial b}{\partial a_t} = (n-2)b_t$$

und nach (11.)

$$A_t-A_u = \frac{s}{n-2}\left(\Sigma a\frac{\partial b}{\partial a_t}-\Sigma a\frac{\partial b}{\partial a_u}\right).$$

Aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n &= B_1, \\ a_nx_1+a_1x_2+\cdots+a_{n-1}x_n &= B_2, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_2x_1+a_3x_2+\cdots+a_1x_n &= B_n \end{aligned}$$

folgt im Allgemeinen

$$x_k = \frac{B_1 A_k + B_2 A_{k-1} + \cdots + B_n A_{k+1}}{D}.$$

Ist nun n eine Primzahl, so setze man $\frac{S - s^{n-1}}{n-1} = h$, also ist $A_t = h + s b_t$ und

$$x_k = \frac{(B_1 + B_2 + \cdots + B_n)h}{s(S+h)} + \frac{B_1 b_k + B_2 b_{k-1} + \cdots + B_n b_{k+1}}{S+h}.$$

Wenn k_1, k_2, k_n die Zahlen 1, 2, ... n, jedoch in beliebiger Ordnung darstellen, so ist

$$\begin{vmatrix} a_{k_1,k_1} & a_{k_1,k_2} & \dots & a_{k_1,k_n} \\ a_{k_2,k_1} & a_{k_2,k_2} & \dots & a_{k_2,k_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k_n,k_1} & a_{k_n,k_2} & \dots & a_{k_n,k_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

da man, um aus der ersten Determinante die zweite abzuleiten, die zweiten Indices durch dieselbe Vertauschung der verticalen Reihen, wie die ersten Indices durch Vertauschung der horizontalen Reihen in die Ordnung 1, 2, ... n zu bringen hat, also im Ganzen eine gerade Anzahl Vertauschungen machen muss. Specielle Fälle hiervon sind, wenn man die ersten Indices oder die zweiten oder beide als Exponenten betrachtet. Sei das letztere der Fall und zugleich $k_1 = 1$, so dass k_2, k_3, ... k_n die Zahlen 2, 3, ... n in irgend einer Ordnung darstellen, so ist demnach

$$\begin{vmatrix} a & a^{k_2} & \dots & a^{k_n} \\ a^{k_2} & (a^{k_2})^{k_2} & \dots & (a^{k_2})^{k_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a^{k_n} & (a^{k_n})^{k_2} & \dots & (a^{k_n})^{k_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a^2 & \dots & a^n \\ a^2 & (a^2)^2 & \dots & (a^2)^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a^n & (a^n)^2 & \dots & (a^n)^n \end{vmatrix}.$$

Sei nun wieder n eine Primzahl, α eine n^{te} Wurzel der Einheit, die Einheit selbst ausgenommen, r eine primitive Wurzel von n. Man bilde die Determinante

$$A = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha^r & \alpha^{r^2} & \dots & \alpha^{r^{n-2}} \\ \alpha^r & \alpha^{r^2} & \alpha^{r^3} & \dots & \alpha \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha^{r^{n-2}} & \alpha & \alpha^r & \dots & \alpha^{r^{n-3}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha^r & \alpha^{r^2} & \dots & \alpha^{r^{n-2}} \\ \alpha^r & (\alpha^r)^r & (\alpha^r)^{r^2} & \dots & (\alpha^r)^{r^{n-2}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha^{r^{n-2}} & (\alpha^{r^{n-2}})^r & \dots & \dots & (\alpha^{r^{n-2}})^{r^{n-2}} \end{vmatrix},$$

so ist mithin, da die Zahlen r, r^2, ... r^{n-2} den Zahlen 2, 3, ... $n-1$ in irgend einer Ordnung nach dem Modul n congruent sind, auch

$$A = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 & \dots & \alpha^{n-1} \\ \alpha^2 & (\alpha^2)^2 & \dots & (\alpha^2)^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha^{n-1} & (\alpha^{n-1})^2 & \dots & (\alpha^{n-1})^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \dots & \alpha^{n-2} \\ 1 & \alpha^2 & \dots & (\alpha^2)^{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha^{n-1} & \dots & (\alpha^{n-1})^{n-2} \end{vmatrix},$$

also

$$A = (-1)^{\frac{n-1.n-2}{2}} Q,$$

wenn Q das Product

$$\begin{matrix} (\alpha-\alpha^2)(\alpha-\alpha^3)\dots(\alpha-\alpha^n) \\ (\alpha^2-\alpha^3)\dots(\alpha^2-\alpha^{n-1}) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (\alpha^{n-2}-\alpha^{n-1}) \end{matrix}$$

bezeichnet.

Man hat aber auch

$$A = (-1)^{\frac{n-2.n-3}{2}} \begin{vmatrix} \alpha & \alpha^r & \dots & \alpha^{r^{n-2}} \\ \alpha^{r^{n-2}} & \alpha & \dots & \alpha^{r^{n-3}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha^r & \alpha^{r^2} & \dots & \alpha \end{vmatrix},$$

und diese letztere Determinante hat die Form der Determinante (1.). Bezeichnet mithin β eine Wurzel der Gleichung $x^{n-1}=1$ und P das Product der Factoren, die man erhält, wenn man in $\alpha+\beta\alpha^r+\beta^2\alpha^{r^2}+\dots+\beta^{n-2}\alpha^{r^{n-2}}$ statt β die $n-1$ verschiedenen Werthe der $(n-1)^{\text{ten}}$ Wurzel der Einheit setzt, so ist demnach

$$A = (-1)^{\frac{n-2.n-3}{2}} P,$$

also

$$Q = -P.$$

Lässt man den in P enthaltenen Factor $\alpha+\alpha^r+\dots+\alpha^{r^{n-2}} = -1$ weg und nennt das Product der übrigen Factoren P', so ist daher

$$Q = P'.$$

Setzt man $\alpha+\beta\alpha^r+\dots+\beta^{n-2}\alpha^{r^{n-2}} = F(\beta)$, so ist (Bd. 30 p. 166 dieses Journals), sobald nicht $\beta = 1$,

$$F(\beta)F(\beta^{n-2}) = \beta^{\frac{n-1}{2}}.n.$$

Nimmt man für β eine primitive Wurzel der Gleichung $x^{n-1}=1$, also $\beta^{\frac{n-1}{2}} = -1$, so folgen hieraus die $\frac{n-3}{2}$ Gleichungen:

$$F(\beta)F(\beta^{n-2}) = -n,$$
$$F(\beta^2)F(\beta^{n-3}) = -n,$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$
$$F(\beta^{\frac{n-3}{2}})F(\beta^{\frac{n+1}{2}}) = -n.$$

Ferner ist $F(\beta^{\frac{n-1}{2}}) = \alpha-\alpha^r+\alpha^{r^2}-\cdots-\alpha^{r^{n-2}}$, also wenn man $\alpha = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ setzt (Bd. 21 p. 139 dieses Journals),

$$F(\beta^{\frac{n-1}{2}}) = \left(\frac{k}{n}\right) i^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2} \sqrt{n}$$

und

$$P' = F(\beta)F(\beta^2)\dots F(\beta^{n-2}) = (-1)^{\frac{n-3}{2}} \left(\frac{k}{n}\right) i^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2} . n^{\frac{n-2}{2}}.$$

Dies ist also auch der Werth des Productes Q, mithin je nachdem $n = 4m+1$ oder $= 4m+3$, $Q = -\left(\frac{k}{n}\right) n^{\frac{n-2}{2}}$ oder $= \left(\frac{k}{n}\right) i . n^{\frac{n-2}{2}}$; daher ist im ersten Falle der Werth der Determinante $A = -\left(\frac{k}{n}\right) n^{\frac{n-2}{2}}$, im zweiten $-\left(\frac{k}{n}\right) i . n^{\frac{n-2}{2}}$.

Göttingen, Mai 1871.

